V. M. Badkov, Approximation of functions by the Fourier–Jacobi sums,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1966, Volume 167, Number 4, 731–734

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.512.6 *МАТЕМАТИКА*

В. М. БАДКОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1965)

Пусть $\{\hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x)\}_0^\infty$ — ортонормированная на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с весом $n(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$ система многочленов Якоби, а $R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) = f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)$ — n-й остаток ряда Фурье — Якоби функции $f(x)$, принадлежащей классу $W^{(r)}H^{(\gamma)}$ всех функций, r-я производная $(r \geqslant 0)$ которых на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяет условию Липшица порядка γ $(0 < \gamma \leqslant 1)$ с константой, равной единице.

В настоящей заметке при α и $\beta \geqslant 0$ получена оценка величины

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} \|R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)\|_C,$$

где $\|u(x)\|_C = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)|$. Кроме того, для случая ультрасферических многочленов $(\alpha = \beta = \lambda - {}^1/_2)$ доказывается, что полученная оценка является точной в смысле порядка.

В дальнейшем $q = \max(\alpha, \beta)$ и все постоянные $C_1, \ldots$ не зависят ни от x, ни от n, ни от функции $f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}$.

Теорема 1. *Пусть* $r \geqslant 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $r + \gamma > {}^1/_2$. *Если* $\alpha, \beta > 0$, $q \geqslant {}^1/_2$, *то справедлива оценка*

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} \|R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)\|_C \leqslant \frac{C_1}{(n+1)^{r+\gamma-q-1/2}}, \tag{1}$$

а если $\alpha, \beta > 0$, $q < {}^1/_2$ *или если* $\alpha\beta = 0$ $(\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0)$, *то*

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} \|R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)\|_C \leqslant \frac{C_2 \ln(n+2)}{(n+1)^{r+\gamma-q-1/2}}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > -{}^1/_2$, $r \geqslant 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$. *Тогда найдется постоянная* $C_3 > 0$ *такая, что*

$$\sup_{f \in W^{(r)}H^{(\gamma)}} |R_n^{(\alpha,\alpha)}(f, 1)| \geqslant \frac{C_3}{(n+1)^{r+\gamma-\alpha-1/2}}. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью усиленной теоремы Джексона (см. [1], стр. 276), в силу которой при любом $n > r$ для всякой функции $f(x) \in W^{(r)}H^{(\gamma)}$ можно построить алгебраический многочлен $Q_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, что

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \frac{C_4}{n^{r+\gamma}}\left[(\sqrt{1-x^2})^{r+\gamma} + \frac{1}{n^{r+\gamma}}\right] \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Отсюда вытекает, что

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)| \leqslant |f(x) - Q_n(x)| + \int_{-1}^{1} |f(t) - Q_n(t)|\,|K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t)|\,n(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_5}{(n+1)^{r+\gamma}} + \frac{C_6}{(n+1)^{r+\gamma}} \int_{-1}^{1} (1-t)^{r/2+\gamma/2+\alpha}(1+t)^{r/2+\gamma/2+\beta} |K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t)|\,dt +$$

$$+\frac{C_7}{(n+1)^{2(r+\gamma)}}\int_{-1}^{1}|K_n^{(\alpha,\beta)}(x,t)|\,n(t)\,dt=$$
$$=\frac{C_5}{(n+1)^{r+\gamma}}+\frac{C_6}{(n+1)^{r+\gamma}}I_1+\frac{C_7}{(n+1)^{2(r+\gamma)}}I_2, \tag{4}$$

где

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\hat P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\,\hat P_k^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2\leqslant\left\{\int_{-1}^{1}|K_n^{(\alpha,\beta)}(x,t)|^2 n(t)\,dt\right\}^{1/2}\left\{\int_{-1}^{1}n(t)\,dt\right\}^{1/2}= \tag{5}$$
$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}|\hat P_k^{(\alpha,\beta)}(x)|^2\right\}^{1/2}\left\{\int_{-1}^{1}n(t)\,dt\right\}^{1/2}\leqslant C_8\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{2q+1}\right\}^{1/2}\leqslant C_9(n+1)^{q+1}.$$

Из оценки (5) следует, что последнее слагаемое в (4) есть $O((n+1)^{q+1-2r-2\gamma})$ равномерно по x и f.

Оценка интеграла I_1 в случае $\alpha,\beta>0$, $q\geqslant 1/2$ проводится при помощи формулы

$$P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{(1-x)^{\alpha/2+1}(1+x)^{\beta/2+1}}\times$$
$$\times\left\{\int_{-1}^{x}(1-\tau)^{\alpha/2}(1+\tau)^{\beta/2}\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-2\right)\right]P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\tau)\,d\tau-\right.$$
$$\left.-2n\int_{-1}^{x}(1-\tau)^{\alpha/2}(1+\tau)^{\beta/2}P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(\tau)\,d\tau\right\}\quad(\alpha,\beta>0), \tag{6}$$

следующей из дифференциального уравнения для многочленов Якоби. Из этой формулы вытекает, что при любых α и $\beta>0$, для которых $q\geqslant 1/2$, и при $-1<t<1$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\hat P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-\hat P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{x-t}\right|\leqslant\frac{C_{10}(n+1)^{q+1/2}}{(1-t)^{\alpha/2+1}(1+t)^{\beta/2+1}}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1), \tag{7}$$

в котором постоянная C_{10} не зависит ни от x, ни от t, ни от n. Воспользовавшись формулой Кристоффеля — Дарбу ([2], стр. 83) и неравенством (7), при α и $\beta>0$, $q\geqslant 1/2$ получим

$$I_1\leqslant C_{11}(n+1)^{q+1/2}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1-t)^{(r+\gamma+\alpha-2)/2}(1+t)^{(r+\gamma+\beta-2)/2}\left[|\hat P_n^{(\alpha,\beta)}(t)|+|\hat P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)|\right]dt. \tag{8}$$

Но интеграл в неравенстве (8) ограничен при $n\to\infty$ (см. [2], стр. 180). Из неравенств (4), (5) и (8) следует справедливость оценки (1).

