O. V. Kamozina, Ωζ-foliated Fitting classes, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2020, Volume 20, Issue 4, 424–433

DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-4-424-433

УДК 512.542

$\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга

О. В. Камозина

Камозина Олеся Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Брянский государственный инженерно-технологический университет, Россия, 241037, г. Брянск, просп. Станке Димитрова, д. 3, ovkamozina@yandex.ru

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Для непустого подкласса Ω класса всех простых групп $\mathfrak{I}$ и разбиения $\zeta = \{\zeta_i \mid i \in I\}$, где ζ_i — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \cup_{i\in I}\zeta_i$ и $\zeta_i \cap \zeta_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, в работе вводятся $\Omega\zeta R$-функция f и $\Omega\zeta FR$-функция φ. Областью определения данных функций является множество $\Omega\zeta \cup \{\Omega'\}$, где $\Omega\zeta = \{\Omega \cap \zeta_i \mid \Omega \cap \zeta_i \neq \varnothing\}$, $\Omega' = \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Областью значений функций является множество классов Фиттинга и множество непустых формаций Фиттинга соответственно. С помощью функций f и φ определяется $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi) = (G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G))$ с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta$-направлением φ. В работе приведены примеры $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга. Определены два вида $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга: $\Omega\zeta$-свободные и $\Omega\zeta$-канонические классы Фиттинга. Их направления обозначены φ_0 и φ_1 соответственно. Показано, что каждый непустой неединичный класс Фиттинга является $\Omega\zeta$-свободным классом Фиттинга для некоторого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения ζ. Получен ряд свойств $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга. В частности, дано определение внутреннего $\Omega\zeta$-спутника и показано, что каждый $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга обладает внутренним $\Omega\zeta$-спутником. При $\Omega = \mathfrak{I}$ введено понятие ζ-расслоенного класса Фиттинга. Показаны условия связи между $\Omega\zeta$-расслоенными и ζ-расслоенными классами Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, $\Omega\zeta$-расслоенный, $\Omega\zeta$-спутник, $\Omega\zeta$-направление.

Поступила в редакцию: 17.11.2019 / Принята: 15.01.2020 / Опубликована: 30.11.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-424-433

ВВЕДЕНИЕ

В 1963 г. в работе В. Гашюца [1] с помощью специальной функции $f : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$ были определены локальные формации, в 1969 г. в работе Б. Хартли [2] с помощью функции $g : \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$ определены локальные классы Фиттинга. В 1984 г. Л. А. Шеметков заменил множество всех простых чисел $\mathbb{P}$ на класс всех простых групп $\mathfrak{I}$. В результате были построены композиционные формации [3]. Независимо композиционные формации были введены Р. Бэром (см. [4]). В 1999 г. Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба в работе [5] для локального случая вместо множества $\mathbb{P}$ области определения функций рассмотрели непустое подмножество ω множества $\mathbb{P}$ и одноэлементное подмножество $\{\omega'\}$, где $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. В результате были построены ω-локальные формации и классы Фиттинга, а также изучены их различные свойства. Построение новых видов формаций и классов Фиттинга привело к идее рассмотрения не только ранее введенных функций-спутников, но еще и функций-направлений φ. В 2001 г. В. А. Ведерниковым и

М. М. Сорокиной в работе [6] были определены Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга, где композиционный случай являлся одним из имеющихся «слоев». Кроме указанных авторов, изучением различных видов Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга занимались Ю. А. Скачкова, В. Е. Егорова, Е. Н. Демина и др. (см., например, [7–10]). В настоящее время появилась новая идея в функциональном подходе. В 2018 г. А. Н. Скиба в работе [11] для локального случая на множестве $\mathbb{P}$ вводит разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и начинает изучение σ-локальных формаций, а также их приложений.

Цель данной работы — используя непустой подкласс Ω класса всех простых групп $\mathfrak{I}$ и разбиение ζ класса $\mathfrak{I}$, ввести $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга; на основе хорошо известных классов групп показать существование $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга; выделить их виды, исследовать свойства.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно. Группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M — простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G [5].

