С. А. Нефедов, Ф. А. Шолохович, Критерий ε-управляемости линейной системы,
Дифференц. уравнения, 1976, том 12, номер 4, 653–657

https://www.mathnet.ru/de2725

АПРЕЛЬ 1976 г., ТОМ XII, № 4

УДК 517.934 : 62.50

КРИТЕРИЙ ε-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

С. А. НЕФЕДОВ, Ф. А. ШОЛОХОВИЧ

В банаховом пространстве E рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dp}{dt}=Ap+b(t)u+c(t). \qquad (1)$$

В этом уравнении $p\in E$, A — замкнутый линейный оператор, порождающий полугруппу $\{f(t)\}$, $t\geqslant 0$, класса C_0 линейных ограниченных операторов из E в E, $b(t)$ и $c(t)$ — непрерывные вектор-функции со значениями в E. Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением конечного промежутка $[0, T]$, $T>0$, изменения t. Функция $u(t)\in L_1[0, T]$ называется управлением. Решение $\Phi(t, p, u)$ уравнения (1) можно записать по формуле Коши

$$\Phi(t, p, u)=f(t)p+\int_0^t f(t-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau+\int_0^t f(t-\tau)c(\tau)d\tau. \qquad (2)$$

Точку p называют $TM-\varepsilon$ управляемой в точку q $(T>0,\ M>0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое управление $u(t)\in L_1[0, T]$, $\|u\|_{L_1}\leqslant M$, что $\|\Phi(T, p, u)-q\|_E<\varepsilon$. При $M=\infty$ опускается буква M и применяется термин «$T-\varepsilon$-управляемость» или ε-управляемость за время T точки p в точку q.

Динамическая система (2) называется $T-\varepsilon$-управляемой, если для любых $p, q\in E$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое управление $u(t)$, что $\|\Phi(T, p, u)-q\|<\varepsilon$. Она называется $T-\varepsilon$-управляемой в нуль, если для любых $p\in E$ и $\varepsilon>0$ существует управление $u(t)$, обеспечивающее выполнение неравенства $\|\Phi(T, p, u)\|<\varepsilon$.

Понятие ε-управляемости (из начала координат в произвольную точку), введенное в [1] под названием «полной управляемости», изучалось в работе [2] для случая самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Термин «ε-управляемость» появился в [3], где сформулировано необходимое и достаточное условие ε-управляемости в нуль для системы $\dfrac{dp}{dt}=Ap+bu$ с ограниченным оператором A в банаховом пространстве и постоянным b. В [4] упомянутая теорема А. Б. Куржанского обобщена: рассмотрен случай неограниченного оператора A при выполнении некоторых добавочных условий (см. следствие 4).

Мы введем новые условия ε-управляемости для более широкого класса уравнений. Из теоремы, доказанной в настоящей работе, вытекают как следствия теоремы об ε-управляемости из [3] и [4].

Лемма. *Пусть $K[0, T]$ — линейное многообразие, плотное в пространстве $L_1[0, T]$. Если точка p $TM-\varepsilon$-управляема в точку q над $L_1[0, T]$, то она $TM-\varepsilon$-управляема в точку q и над $K[0, T]$.*

Утверждение очевидно, так как $\Phi(t, p, u)$ непрерывно зависит от u: из $\|u-u_0\|_{L_1}\to 0$ следует $\|\Phi(t, p, u)-\Phi(t, p, u_0)\|_E\to 0$.

Символом $\Pi_M(\Gamma)$, где $M>0$, а $\Gamma=\{\gamma\}$ — произвольное множество из E, обозначим замыкание множества всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\gamma_i$ (где $\gamma_i\in\Gamma$, а натуральное N произвольно), для которых $\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|\leqslant M$. Наименьшее линейное подпространство, содержащее Γ, обозначим $\Pi(\Gamma)$.