В случаях, когда $\alpha,\beta>0$, $q<1/2$ или когда $\alpha\beta=0$ ($\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$), интеграл I_1 оценивается при помощи приема, примененного П. К. Суетиным [5] для многочленов Лежандра ($\alpha=\beta=0$), и доказанного С. Н. Бернштейном [3] неравенства

$$|\hat P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\leqslant C_{12}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

При доказательстве теоремы 2 можно ограничиться рассмотрением функций $f(x)\in W^{(r)}H^{(\gamma)}$, для которых $f(1)=f'(1)=\ldots=f^{(r)}(1)=0$.

Имеем для любого $\lambda > 0$ и $0 < \theta < \pi$

$$(\sin\theta)^{2\lambda-1} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2^{2-2\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu n}^{(\lambda)} \sin(n+2\nu+1)\theta,$$

$$f_{0n}^{(\lambda)} = 1; \quad f_{\nu n}^{(\lambda)} = \frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{\nu!} \times$$
$$\times \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)\ldots(n+\lambda+\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

В случае нецелого λ эта формула имеется у Г. Сегё ([2]). Пользуясь равномерной сходимостью по λ ряда в (9), можно доказать формулу (9) для натурального $\lambda = k$, причем $f_{\nu n}^{(k)} = 0$, если $\nu \geqslant k$. С помощью представления (9) выражение для остатка $R_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(f, 1) = R_n^{(\lambda)}$ при любых $\lambda > 0$ приводится к виду

$$R_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} \left\{ \int_0^{2\pi} f(\cos\psi) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu n}^{(\lambda)} \left[\cos(n+2\nu+1)\psi + \right.\right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{\lambda}{n+\nu+1+\lambda}\right) \cos(n+2\nu+2)\psi \right] d\psi -$$
$$\left. - \int_0^{2\pi} f(\cos\psi) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu n}^{(\lambda)} \frac{2\lambda}{n+\nu+1+\lambda} \frac{\sin(n+2\nu+3/2)\psi}{2\sin\psi/2} d\psi \right\}, \tag{10}$$

где $a_n^{(\lambda)} = \Gamma(n+2\lambda+1)\,[2^{2\lambda}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)\,\Gamma(n+\lambda+1)]^{-1}$.

Применение r-кратного интегрирования по частям и преобразования Абеля в первом интеграле из (10), а также применение оценки Джексона ([4]) для n-го остатка ряда Фурье 2π-периодической дифференцируемой функции при оценке второго интеграла из (10) позволяет привести выражение (10) к виду

$$R_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} \left\{ \frac{(-1)^r 2^{\lambda+1}}{(n+1)^r} \int_0^{\pi} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}+\lambda\right)\psi + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2}\right] \times \right.$$
$$\left. \times \cos\frac{\psi}{2} \sin^{r+\lambda-1}\psi \cdot f^{(r)}(\cos\psi)\, d\psi + I_3 \right\}, \tag{11}$$

где

$$I_3 = O\left(\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^{r+\gamma+1}}\right), \quad \text{если } \lambda \geqslant 1;$$
$$I_3 = O\left(\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^{r+\gamma+\varepsilon}}\right), \quad \text{если } 0 < \varepsilon < \lambda < 1.$$

Из (11) и того, что

$$\sup_{\varphi(x) \in H^{(\gamma)}} \left| \int_0^{\pi} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}+\lambda\right)\psi + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2}\right] \cos\frac{\psi}{2} \sin^{r+\lambda-1}\psi \cdot \varphi(\cos\psi)\, d\psi \right|$$

имеет порядок $n^{-\gamma}$, и следует справедливость теоремы 2. Указанный порядок достигается на функции $v_n(x) \in H^{(\gamma)}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, определяемой формулой

$$v_n(x) = \frac{1}{2} u_n(x) \operatorname{sign}\left\{\cos\left[(n+\frac{1}{2}+\lambda)\arccos x + \frac{(r+1-\lambda)\pi}{2}\right]\right\},$$

где $u_n(x) = (x-a)^{\gamma}$ при $x \in [a, (a+b)/2]$ и $u_n(x) = (b-x)^{\gamma}$ при $x \in [(a+b)/2, b]$, а $[a, b]$ — любая из частей, на которые сегмент

$[-1, 1]$ делится нулями функции

$$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}+\lambda\right)\arccos x+\frac{(r+1-\lambda)\pi}{2}\right].$$

Заметим, что в случае, когда $\alpha=\beta$ — целое число, неравенство (1) следует из полученной И. К. Даугаветом ([6]) оценки функции Лебега ряда Фурье — Якоби.

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. [2] Г. Сегё, Ортогональные многочлены, М., 1962. [3] С. Н. Бернштейн, О многочленах, ортогональных на конечном отрезке, Соч., 2, Изд. АН СССР, 1954, стр. 7. [4] D. Jackson, The Theory of Approximation, N. Y., 1930. [5] П. К. Суетин, ДАН, 158, № 6, 1275 (1964). [6] И. К. Даугавет, Сибирск. матем. журн., 6, № 1, 70 (1965).