Символ $\mathfrak{I}$ обозначает класс всех простых конечных групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I} \setminus \Omega$, $K(G)$ обозначает класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G, (G) — класс всех групп, изоморфных группе G. $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп, $\mathfrak{G}_\Omega$ и $\mathfrak{G}_{\Omega'}$ — класс всех Ω- и Ω'-групп соответственно. Ω-группа — группа G, где $K(G) \subseteq \Omega$ [6].

Кроме того, $\zeta = \{\zeta_i \mid i \in I\}$, где ζ_i — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \cup_{i\in I}\zeta_i$ и $\zeta_i \cap \zeta_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\zeta(G) = \{\zeta_i \mid \zeta_i \cap K(G) \neq \varnothing\}$, $\Omega\zeta = \{\Omega \cap \zeta_i \mid \Omega \cap \zeta_i \neq \varnothing\}$, $\Omega\zeta(G) = \{\Omega \cap \zeta_i \mid \Omega \cap \zeta_i \cap K(G) \neq \varnothing\}$, $\Omega\zeta(\mathfrak{F}) = \{\Omega\zeta(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса групп $\mathfrak{F}$.

Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах их области определения. Функцию $f : \Omega\zeta \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, где $f(\Omega') \neq \varnothing$, назовем $\Omega\zeta R$-функцией; функцию $\varphi : \Omega\zeta \cup \{\Omega'\} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ — $\Omega\zeta FR$-функцией; функцию $g : \zeta \to \{$классы Фиттинга групп$\}$ — ζR-функцией; функцию $\psi : \zeta \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ — ζFR-функцией. Определим $\Omega\zeta FR$-функцию φ_0 следующим образом: $\varphi_0(\Omega') = \mathfrak{G}_\Omega$, $\varphi_0(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$. Определим ζFR-функцию ψ_0 следующим образом: $\psi_0(\zeta_i) = \mathfrak{G}_{\zeta_i'}$ для всех $\zeta_i \in \zeta$.

Пусть μ_1 и μ_2 — произвольные $\Omega\zeta R$-функции ($\Omega\zeta FR$-функции). Будем полагать, что $\mu_1 \leqslant \mu_2$, если $\mu_1(\Omega') \subseteq \mu_2(\Omega')$ и $\mu_1(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq \mu_2(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta$. Пусть ν_1 и ν_2 — произвольные ζR-функции (ζFR-функции). Будем полагать, что $\nu_1 \leqslant \nu_2$, если $\nu_1(\zeta_i) \subseteq \nu_2(\zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \zeta$.

Теорема 1. *Пусть f — $\Omega\zeta R$-функция, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, и $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi) = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.*

Доказательство. 1. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Так как $NO^\Omega(G)/O^\Omega(G) \triangleleft G/O^\Omega(G) \in$ $\in \mathfrak{G}_\Omega$ и $\mathfrak{G}_\Omega$ — класс Фиттинга, то $NO^\Omega(G)/O^\Omega(G) \cong N/N \cap O^\Omega(G) \in \mathfrak{G}_\Omega$. Тогда

$O^{\Omega}(N) \subseteq N \cap O^{\Omega}(G)$, а значит, $O^{\Omega}(N) \subseteq O^{\Omega}(G)$. Так как по условию $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $f(\Omega')$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(N) \in f(\Omega')$.

Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(N)$. Тогда $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$ и по условию $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Так как $NG^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \triangleleft G/G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ и $\varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ — класс Фиттинга, то $NG^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \cong N/N \cap G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ и $N^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq N \cap G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$. Учитывая, что $f(\Omega \cap \zeta_i)$ — класс Фиттинга, как и выше, получаем, что $N^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Таким образом, $N \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть $G = HK$, где $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $H \in \mathfrak{F}$, $K \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию $O^{\Omega}(H) \in f(\Omega')$ и $O^{\Omega}(K) \in f(\Omega')$. Так как $f(\Omega')$ — класс Фиттинга, то $T = O^{\Omega}(H)O^{\Omega}(K) \in f(\Omega')$. Поскольку $G = HK$, то $G/T = HT/T \cdot KT/T$. Так как $O^{\Omega}(H) \triangleleft H$, то по модулярному тождеству Дедекинда $H \cap T = H \cap O^{\Omega}(H)O^{\Omega}(K) = O^{\Omega}(H)(H \cap O^{\Omega}(K))$. Тогда $HT/T \cong H/H \cap T = H/O^{\Omega}(H)(H \cap O^{\Omega}(K))$. Так как $H/O^{\Omega}(H) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$ и $\mathfrak{G}_{\Omega}$ — формация, то

$$H/O^{\Omega}(H)(H \cap O^{\Omega}(K)) \cong H/O^{\Omega}(H)/O^{\Omega}(H)(H \cap O^{\Omega}(K))/O^{\Omega}(H) \in \mathfrak{G}_{\Omega}.$$

Следовательно, $HT/T \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Аналогично $KT/T \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Так как $\mathfrak{G}_{\Omega}$ — класс Фиттинга, то $G/T = HT/T \cdot KT/T \in \mathfrak{G}_{\Omega}$, а значит, $O^{\Omega}(G) \subseteq T$. Так как $T \in f(\Omega')$ и $f(\Omega')$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$.

Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Тогда $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(H)$ или $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(K)$. Из условия получаем, что $H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ или $K^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Если $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(H)$ и $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(K)$, то, учитывая, что $f(\Omega \cap \zeta_i)$ — класс Фиттинга и $\varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ — формация Фиттинга, как и выше, получаем, что $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Пусть, для определенности, $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(H)$ и $\Omega \cap \zeta_i \notin \Omega\zeta(K)$. Тогда K — $(\Omega \cap \zeta_i)'$-группа. Так как по условию $\varphi_0 \leqslant \varphi$, то $K \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} = \varphi_0(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$. Поскольку $G = HK$, то

$$G/H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = H/H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \cdot KH^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}.$$

Кроме того, $KH^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \cong K/K \cap H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$. Так как $\varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ — формация Фиттинга, то $K/K \cap H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ и $G/H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$. Тогда $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$. Так как $H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ и $f(\Omega \cap \zeta_i)$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Теорема доказана. □

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 2. *Пусть g — ζR-функция, ψ — ζFR-функция, где $\psi_0 \leqslant \psi$, и $\mathfrak{F} = \zeta R(g, \psi) = (G : G^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \zeta(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.*

Определение 1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$, назовем *$\Omega\zeta$-расслоеннным классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta$-направлением φ*. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \zeta R(g, \psi)$, где g — ζR-функция, ψ — ζFR-функция, $\psi_0 \leqslant \psi$, назовем *ζ-расслоенным классом Фиттинга с ζ-спутником g и ζ-направлением ψ*.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\Omega\zeta(\mathfrak{F}) = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = \varnothing$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в заключении леммы.

1. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\Omega\zeta(G) = \varnothing$, а значит, G — Ω'-группа. Тогда $O^{\Omega}(G) = G \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$ и из $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G) = \varnothing$ следует, что $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Следовательно, $O^{\Omega}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} = M$ и $G/M \cong G/O^{\Omega}(G)/M/O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G/M)$. Тогда $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) = \varnothing$. Противоречие. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана. □

Пример 1. Из леммы 1 следует, что $\mathfrak{G}_{\Omega'}$ и (1) являются $\Omega\zeta$-расслоенными классами Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения ζ.

Пример 2. $\mathfrak{G} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{G}$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 2.

1. Покажем, что $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}$. Так как $O^{\Omega}(G) \triangleleft G$, $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \triangleleft G$ и $\mathfrak{G}$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{G} = f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{G} = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2. Так как рассматриваются только конечные группы, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1$.

Пример 3. $\mathfrak{G}_{\Omega} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция такая, что $f(\Omega') = (1)$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 3.

1. Покажем, что $\mathfrak{G}_{\Omega} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Тогда $O^{\Omega}(G) = 1 \in (1) = f(\Omega')$. Так как $\mathfrak{G}_{\Omega}$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{G}_{\Omega} = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G}_{\Omega} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{\Omega}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') = (1)$, а значит, $G \in \mathfrak{G}_{\Omega}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{\Omega}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{G}_{\Omega} = \mathfrak{F}_1$.

Пример 4. Пусть λ — непустой подкласс класса всех простых групп $\mathfrak{I}$. Определим в классе $\mathfrak{I}$ разбиение ζ следующим образом: если $\Omega \cap \zeta_i \cap \lambda \neq \varnothing$, то $\Omega \cap \zeta_i \subseteq \lambda$; если $\Omega \cap \zeta_i \cap \lambda = \varnothing$, то $\Omega \cap \zeta_i \nsubseteq \lambda$. Тогда $\mathfrak{G}_{\lambda} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{G}_{\lambda}$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{\lambda}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \subseteq \lambda$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = \varnothing$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \nsubseteq \lambda$, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 4.

1. Покажем, что $\mathfrak{G}_{\lambda} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\lambda}$. Так как $\mathfrak{G}_{\lambda}$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{G}_{\lambda} = f(\Omega')$. Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Так как $G \in \mathfrak{G}_{\lambda}$, то $K(G) \subseteq \lambda$, а значит, $\Omega \cap \zeta_i \cap \lambda \neq \varnothing$ и $\Omega \cap \zeta_i \subseteq \lambda$. Тогда $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{G}_{\lambda} = f(\Omega \cap \zeta_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G}_{\lambda} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_\lambda$. Допустим противное, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{G}_\lambda$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{G}_\lambda}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то, как и в лемме 1, $O^\Omega(G) \subseteq M$ и $G/M \in \mathfrak{G}_\Omega$. Если для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G/M)$ выполняется неравенство $\Omega \cap \zeta_i \cap \lambda \neq \varnothing$, а значит, $\Omega \cap \zeta_i \subseteq \lambda$, то $K(G/M) \subseteq \lambda$ и $G \in \mathfrak{G}_\lambda$. Противоречие. Пусть существует $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G/M)$ и выполняется равенство $\Omega \cap \zeta_i \cap \lambda = \varnothing$, а значит, $\Omega \cap \zeta_i \nsubseteq \lambda$. Так как $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$ и $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) = \varnothing$. Противоречие. Таким образом, $G \in \mathfrak{G}_\lambda$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_\lambda$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{F}_1$.

Пример 5. Из примера 4 следует, что $\mathfrak{G}_{\zeta_i} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{G}_{\zeta_i}$, $f(\Omega \cap \zeta_j) = \mathfrak{G}_{\zeta_i}$ для всех $j = i$, $f(\Omega \cap \zeta_j) = \varnothing$ для всех $j \neq i$, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.

Определение 2. Пусть $\varphi = \varphi_0$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta FrR(f) = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(G) \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G))$, который назовем $\Omega\zeta$-свободным классом Фиттинга или $\Omega\zeta Fr$-классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f. Пусть $\psi = \psi_0$. Из определения 1 и теоремы 2 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \zeta FrR(g) = (G : O^{\zeta_i'}(G) \in g(\zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \zeta(G))$, который назовем ζ-свободным классом Фиттинга или ζFr-классом Фиттинга с ζ-спутником g.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\Omega\zeta = \Omega\zeta(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Omega\zeta$-свободным классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta FrR(f)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = fit(O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$.

1. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(H) \triangleleft H$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то $O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(H) \in fit(O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное, и пусть T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то, как и в лемме 1, $O^\Omega(T) \subseteq M$ и $T/M \in \mathfrak{G}_\Omega$. Пусть $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(T/M) \subseteq \Omega\zeta(T)$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то по определению класса $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta FrR(f)$ и $\Omega\zeta$-спутника f получаем, что $O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T) \in f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T)/M/O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T) \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$. Противоречие. Таким образом, $T \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Из теоремы 3 следует, что каждый непустой неединичный класс Фиттинга является $\Omega\zeta$-свободным классом Фиттинга для некоторого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения ζ.

Лемма 2. *Пусть f — $\Omega\zeta R$-функция, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, и $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(g, \varphi)$, где $g(\Omega') = f(\Omega') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$;

2) $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(h, \varphi)$, где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$;

3) если $\Omega\zeta = \Omega\zeta(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta)$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(g, \varphi)$, где g — $\Omega\zeta R$-функция, описанная в пункте 1) леммы.

Так как $g \leqslant f$, то, учитывая теорему 1, получаем $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Так как $O^{\Omega}(G) \triangleleft G$, $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$, $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) \cap \mathfrak{F} = g(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Следовательно, $G \in \Omega\zeta R(g, \varphi) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2. Пусть $\mathfrak{F}_2 = \Omega\zeta R(h, \varphi)$, где h — $\Omega\zeta R$-функция, описанная в пункте 2) леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$. Так как $O^{\Omega}(G) \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$. Кроме того, $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i) = h(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Тогда $G \in \Omega\zeta R(h, \varphi) = \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_2$ и пусть H — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_2 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — комонолитическая с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Из $H \in \mathfrak{F}_2$, как и в лемме 1, получаем, что $O^{\Omega}(H) \subseteq M$ и $H/M \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Так как $H/M \cong H/O^{\Omega}(M)/M/O^{\Omega}(M)$ и $M/O^{\Omega}(M) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$, то $H/O^{\Omega}(M) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Тогда $O^{\Omega}(H) \subseteq O^{\Omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, то $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$, а значит, $O^{\Omega}(H) \in f(\Omega')$. Кроме того, $H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in h(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(H)$. Следовательно, $H \in \Omega\zeta R(f, \varphi) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

3. Пусть $\mathfrak{F}_3 = (G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta)$ и $G \in \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$. Если $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$, то $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(G) = \Omega\zeta(\mathfrak{F}) \setminus \Omega\zeta(G)$. Тогда существует такая группа $T \in \mathfrak{F}$, что $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T)$ и $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$, а значит, $f(\Omega \cap \zeta_i) \neq \varnothing$. Так как $\Omega \cap \zeta_i \notin \Omega\zeta(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} = \varphi_0(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$. Тогда $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = 1 \in f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Таким образом, $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_3$.

Включение $\mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_3$. Лемма доказана. □

Определение 3. $\Omega\zeta$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$ назовем внутренним, если $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$.

Замечание 2. Лемма 2 показывает, что каждый $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга всегда обладает внутренним $\Omega\zeta$-спутником.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\Omega\zeta = \Omega\zeta(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ζ-расслоенным классом Фиттинга с ζ-спутником g и ζ-направлением ψ для любого разбиения ζ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$. Рассмотрим ζR-функцию g такую, что $g(\zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\zeta_i \subseteq \Delta = \{\zeta_j \mid \Omega \cap \zeta_j \in \Omega\zeta\}$, $g(\zeta_i) = \mathfrak{F}$ для всех $\zeta_i \subseteq \mathfrak{I} \setminus (\cup\zeta_j \mid \zeta_j \in \Delta)$; ζFR-функцию ψ такую, что $\psi(\zeta_i) = \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \Delta$, $\psi(\zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega}$ для всех $\zeta_i \subseteq \mathfrak{I} \setminus (\cup\zeta_j \mid \zeta_j \in \Delta)$. Пусть $\mathfrak{H} = \zeta R(g, \psi)$.

1. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\zeta_i \in \zeta(G)$. Если $\zeta_i \in \Delta$ и $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$, то $G^{\psi(\zeta_i)} = G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) = g(\zeta_i)$. Если $\zeta_i \in \Delta$ и $\Omega \cap \zeta_i \notin \Omega\zeta(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} = \varphi_0(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$. Так как $\Omega\zeta = \Omega\zeta(\mathfrak{F})$, то, как и в лемме 2, $f(\Omega \cap \zeta_i) \neq \varnothing$ и $G^{\psi(\zeta_i)} = G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = 1 \in f(\Omega \cap \zeta_i) = g(\zeta_i)$. Далее, можем считать в силу леммы 2, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Если $\zeta_i \subseteq \mathfrak{I} \setminus (\cup\zeta_j \mid \zeta_j \in \Delta)$, то $G^{\psi(\zeta_i)} = O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') = \mathfrak{F} = g(\zeta_i)$. Тогда $G \in \zeta R(g, \varphi) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $T \in \mathfrak{H}$ и $\zeta_i \in \zeta(T)$. Установим, что $O^{\Omega}(T) = T^{\psi(\zeta_i)}$ для всех $\zeta_i \subseteq \mathfrak{I} \setminus (\cup\zeta_j \mid \zeta_j \in \Delta)$. Действительно, из $T/T^{\psi(\zeta_i)} \in \psi(\zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega}$ следует, что

$O^{\Omega}(T) \subseteq T^{\psi(\zeta_i)}$. Обратно, так как $T/O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega} = \psi(\zeta_i)$, то $T^{\psi(\zeta_i)} \subseteq O^{\Omega}(T)$. Тогда $O^{\Omega}(T) = T^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i) = \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T) \subseteq \Omega\zeta$ получаем, что $\zeta_i \in \Delta$. Тогда $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = T^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$. Следовательно, $G \in \Omega\zeta R(f, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана. □

Определение 4. Определим $\Omega\zeta FR$-функцию φ_1 следующим образом: $\varphi_1(\Omega') = \mathfrak{G}_{\Omega}$, $\varphi_1(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta KR(f) = (G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $O^{\Omega\cap\zeta_i,(\Omega\cap\zeta_i)'}(G) \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G))$, который назовем $\Omega\zeta$-каноническим классом Фиттинга или $\Omega\zeta K$-классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f. Определим ζFR-функцию ψ_1 следующим образом: $\psi_1(\zeta_i) = \mathfrak{G}_{\zeta_i}\mathfrak{G}_{\zeta_i'}$ для всех $\zeta_i \in \zeta$. Из определения 1 и теоремы 2 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \zeta KR(f) = (G : O^{\zeta_i,\zeta_i'}(G) \in f(\zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \zeta(G))$, который назовем ζ-каноническим классом Фиттинга или ζK-классом Фиттинга с ζ-спутником g.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-свободный класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta = \Omega\zeta(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ — ζ-свободный класс Фиттинга с ζ-спутником g для любого разбиения ζ.*

Следствие 2. *Если $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-канонический класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta = \Omega\zeta(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ — ζ-канонический класс Фиттинга с ζ-спутником g для любого разбиения ζ.*

Определение 5. ζ-направление ψ ζ-расслоенного класса Фиттинга назовем правильным, если $\psi(\zeta_i) \cdot \mathfrak{G}_{\zeta_i'} = \psi(\zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \zeta$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ζ-расслоенный класс Фиттинга с ζ-спутником g и правильным ζ-направлением ψ. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta$-направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения ζ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \zeta R(g, \psi)$. Рассмотрим $\Omega\zeta R$-функцию f такую, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(\Omega \cap \zeta_i) = g(\zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$; $\Omega\zeta FR$-функцию φ такую, что $\varphi(\Omega') = \mathfrak{G}_{\Omega}$, $\varphi(\Omega \cap \zeta_i) = \psi(\zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$.

1. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^{\Omega}(G) \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G) \subseteq \Omega\zeta$ получаем $\zeta_i \in \zeta(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F} = \zeta R(g, \psi)$, то $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = G^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное, и пусть T — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, то $O^{\Omega}(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, а значит, $O^{\Omega}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{\Omega}(T)/M/O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$. Тогда для всех $\zeta_i \in \zeta(T/M)$ получаем $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T/M) \subseteq \Omega\zeta(T) \subseteq \Omega\zeta$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$, то $T^{\psi(\zeta_i)} = T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) = g(\zeta_i)$. Пусть $\zeta_i \in \zeta(T) \setminus \zeta(T/M)$. Тогда $T/M \in \mathfrak{G}_{\zeta_i'}$. Так как $T/M \cong T/M^{\psi(\zeta_i)}/M/M^{\psi(\zeta_i)}$, то $T/M^{\psi(\zeta_i)} \in \psi(\zeta_i)\cdot\mathfrak{G}_{\zeta_i'}$. По условию ψ — правильное ζ-направление, а значит, $\psi(\zeta_i) \cdot \mathfrak{G}_{\zeta_i'} = \psi(\zeta_i)$. Тогда $T/M^{\psi(\zeta_i)} \in \psi(\zeta_i)$ и $T^{\psi(\zeta_i)} \subseteq M^{\psi(\zeta_i)}$. Из $M \in \mathfrak{F} = \zeta R(g, \psi)$ получаем, что $M^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i)$, а значит, $T^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i)$. Таким образом, $T^{\psi(\zeta_i)} \in g(\zeta_i)$ для всех $\zeta_i \in \zeta(T)$. Тогда по определению $T \in \mathfrak{F} = \zeta R(g, \psi)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана. □

Замечание 3. В теоремах 4 и 5 показана связь между $\Omega\zeta$-расслоенными и ζ-расслоенными классами Фиттинга.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{F}$ — ζ-свободный класс Фиттинга с ζ-спутником g, то $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-свободный класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения ζ.*

Следствие 4. *Если $\mathfrak{F}$ — ζ-канонический класс Фиттинга с ζ-спутником g, то $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-канонический класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения ζ.*

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае, когда $\zeta = \{(A), (B), \dots\}$, где $(A), (B), \dots$ — простые группы, $A \not\cong B$, $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга становятся Ω-расслоенными классами Фиттинга в определениях работы [6].

При дальнейшем исследовании введенных в данной статье классов Фиттинга представляет интерес изучение их минимальных и максимальных спутников, произведений, решеток и т. д.

Библиографический список

1. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Zeitschrift. 1963. Bd. 80, № 4. S. 300–305.
2. *Hartley B.* On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193–207.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin ; N. Y. : Walter de Gruyter, 1992. 892 p.
5. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
6. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. матем. 2001. Т. 13, вып. 3. С. 125–144. DOI: https://doi.org/10.4213/dm299
7. *Скачкова Ю. А.* Решетки Ω-расслоенных формаций // Дискрет. матем. 2002. Т. 14, вып. 2. С. 85–94. DOI: https://doi.org/10.4213/dm243
8. *Егорова В. Е.* Критические неоднопорожденные тотально канонические классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2008. Т. 83, вып. 4. С. 520–527. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4572
9. *Ведерников В. А., Демина Е. Н.* Ω-расслоенные формации мультиоператорных Т-групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.
10. *Камозина О. В.* Алгебраические решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, вып. 2. С. 139–145. DOI: https://doi.org/10.4213/dm53
11. *Skiba A. N.* On one generalization of the local formations [Об одном обобщении локальных формаций] // ПФМТ. 2018. № 1 (34). С. 79–82.

Образец для цитирования:

Камозина О. В. $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 424–433. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-424-433

$\Omega\zeta$-foliated Fitting Classes

O. V. Kamozina

Olesia V. Kamozina, https://orcid.org/0000-0003-2803-6016, Bryansk State Technological University of Engineering, 3 Stanke Dimitrova Ave., Bryansk 241037, Russia, ovkamozina@yandex.ru

All groups under consideration are assumed to be finite. For a nonempty subclass of Ω of the class of all simple groups $\Im$ and the partition $\zeta = \{\zeta_i \mid i \in I\}$, where ζ_i is a nonempty subclass of the class $\Im$, $\Im = \cup_{i\in I}\zeta_i$ and $\zeta_i \cap \zeta_j = \varnothing$ for all $i \neq j$, $\Omega\zeta R$-function f and $\Omega\zeta FR$-function φ are introduced. The domain of these functions is the set $\Omega\zeta \cup \{\Omega'\}$, where $\Omega\zeta = \{\Omega \cap \zeta_i \mid \Omega \cap \zeta_i \neq \varnothing\}$, $\Omega' = \Im \setminus \Omega$. The scope of these function values is the set of Fitting classes and the set of nonempty Fitting formations, respectively. The functions f and φ are used to determine the $\Omega\zeta$-foliated Fitting class $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi) = (G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ and $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ for all $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G))$ with $\Omega\zeta$-satellite f and $\Omega\zeta$-direction φ. The paper gives examples of $\Omega\zeta$-foliated Fitting classes. Two types of $\Omega\zeta$-foliated Fitting classes are defined: $\Omega\zeta$-free and $\Omega\zeta$-canonical Fitting classes. Their directions are indicated by φ_0 and φ_1 respectively. It is shown that each non-empty non-identity Fitting class is a $\Omega\zeta$-free Fitting class for some non-empty class $\Omega \subseteq \Im$ and any partition ζ. A series of properties of $\Omega\zeta$-foliated Fitting classes is obtained. In particular, the definition of internal $\Omega\zeta$-satellite is given and it is shown that every $\Omega\zeta$-foliated Fitting class has an internal $\Omega\zeta$-satellite. For $\Omega = \Im$, the concept of a ζ-foliated Fitting class is introduced. The connection conditions between $\Omega\zeta$-foliated and ζ-foliated Fitting classes are shown.

Keywords: finite group, Fitting class, $\Omega\zeta$-foliated, $\Omega\zeta$-satellite, $\Omega\zeta$-direction.

Received: 17.11.2019 / Accepted: 15.01.2020 / Published: 30.11.2020

References

1. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Math. Zeitschrift*, 1963, Bd. 80, no. 4, s. 300–305 (in Germany).
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.*, 1969, vol. 3, no. 2, pp. 193–207.
3. Shemetkov L. A. *Formatsii konechnykh grupp* [Finite group formations]. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
4. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 892 p.
5. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Adv. Math.*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 112–141.
6. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. Ω-foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Math. Appl.*, 2001, vol. 11, iss. 5, pp. 507–527. DOI: https://doi.org/10.4213/dm299
7. Skachkova Yu. A. Lattices of Ω-fibered formations. *Discrete Math. Appl.*, 2002, vol. 12, iss. 3, pp. 269–278. DOI: https://doi.org/10.4213/dm243
8. Egorova V. E. Critical non-singly-generated totally canonical Fitting classes of finite groups. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, iss. 4, pp. 478–484. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434608030206

9. Vedernikov V. A., Demina E. N. Ω-foliated formations of multioperator T-groups. *Siberian Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 789–804. DOI: https://doi.org/10.1007/s11202-010-0079-3
10. Kamozina O. V. Algebraic lattices of multiply Ω-foliated Fitting classes. *Discrete Math. Appl.* 2006, vol. 16, iss. 3, pp. 299–305. DOI: https://doi.org/10.1515/156939206777970453
11. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 1 (34), pp. 79–82.

Cite this article as:

Kamozina O. V. Ωζ-foliated Fitting Classes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 424–433 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-424-433