Теорема. *Точка p TM—ε-управляема в точку q в силу уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполняется включение*

$$f(T)p-q+\int_0^T f(T-\tau)c(\tau)d\tau\in\Pi_M\{f(T-\tau)b(\tau);\quad 0\leqslant\tau\leqslant T\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим $r=f(T)p-q+\int_0^T f(T-\tau)c(\tau)d\tau$. По условию и по лемме существует непрерывная функция $u(t)$, $\|u\|_{L_1}\leqslant M$, и $\|\Phi(T, p, u)-q\|_E<\frac{\varepsilon}{2}$ или $\left\|r+\int_0^T f(T-\tau)\times b(\tau)u(\tau)d\tau\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Каждому разбиению $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N=T$ отрезка $[0, T]$ сопоставим такой набор чисел $\{\theta_i\}_{i=0}^{N-1}$, $\tau_i\leqslant\theta_i\leqslant\tau_{i+1}$, чтобы сумма $\sum_{i=0}^{N-1}|u(\theta_i)|\Delta\tau_i$ являлась нижней суммой Дарбу интеграла $\int_0^T|u(\tau)|d\tau$. В силу непрерывности подынтегральной функции можно понимать интеграл $\int_0^T f(T-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau$ в смысле Римана и подобрать такое разбиение $\{\tau_i\}_{i=0}^{N-1}$ отрезка $[0, T]$, чтобы было

$$\left\|\sum_{i=0}^{N-1}f(T-\theta_i)b(\theta_i)u(\theta_i)\Delta\tau_i-\int_0^T f(T-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\left\|r+\sum_{i=0}^{N-1}f(T-\theta_i)b(\theta_i)u(\theta_i)\Delta\tau_i\right\|\leqslant\left\|r+\int_0^T f(T-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau\right\|+\left\|\sum_{i=0}^{N-1}f(T-\theta_i)b(\theta_i)u(\theta_i)\Delta\tau_i-\int_0^T f(T-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau\right\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Можно переписать это неравенство так:

$$\left\| r - \sum_{i=0}^{N-1} f(T-\theta_i)\, b(\theta_i)\, [-u(\theta_i)\Delta\tau_i] \right\| < \varepsilon.$$

Вместе с тем

$$\sum_{i=0}^{N-1} |-u(\theta_i)\Delta\tau_i| \leqslant \int_0^T |u(\tau)|\, d\tau \leqslant M.$$

Итак, $r \in \Pi_M\{f(T-\tau)\, b(\tau);\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$.

Достаточность. Пусть $r \in \Pi_M\{f(T-\tau)\, b(\tau);\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$. Тогда существуют такие числа N, λ_n, t_n, что $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leqslant T$, $\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \leqslant M$ и

$$\left\| r - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f(T-t_n)\, b(t_n) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Не умаляя общности, будем считать далее $N \geqslant 2$, $\lambda_n \neq 0$. Введем функцию $\psi(\tau, \alpha, \beta)$, $\tau \geqslant 0$; $0 \leqslant \alpha < \beta$,

$$\psi(\tau, \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{при } \tau \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{при } \tau \overline{\in} [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Положим $\alpha_n = t_n$ при $n = 1, 2, \ldots, N-1$ и $\beta_N = t_N$. Можно подобрать β_n $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ и α_N так, чтобы выполнялись неравенства $(n = 1, 2, \ldots, N)$

$$\left\| \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(T-\tau)\, b(\tau)\, d\tau - f(T-t_n)\, b(t_n) \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda_n| N}$$

(см. [5], стр. 102, (3.8.5)) и $[\alpha_n, \beta_n] \subset [0, T]$. Эти неравенства допускают вид

$$\left\| \int_0^T f(T-\tau)\, b(\tau)\, \psi(\tau, \alpha_n, \beta_n)\, d\tau - f(T-t_n)\, b(t_n) \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda_n| N}.$$

Пусть $u(\tau) = -\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \psi(\tau, \alpha_n, \beta_n)$. Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f(T-t_n)\, b(t_n) + \int_0^T f(T-\tau)\, b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left[f(T-t_n)\, b(t_n) - \int_0^T f(T-\tau)\, b(\tau)\, \psi(\tau, \alpha_n, \beta_n)\, d\tau \right] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \frac{\varepsilon}{2|\lambda_n|N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вместе с неравенством (4) получаем

$$\left\| r + \int_0^T f(T-\tau) b(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon, \text{ т. е. } \|\Phi(T, p, u) - q\| < \varepsilon.$$

При этом

$$\|u\|_{L_1} = \int_0^T |u(\tau)| d\tau \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \int_0^T \psi(\tau, \alpha_n, \beta_n) d\tau = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \leqslant M.$$

Построенное при доказательстве достаточности управление $u(t)$ разрывно. Учитывая, однако, что $\overline{C[0, T]} = L_1[0, T]$, можно с помощью леммы установить существование непрерывного управления $\bar{u}(t)$ со свойствами

$$\|\bar{u}\|_{L_1} \leqslant M; \quad \|\Phi(T, p, \bar{u}) - q\|_E < \varepsilon.$$

Следствие 1. *Пусть дано уравнение*

$$\frac{dp}{dt} = Ap + bu, \tag{5}$$

причем вектор b постоянный и $q=0$. Тогда условие (3) принимает вид

$$f(T)p \in \Pi_M\{f(\tau)b;\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}.$$

Здесь $\{f(\tau)b\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$ есть конечная дуга траектории точки b в силу уравнения $\frac{dp}{dt} = Ap$.

Следствие 2. *Точка p $T-\varepsilon$-управляема в точку q тогда и только тогда, когда*

$$f(T)p - q + \int_0^T f(T-\tau) c(\tau) d\tau \in \Pi\{f(T-\tau) b(\tau);\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}.$$

В частности, для уравнения (5) в предположениях следствия 1 получаем условие $T-\varepsilon$-управляемости точки p в нуль:

$$f(T)p \in \Pi\{f(\tau)b;\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}.$$

Следствие 3. *Для $T-\varepsilon$-управляемости динамической системы (1) необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\Pi\{f(T-\tau)b(\tau);\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\} = E.$$

Достаточность очевидна, необходимость доказывается легко.

При $c(t) \equiv 0$ необходимым и достаточным условием $T-\varepsilon$-управляемости динамической системы (1) в нуль является равенство

$$\Pi\{f(T-\tau)b(\tau);\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\} = R[f(T)] \tag{6}$$

($R[f(T)]$ — область значений оператора $f(T)$). Следующим следствием является теорема из работы [4].

Следствие 4. *Пусть A — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{f(t)\}$, $t \geqslant 0$, $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Если при $0 \leqslant t < T_1$ ряд*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^nb$ *сходится к* $f(t)b$ *(для чего достаточно условия* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{t^n}{n!}A^nb\right\|=0$*), то система (5)* T*—ε-управляема в нуль для любого* $T\in(0, T_1)$ *тогда и только тогда, когда* $\Pi\{A^kb\}_{k=0}^{\infty}=R[f(T)]$.

На основании (6) можно доказывать равенство $\Pi\{A^kb\}_{k=0}^{\infty}=\Pi\{f(\tau)b;\ 0\leqslant\tau\leqslant T\}$. С одной стороны, $\Pi\{f(\tau)b;\ 0\leqslant\tau\leqslant T\}\subset\Pi\{A^kb\}_{k=0}^{\infty}$, так как $f(t)b=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^nb$ при $t\in[0, T]$, т. е. вся дуга траектории $f(t)b$, $0\leqslant t\leqslant T$ содержится в замыкании линейной оболочки множества $\{A^kb\}_{k=0}^{\infty}$. С другой стороны, справедливо и обратное включение. Рассмотрим функцию $f(t)b=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^nb}{n!}t^n$. Ряд сходится в промежутке $[0, T]$, и по крайней мере в промежутке $[0, T)$ существуют производные $f^{(n)}(t)b$ любого порядка. Обозначим $\Pi\{f(\tau)b;\ 0\leqslant\tau\leqslant T\}=\Pi$. Пусть $t, t_0\in[0, T)$, тогда $f'(t_0)b=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)b-f(t_0)b}{t-t_0}\in\Pi$, и если $f^{(n)}(t)b\in\Pi$, то $f^{(n+1)}(t_0)b=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f^{(n)}(t)b-f^{(n)}(t_0)b}{t-t_0}\in\Pi$. Пользуясь легко проверяемым равенством $f^{(n)}(t)b=f(t)A^nb$, получаем, что $A^nb=f^{(n)}(t)b|_{t=0}$. Таким образом, при любом n $A^nb\in\Pi$, следовательно, $\Pi\{A^kb\}_{k=0}^{\infty}\subset\Pi$.

Литература

1. Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S. Contr. to Diff. Equations, 1, 190—213, 1963.
2. Fattorini H. O. Journal of Differential Equations, 3, 391—402, 1967.
3. Куржанский А. Б. Дифференц. уравнения, 5, № 9, 1969.
4. Шолохович Ф. А. Дифференц. уравнения, 8, № 2, 1972.
5. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию
7 мая 1974 г.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького