# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ

*Х. Цишанг, А. В. Чернавский*

Этот обзор является продолжением [12] (стр. 168—172). Ссылки на список литературы в [12] делаются здесь следующим образом: [10; 1962]. Определения терминов, данные в [12], здесь не повторяются.

## I. Непрерывная топология многообразий

### § 1. Характеризация сферы

Характеризация сферы любой размерности была предложена Харрольдом [135] (ср., также [173; 1962]) на основе работы Бинга [12; 1962], а также Дикманом, Рубиным и Суинглом [83, 84]. Обе эти характеристики подчеркивают некоторые существенные свойства сферы, но их нельзя считать окончательным решением классической задачи: в первой требуется наличие последовательности подразделений, копирующих барицентрические подразделения и она не слишком удаляется от спектральной характеристики, данной П. С. Александровым («О понятии пространства в топологии», Успехи матем. наук, 1947, 2 : 1); во второй участвует декартово произведение, что также вряд ли может считаться удовлетворительным.

### § 2. Гомеоморфизмы

**1. Стабильные гомеоморфизмы и стабильные структуры [15—17, 47—49, 72, 73, 116—121].** а) Вышло полное изложение [47—49] теории устойчивых структур на многообразиях (см. [12], стр. 166). В работе [73] Коннелл строит препятствие для существования стабильной структуры на многообразии и доказывает, в частности, что если $H_1(M)=0$, то $M\times E^k$ допускает стабильную структуру, если $k$ достаточно велико. Используя свои результаты о вложениях (см. § 3, п. 2а), Глюк [118] доказал однородность ряда многообразий по отношению к локально плоским клеткам (что влечет единственность их стабильной структуры): если $k\leqslant\frac{n}{2}-1$, $P$ — связный $k$-мерный полиэдр в $n$-сфере $S^n$, $N$ — внутренность регулярной окрестности полиэдра $P$ и $M$ — ее край, то $S\setminus P$, $N$, $M\times E'$ и $M\times S'$ однородны. Отсюда вытекает, что однородно $S^n\times E^k$ и т. д. Коннелл [71] доказал, что стабильные гомеоморфизмы $E^n$, $n\geqslant 7$, аппроксимируются кусочно-линейными.

б) А. В. Чернавский [16, 17] называет гомеоморфизм $E^n$ $k$-стабильным, если он есть суперпозиция двух гомеоморфизмов: стабильного и тождественного на $k$-мерной гиперплоскости. Доказательство того, что произвольный гомеоморфизм $k$-стабилен, сводится в общем случае к следующей лемме. Пусть в $E^n$ дана гиперплоскость $T^{k-1}$ и пусть $E^n_+$ — замкнутое полупространство, на крае которого лежит $T$. Пусть $\Delta^k$ — симплекс в $E^n_+$, основание которого лежит в $T$. Если $q$ — гомеоморфизм, тождественный на $T$, то существует гомеоморфизм $h$, тождественный вне ограниченной окрестности $\Delta$ и на $T$ и такой, что $hq(\operatorname{Int} E^n_+\cup T)\supset\Delta$. Эта лемма доказана в [17] при $k<\frac{2}{3}n-1$. Имеются и другие редукции вопроса о стабильности гомеоморфизмов (см., например, Грейтхауз [120—121]). См. также сноску на стр. 224.

**2. Группы преобразований** [**36, 79, 110, 152, 164, 170, 185, 204, 237, 253, 262**]. а) Нестандартные действия. Палейс и Ричардсон [237], используя примеры Макмиллана стягиваемых открытых многообразий $M^3_\alpha$ [183; 1962], для которых $M^3_\alpha\times\times E^3\approx E^6$, строят для любой компактной группы Ли, представленной в $O(n)$, несчетное число неэквивалентных даже топологически действий на $E^{n+3}$ с $M^3_\alpha$ в качестве множества неподвижных точек. Кван [170] описал инволюцию $n$-клетки, $n\geqslant 4$, пространство орбит которой и множество неподвижных точек являются соответственно $n$-клеткой и $(n-2)$-клеткой, а действие не эквивалентно стандартному. О способе Розена построения нестандартных инволюций [253] сказано в [12] (стр. 168). Кистер [164] усовершенствовал построенные им ранее [171; 1962] примеры и получил для любого натурального $k$, отличного от степени простого числа, периодическое преобразование пространства $E^n$, $n \geqslant 7$, периода $k$ без неподвижных точек. Кёртис и Кван [79] показали, что имеется несчетное множество инволюций пространства $E^n$, множества неподвижных точек которых различаются фундаментальной группой. Берется бесконечная связная сумма $M^n$ псевдоклеток (см. II § 2 п. 3) и умножается на отрезок. Край произведения гомеоморфен $E^n$ и в то же время удвоению $M^n$. Множеством неподвижных точек служит $\dot{M}^n$.

б) В связи с теоремой Смита о том, что периодические преобразования 3-сферы неподвижны на сфере меньшей размерности, возникает задача об изучении вложения этой сферы. Вопрос о «дикости» этого вложения в известном смысле до конца разрешен Бингом [36]. Он показывает, что существует инволюция с неподвижной 2-сферой, множество точек дикости у которой есть наперед заданное совершенное множество. Для любого $k$ существует преобразование 3-сферы периода $k$ с неподвижной 1-сферой и заданным совершенным множеством точек дикости. Ливсей [185] доказал, исправляя ошибку в работе Смейла и Хирша [70; 1962], что любые две инволюции с двумя неподвижными точками эквивалентны. Бинг показывает, что для любого $k > 1$ существует несчетное множество попарно неэквивалентных преобразований сферы $S^3$ периода $2k$, для которых множество неподвижных точек есть 0-сфера. Наконец, Ливсеем [87; 1962] было доказано, что все инволюции без неподвижных точек эквивалентны. Бинг для любого $k$, отличного от степени простого числа, строит несчетно много неэквивалентных преобразований сферы $S^3$ периода $k$ без неподвижных точек. (Отсутствие неподвижных точек не исключает стационарных, т. е. неподвижных для подгрупп).

в) О проблеме Смита см. [12] (стр. 168). Мойз [92; 1962] показал, что если неподвижный контур незаузлен в $S^3$, а гомеоморфизм симплициален, то действие эквивалентно ортогональному (см. также [262]). При $n \geqslant 5$ Джиффен [110], используя технику Зимана [292], построил примеры гладкого действия группы $Z_p$ на $S^n$, не эквивалентного ортогональному. Сян [152] рассматривал гладкие действия окружности на $S^n$ с $S^{n-2}$ в качестве множества неподвижных точек и показал, что дополнение к $S^{n-2}$ должно иметь гомотопический тип окружности, что, в частности, показывает неосуществимость идеи Мазура [179; 1962], (см. [204] и [292]). Это влечет за собой незаузленность $S^{n-2}$ в $S^n$ (см. II, § 3, п. 2а). Более того, Сян показал, что гладкое действие группы $S^1$ на $S^n$ эквивалентно ортогональному тогда и только тогда, когда множество неподвижных точек есть $(n-2)$-сфера ($n > 5$). При $n \geqslant 5$ любое такое действие может быть получено следующим образом: если взять псевдоклетку $M^{n-1}$, то $M^{n-1}\times I^2=I^{n+1}$ (см. II, § 2, п. 2) и на крае $M^{n-1}\times I^2$ возникает естественное действие группы $S^1$ с $\dot{M}^{n-1}$ в качестве множества неподвижных точек.

Зиман обобщил в [292] известную конструкцию Артина для получения заузленных сфер. Будем вращать в $S^{n+1}$ полусферу $S^n_+$ вокруг ее границы $S^{n-1}$, $S^{n-1}\subset S^n\subset S^{n+1}$, и одновременно поворачивать $S^n_+$ вокруг $(n-2)$-клетки, край которой $S^{n-3}$ лежит в $S^{n-1}$. Тогда любая заузленная в $S^n_+$ клетка, край которой есть $S^{n-3}$, опишет в $S^{n+1}$ заузленную $(n-1)$-сферу. Группа $S^1$ действует очевидным образом на $S^{n+1}$ и оставляет инвариантными эти заузленные сферы. (В применении к трехмерным узлам с помощью этой конструкции легко показывается, что каждый узел на торе является стационарным при некотором действии $S^1$, а также $Z_p$).

**3.** В. А. Рохлин, используя доказанную С. П. Новиковым инвариантность некоторых классов Понтрягина, доказал, что имеются диффеоморфизмы многообразия $S^2\times S^3$, которые гомотопны, но топологически не изотопны [3]. Как известно, полностью этот вопрос решен только для двумерных многообразий.

**4. Разные результаты.** а) Уиттекер [280] доказал, что из изоморфизма групп гомеоморфизмов многообразий вытекает их гомеоморфность. б) Керекьярто, Шпернер и Терасака в разное время предложили условия, характеризующие топологически параллельные переносы на плоскости. Киносита [163] показал, что эти условия эквивалентны в общем случае, но уже в $E^3$ выделяют более широкий класс гомеоморфизмов. в) О группах гомеоморфизмов двумерных многообразий см. III. § 1, п. 6.

## § 3. Вложения

**1. Сферы и симплексы** [**3, 4, 6, 15—17, 114, 157, 160, 221, 257, 265**]. а) Работа Столлингса [265] (см. [12], стр. 162). Столлингс доказывает незаузленность топологических локально плоских вложений $S^k$ в $S^n$ при $k<n-2$ и при $k=n-2$ в случае, когда дополнение имеет гомотопический тип окружности. Выключая точку, он приходит к рассмотрению локально плоской пары $(E^n, \mathfrak{E}^k)$. Пусть $(V, U)$ — пара окрестностей точки $x\in\mathfrak{E}^k$ в $E^n$ и в $\mathfrak{E}^k$, гомеоморфная паре $(E^n, E^k)$. Используя локальную плоскостность $\mathfrak{E}^k$ в $E^n$, легко построить гомеоморфизм $(V, U)$ на $(W, \mathfrak{E}^k)$, где $W$ — окрестность $\mathfrak{E}^k$ в $E^n$. Далее $W$ «растягивается» при неподвижном $\mathfrak{E}^k$ на все $E^n$. Это делается с помощью леммы о поглощении (поэтому требует-

ся, чтобы $n \geqslant 5$, [223; 1962]). При $k < n-2$ для этого нет гомотопических препятствий и построение может быть проведено; при $k = n-2$ это возможно в том и только в том случае, когда дополнение имеет гомотопический тип окружности (может быть стянуто в $W$ при неподвижном $\mathfrak{S}^k$). Незаузленность $\mathfrak{S}^k$ в $E^n$ следует из гомеоморфизмов: $(E^n, E^k) \approx \approx (V, U) \approx (W, \mathfrak{S}^k) \approx (E^n, \mathfrak{S}^k)$. Построение может быть также проведено и в случае $k = n-1$, но здесь теорема совпадает с обобщенной теоремой Шёнфлиса, которая была доказана без ограничений для всех размерностей ([12], стр. 162). При $k = = n-2$ в доказательстве требуется еще односвязность в бесконечности пары $(E^n, \mathfrak{S}^k)$, которое автоматически выполнено, если эта пара получена из пары $(S^n, S^k)$. Столлингс построил также пример, приведенный Кервером в [160], из которого следует, что при $k = n-2$, $n > 4$, условие гомотопической эквивалентности дополнения окружности не может быть заменено на условие, что фундаментальная группа дополнения циклическая (см. также [145]). Отметим уточнение результата Столлингса, полезное в некоторых случаях. Гомеоморфизмы $(V, U) \approx (W, \mathfrak{S}^k)$ и $(W, \mathfrak{S}^k) \approx (E^n, \mathfrak{S}^k)$, указанные выше, можно построить так, чтобы некоторая окрестность одной точки из $\mathfrak{S}^k$ осталась неподвижной. Отсюда следует, что если вложение $\mathfrak{S}^k \subset E^n$ линейно в окрестности некоторой точки, то можно построить гомеоморфизм $(E^n, \mathfrak{S}^k)$ на $(E^n, E^k)$, линейный в окрестности этой точки в $E^n$.

б) С. П. Новиков [4] указал топологический смысл факта существования гладких узлов в коразмерностях больших 2 (см. [12], стр. 141). Если рассматривать классы вложений $S^k \times E^{n-k}$ в $E^n$ относительно гомеоморфизмов $E^n$, сохраняющих послойную структуру в окрестности $S^k \times 0$, то вложения Хефлигера $S^{4k-1} \times E^3 \subset S^{4k+2}$, $k \geqslant 1$, различаются классом Понтрягина $p_k$ многообразия, полученного из $S^{4k+2}$ соответствующей перестройкой Морса, и неэквивалентны, в силу топологической инвариантности $p_k$ [3,4], как топологические узлы с учетом микропучка.

в) Легко показывается, что локально плоское вложение симплекса топологически эквивалентно стандартному. Из сделанного в п. а) замечания к доказательству Столлингса видно, что если сфера содержит прямой симплекс и незаузлена, то она стабильно незаузлена. Из сказанного и из п. 1б вытекает, что при $k < \frac{2}{3}n - 1$ локально плоская $k$-сфера в $S^n$ стабильно незаузлена. Рой [257] заявил, что это верно и при $k = \frac{2}{3}n - 1$. (См. сноску на стр. 224.)

г) А. Б. Сосинский [6] рассматривает вложения ($n$—2)-сфер в $S^n$ с точностью до стабильного гомеоморфизма и при этом требует, чтобы сферы содержали симплексы, стабильно эквивалентные прямым. Это ограничение позволяет определить операцию связной суммы и доказать разложимость каждого узла на простые слагаемые. При этом используется аддитивность минимального числа образующих фундаментальной группы дополнения и также аддитивность минимального числа модульных образующих первой нетривиальной гомотопической группы в случае, когда фундаментальные группы слагаемых являются циклическими. Отметим, что недавно С. П. Новиков [4] доказал, что каждая локально плоская сфера $S^{n-2}$ в $S^n$ топологически эквивалентна сфере, вложенной гладко в некоторой гладкости $S^{n-2}$, $n \geqslant 7$.

д) Хюбш и Морз [157, 221] распространили обобщенную теорему Шёнфлиса на случай вложения, зависящего от параметра.

**2. Вложение полиэдров и многообразий** [**6, 15, 17 — 19, 40, 41, 57 — 64, 114, 116 — 117, 119, 136, 146, 193, 195, 211, 256, 266**]. а) Критерии ручного вложения. Несколько статей основаны на статье Хоммы [146]. В них рассматриваются топологические вложения $k$-мерных полиэдров в $E^n$ при $k \leqslant \frac{n}{2} - 1$. Теорема Хоммы была усилена Глюком, который придал ей формальную общность [114, 117] и вывел из нее ряд следствий. Аналогичные результаты получены Грейтхаузом [119]. В «метастабильных» размерностях, т. е. при $k < \frac{2}{3}n - 1$, аналогичные результаты получены А. В. Чернавским [18]. В этой работе вложение полиэдра называется правильным, если каждый симплекс некоторой триангуляции вложен локально плоско (в отличие от работы Глюка [117] кусочно-линейная структура полиэдра фиксируется). Основной результат: правильное вложение может быть переведено в кусочно-линейное вложение $\varepsilon$-изотопией объемлющего пространства. Доказательство опирается на сформулированную в § 2 п. 1 б) лемму. *)

---

*) Хомма в своих лекциях, прочитанных осенью 1965 г. в университете Флориды, доказал, что вложение $k$-мерного кусочно-линейного многообразия в $n$-мерное кусочно-линейное многообразие может быть при $k \leqslant n-3$ аппроксимировано кусочно-линейным вложением. Из этого и из теоремы об объединении локально плоских клеток (см. п. в)) легко вывести, что локально плоские вложения $k$-симплексов и сфер в $E^n$ стабильно эквивалентны стандартным при $k \leqslant n-3$ и, следовательно, что каждый гомеоморфизм $E^n$ $k$-стабилен при $k \leqslant n-3$ (РЖ Мат 1967 2А330)

б) Метод Кли [82; 1962] «выправления» клетки, лежащей в гиперплоскости, был значительно развит в статье Бинга и Кистера [40]. Они показали, что при $k+2 \leqslant n$ любое топологическое вложение $k$-мерного полиэдра в $E^n$ является ручным в $E^{n+k}$. Заметим, что до сих пор неизвестно ни одного примера вложения полиэдра в гиперплоскость, которое не было бы ручным в пространстве. Милнор [211], также используя метод Кли, показывает, что пространство вложений окружности в $E^n$, $n>3$, содержит плотное множество типа $G_\delta$ локально плоских вложений. При $k=3$, наоборот, «большинство узлов дики» — имеется плотное $G_\delta$-множество, состоящее из диких вложений.

в) Теорема об объединении локально плоских клеток и изолированные особые точки вложений. А. В. Чернавский [19] доказал, что если в $E^n$ даны две локально плоские $k$-мерные клетки, пересечение которых есть $(k-1)$-мерная клетка, локально плоско вложенная в край каждой из данных клеток, или же есть общий край этих клеток, то тогда объединение будет локально плоской клеткой или, соответственно, локально плоской сферой при $k \neq n-2$ и $n \geqslant 5$. Для $k=n-2$ дан гомотопический критерий. Из этого результата вытекает, что вложение $k$-мерного многообразия в $E^n$ не имеет при $k \neq n-2$, $n \geqslant 5$, изолированных точек, в которых вложение не локально плоско. Если $n \geqslant 4$, то вложение не может иметь изолированных особых точек на крае многообразия. (Для $n=3$ оба утверждения неверны). Случай $n=4$, $k=1$ см. Кантрелл [61]. О случае $n=4$, $k=3$ известно только, что не может быть одной особой точки при вложении сферы [60, 266]. Отдельные результаты по этому вопросу были получены ранее разными авторами [57 — 64, 136, 193, 256]. А. Б. Сосинский [6] рассматривает случай $k=n-2$, $n \geqslant 4$. Он вводит понятие бесконечной связной суммы $(n-2)$-сфер в $S^n$, которая также является сферой, локально плоской всюду, за исключением, возможно, одной предельной точки, и показывает, что предельная точка является особой тогда и только тогда, когда бесконечно много слагаемых заузлено в $S^n$. Вместе с этим Сосинский получил примеры $(n-2)$-клеток в $S^n$ с одной особой точкой, которые являются объединениями локально плоских клеток.

г) Окончательный критерий ручного вложения нульмерного компакта в $E^n$ дал при $n \geqslant 5$ Макмиллан [195]. Он совпадает с критерием, данным при $n=3$ Бингом: дополнение должно быть равномерно односвязным. (Еще не построено ни одного примера дикого нульмерного компакта в

$E^n$ при $n > 3$ с тривиальной фундаментальной группой дополнения).

**3. Вложения в $E^3$ [20, 30—35, 38, 39, 52, 53, 57, 66, 88, 103, 111—113, 139, 140, 184, 196, 197, 244, 284].** См. популярные изложения Бинга [31, 34]. а) Дуги. Новые критерии ручного вложения дуг дали Бинг и Киркор [39] и Гиллман [113], который одновременно построил дугу, лежащую на диске и ни в одной точке не прокалывающую никакого диска. См. также [20, 244]. б) Сферы. Даны два новых критерия ручного вложения. Критерий Бёрджеса [53]: в произвольной окрестности произвольной точки сферы можно найти с каждой стороны диск, пересекающийся с ней только своим краем. Критерий Хемпела [140]: сфера непрерывно деформируется в каждую сторону так, что ее образ пересекается с ней только в начальный момент. Хемпел показывает также, что если существует отображение пространства на себя, гомеоморфное на ручном многообразии, образ которого не пересекается с образом дополнения, то образ также ручной. В работе [139] Хемпел показал, что если поверхность локально плоская в точках края, то она лежит на замкнутой поверхности. Мартин [197] дает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы диск лежал на сфере. См. также [30]. О различных свойствах диких сфер см. [103, 111] и также [12; 1962] (стр. 164 п. в); [35, 284] и также [12] (стр. 164 п. 2); [52, 113, 195]. в) Комплексы. Дойл [88] дал полное изложение своих результатов (см. [12] (стр. 163) и [48; 1962]. г) Сморчки. Лайнингер [184] подробно рассмотрел свойства сморчков, (т. е. замкнутых компонент дополнения к дикой сфере). В частности, он показал, что каждый сморчок получается из обычного куба при точечном отображении (см. [12], стр. 169) $f$ таком, что $f^{-1}$ гомеоморфно на внутренности сморчка, и рассмотрел вопрос о том, когда склеивание двух сморчков по краю дает 3-сферу. См. также [66]. д) Бинг [33] дал новое упрощенное доказательство своей аппроксимационной теоремы (см. [12], стр. 164) с некоторым усилением (см. также [38]). Гиллман [111] также дал усиление этой теоремы, которое позволило доказать, что 2-сфера прокалываема ручными дугами в тех и только тех точках, которые лежат на ручных дугах в самой сфере (см. также [32]).

**4. Бесконечные повторения и окрестности [4, 98, 99, 165, 166, 172, 174, 205, 212, 266].** а) При доказательстве большого числа различных результатов, начиная с обобщенной теоремы Шёнфлиса [89 и 31; 1962], использовался метод, названный Мазуром методом бесконечных повторений и изложенный им в формализованном виде в [205]. Здесь объединены результаты, доказанные разными авторами: открытые звезды в триангулированном многообразии гомеоморфны $E^n$ [90, 32; 1962], более общая теорема о конусе [32; 1962], [172], самая общая теорема о цилиндре отображения [174] и пр. В частности, в [174] Кван и Рэймонд доказали топологическую независимость регулярной окрестности подполиэдра в полиэдре от кусочно линейной структуры пары, а также гомеоморфность пространств касательных расслоений топологического многообразия при разных гладких структурах. Методом бесконечных повторений доказываются также и результаты о топологических вложениях полиэдров (п. 2а)). В [266] Столлингс дает разнообразные примеры использования этого метода. б) Работа Мазура [205] посвящена в основном формальному обобщению понятия естественной окрестности, каковыми являются трубчатая окрестность гладкого многообразия, регулярная окрестность подполиэдра и т. п. В литературе имеются и другие подходы к обобщениям такого рода (ср. также, II, § 2, п. 3). В частности, одна из интересных задач заключается в выяснении вопроса о существовании нормального микропучка [212] локально плоского многообразия. Согласно работе Кистера [166] (см. также Мазур [205], стр. 218—219), она сводится к вопросу о существовании окрестности, являющейся пространством расслоения с группой всех гомеоморфизмов $E^n \setminus 0$ в качестве структурной группы, для которого само многообразие является нулевым сечением. Согласно М. Брауну [34; 1962], это всегда верно в коразмерности 1. Из результата Столлингса (см. п. 1а) следует, что, за исключением случая, когда коразмерность равна 2, этот факт верен для вложения $S^h \subset S^n$, $n \neq 4$. Недавно С. П. Новиковым доказано, что локально плоско вложенные сферы в коразмерности 2 также имеют в $S^n$ нормальный микропучок, $n \geqslant 7$, [4]. в) Еще один подход к обобщению понятия нормального расслоения предложен Фэделлом [98—99] параллельно предложенному Нэшем обобщению касательного расслоения. Слой здесь состоит из путей, выходящих из данной точки многообразия и более с ним не пересекающихся. Расслоение локально тривиально, если вложение локально плоско. Это расслоение позволяет, в частности, (посредством изоморфизма Тома) придать геометрический смысл вводимым формально двойственным классам Штифеля—Уитни.

## § 4. Непрерывные отображения

**1. Декартовы сомножители пространства $E^n$ и куба $I^n$ [25, 80, 86, 89, 162, 169, 171, 173, 175, 176].** Куртис и Макмиллан [80] высказали предположение, что произведение двух евклидовых пространств, в каждом из которых стянуто в точку по дуге, есть евклидово пространство. Это доказано Кваном [169, 171].

Далее Кван и Рэймонд в [173] и окончательно в добавлении к [176] доказали, что произведение двух кубов, каждый размерности не меньше 2, внутри каждого из которых стянута в точку дуга, является кубом. Таким образом, уже $E^6$ и $I^6$ представляются произведением двух немногообразий. О произведениях см. также [86, 89, 162]. Эндрюс и Рубин [25] рассматривают непрерывные разбиения $E^n$ более общего вида, также приводящие к сомножителям $E^n$. Сфера не является произведением, так как каждый сомножитель и, значит, сфера, были бы стягиваемыми. Кван и Рэймонд показали, что среди всех комбинаторных многообразий только сфера и куб являются соединениями (join) двух пространств [175].

**2. Клеточные множества и отображения [1, 26, 80, 87, 102, 194, 209, 210, 245, 267]** (см. также [12], стр. 168—169). а) Клеточные подмножества. Макмиллан [194] дал критерий клеточности вложения континуума в комбинаторное многообразие: если $A$ — абсолютный ретракт и $n \geqslant 5$, то вложение $A$ в комбинаторное $n$-мерное многообразие $M^n$ клеточно тогда и только тогда, когда каждая его окрестность $U$ содержит окрестность $V$ такую, что любой замкнутый контур в $V \setminus A$ стягивается в точку в $U \setminus A$. Доказательство опирается на лемму о поглощении Столлингса. Заметим, что если $M = S^n$, то условие, чтобы $A$ был $AR$, лишнее: достаточно показать, что дополнение гомеоморфно $E^n$, а здесь можно использовать критерий Столлингса [223; 1962] (см. [12], стр. 168 и 178), а в случае $n=3$ нужно воспользоваться критерием Эдвардса (см. II, § 3, п. 4 г). Из своего критерия Макмиллан получил ряд интересных следствий: равномерно односвязная компонента дополнения к $S^{n-1}$ в $S^n$ гомеоморфна $E^n$ ($n \neq 4$); любая дуга, лежащая в клеточной дуге в $E^n$ ($n \neq 4$), клеточна; компактный абсолютный ретракт, вложенный в гиперплоскость в $E^n$, клеточен в $E^n$ и др. О клеточных подмножествах пространства $E^3$ см. [87, 267]. М. Штанько недавно показал, что древовидные компакты и только они среди одномерных компактов могут быть вложены в $E^n$ клеточно разделенным образом (см. [12], стр. 163 п. б). Свойство клеточной разделенности в $E^3$ эквивалентно тому, что компакт может быть отделен сферой от каждого одномерного полиэдра (Штанько). б) Точечные отображения. Компаниец [1] дал положительный ответ на вопрос Квана [84, 1962] и доказал, что если дано отображение сферы на себя с не более чем счетным числом неодноточечных прообразов точек $n \neq 4$, то отображение точечно. Вместе с А. В. Чернавским [302] он показал, что при точечных отображениях сферы на себя прообразы клеточных множеств клеточны, откуда следует, что суперпозиция точечных отображений точечна. Точечные отображения изучались также в [26, 102, 209, 210, 245].

**3. Нульмерно открытые отображения.** [7, 13, 14, 71, 137, 148—150, 270]. а) Хеммингсен и Чёрч показывают в [71], что если отображение многообразия на многообразие есть предел равномерно сходящейся последовательности симплициальных открытых отображений, то отображение конечнократно и кратность равна степени. В [137] Хеммингсен рассматривает симплициальные открытые отображения, опираясь на известную формулу Такера и недавно полученную Хопфом [148—150] формулу, связывающую числа Бетти многообразий и множества, где кратность отображения равна 1. б) Локальная степень отображения рассматривалась в ряде работ. А. В. Чернавский заметил, что результаты его статьи [109; 1962] (см. [12], стр. 167) могут быть перенесены на дискретные открытые отображения многообразий [14]. Это позволило, в частности, доказать, что если локальная степень отображения области евклидова пространства всюду определена и всюду отлична от нуля, то она не меняет знака, и решить тем самым старую задачу. Дано также обобщение принципа соответствия границ на отображения положительной локальной степени.

Локальную степень рассматривали также Титус и Юнг [270] и Трохимчук [7]. В обеих работах доказаны близкие результаты о «распространении открытости»: если отображение области $E^n$ в $E^n$ нульмерно и имеет положительную локальную степень вне такого множества $F$, что образ дополнения к $F$ всюду плотен в образе области, то отображение изолировано и открыто (Трохимчук). Трохимчук получил также первый результат о множестве ветвления нульмерно открытого отображения $f$: если множество $B_f$ точек, где $f$ не является локальным гомеоморфизмом, не более чем нульмерно, размерность многообразий не меньше трех и выполнено одно из условий: (1) $f$ открыто, (2) $f$ изолировано, (3) $fB_f$ имеет первую категорию, то выполнены и остальные, и если размерность равна трем, то $B_f$ пусто. В связи с эквивалентностью свойств (1) и (2) поставим такой вопрос. Если в $E^3$ дана бесконечная кривая Менгера и ее открытое нульмерное отображение на $E^3$, то можно ли его продолжить локально гомеоморфно вне кривой?

**4. Другие результаты.** а) О нульмерных отображениях см. Маколи [187, 188]. б) Хэмстром [130] рассматривает монотонные отображения $E^4$ специального вида, для которых образ оказывается гомеоморфным $E^4$. О монотонных ациклических отображениях см. Кван и Реймонд [176]. в) Чёрч [68—70] изучал дифференцируемые отображения многообразий с точки зрения свойства открытости и гомотопических свойств дополнения к множеству ветвления. д) О работе А. Б. Сосинского [6] см. [12], стр. 17.

Примем сокращение $pl$ для слов «кусочно-линейный».

Непрерывная, кусочно-линейная и гладкая топология многообразий все более объединяются в одно целое, которое все труднее поддается препарированию. В настоящем обзоре результаты, относящиеся к гладкой топологии, упоминаются только в тех случаях, когда имеется прямая параллель в $pl$-топологии. Уже вопросы сглаживаемости оставляются в стороне.

## § 1. Гомеоморфизмы [155, 168, 183]

1. Топология группы всех $pl$-гомеоморфизмов $Pl(M^n)$ $pl$-многообразия $M^n$ изучена очень мало. Наиболее естественная компактно-открытая топология даже для компактных многообразий неудобна для некоторых приложений. Для евклидова пространства $E^n$ группа $Pl(n)=Pl(E^n)$ рассматривается в топологии предела прямого спектра групп $Pl_T(n)$, где $Pl_T(n)$ — группа гомеоморфизмов, линейных на каждом симплексе триангуляции $T$ пространства $E^n$ с компактно-открытой топологией, по направленному множеству прямолинейных триангуляций $T$ пространства $E^n$. Неизвестно, будет ли такая топология превращать $Pl(n)$ в топологическую группу*. Во всяком, случае, как показано Кёйпером [168], подпространство гомеоморфизмов, тождественных вне некоторого симплекса, не стягиваемо, вообще говоря, в этой топологии, но стягиваемо, согласно известному рассуждению Александера, в компактно-открытой топологии (см. [155]). Попытки определить аналогичную топологию в группе $Pl(M^n)$ для многообразия делались неоднократно, но при этом допускалась ошибка, разъясненная Зиманом: многообразие в отличие от $E^n$ имеет кусочно линейную, но не имеет линейной структуры и поэтому нельзя требовать, чтобы все близкие гомеоморфизмы были симплициальны в одной и той же триангуляции $M^n$. Вероятно, наиболее разумное обобщение можно предложить, следуя работе Хадсона и Зимана [155]. Для фиксированной триангуляции $T$ обозначим через $Pl_T(M)$ совокупность гомеоморфизмов, которые порождаются элементарными линейными сдвигами (см. ниже п. 2), с компактно-открытой топологией и введем в $Pl(M)$ топологию прямого спектра $Pl_T(M)$. Отметим еще, что Милнор предположил, что в $Pl(M)$ можно естест-

* Кроме $Pl(n)$, рассматривают полусимплициальную группу ростков $pl$-гомеоморфизмов, которая полезна при изучении сглаживаемости, погружений [126] и пр.

венным и единственным образом ввести структуру бесконечного симплициального комплекса; однако, насколько нам известно, эта программа еще не выполнена (см. [2]).

2. **Изотопии.** В [155] Хадсон и Зиман детально рассмотрели возможные определения $pl$-изотопии многообразия $Q$. Они дают три определения изотопности $pl$-гомеоморфизма $h:Q\to Q$ тождественному гомеоморфизму: а) имеется послойный гомеоморфизм $Q\times I$ на $Q\times I$, тождественный на $Q\times 0$ и равный $h\times 1$ на $Q\times 1$; б) (изотопия клеточными сдвигами) $h$ есть суперпозиция конечного числа гомеоморфизмов, каждый из которых имеет носителем $pl$-клетку; (в) (изотопия линейными сдвигами) $h$ есть суперпозиция элементарных гомеоморфизмов, каждый из которых имеет носителем клетку и получается из сдвига барицентра симплекса (при тождественном крае и линейном распространении на остальные точки симплекса) при гомеоморфизме симплекса на эту клетку. Оказывается, что для гомеоморфизма $h$ с компактным носителем условия (а) и (б) эквивалентны. Указанный в п. 1 результат Кёйпера показывает, что можно ожидать, что в общем случае свойства (б) и (в) не эквивалентны. Хадсон и Зиман рассматривают также изотопию вложений компактного многообразия $M^k$ в $Q^n$ (край $M$ переходит в край $Q$, что не является ограничением ввиду более общей теоремы, которая будет опубликована Хадсоном, см. [308]). Два вложения $f$ и $g$ многообразия $M^k$ в $Q^n$ изотопны при изотопии по пространству, если существует послойное $pl$-вложение $M\times I$ в $Q\times I$, равное $f\times 1$ на $M\times 0$ и $g\times 1$ на $M\times 1$. Изотопия называется локально незаузленной, если, во-первых, локально незаузлен образ $M\times I$ в $Q\times I$, а во-вторых, локально незаузлен образ каждого слоя $M\times t$ в $Q\times t$. Показывается, что если имеется локально незаузленная изотопия по пространству $Q$, то она накрывается изотопией $Q$ типа (а) или (б), закрепленной вне окрестности следа $M$. Если $k<n$, то можно построить накрывающую изотопию типа (в). В силу результата Зимана [288] (см. § 3, п. 2а), каждая изотопия локально незаузлена, если $k\leqslant n-3$, и в этом случае она накрывается изотопией любого типа. Ликориш [183] освободился от условия послойности (см. также [308]) и заменил $M$ произвольным полиэдром.

## § 2. Полиэдральные и $pl$-структуры на многообразиях

1. **Техника приклеивания ручек ([44, 45, 93, 161, 206, 242—243, 251, 261, 266]).** За последние годы разработаны два основных подхода к изучению $pl$-многообразий. Первый связан с техникой Смейла «приклеивания ручек», второй основан на

лемме Столлингса о поглощении ([12], стр. 177). Второй подход, идущий от работы [209; 1962] и обязанный своим теперешним состоянием Столлингсу (см. [12], стр. 177), относится к методу бесконечных повторений (см. I, § 3, п. 3) и применим в основном к открытым многообразиям ($n \geqslant 5$). Метод Смейла применим к компактным многообразиям ($n \geqslant 6$), но до последнего времени его применение в $pl$-топологии велось через посредство дифференциальной топологии. Перенесение этой техники в рамки $pl$-топологии требует, во-первых, возможности построения $pl$-аналога функции Морса, а, во-вторых, некоторых конструкций для корректного определения операции подклеивания ручки, изотопий и т. п. $Pl$-формулировка теоремы Морса была предложена Косинским [172; 1962], однако никаких доказательств пока не опубликовано. Вторая часть программы может быть проведена, как следует из статьи Мазура [206] и работы Хадсона и Зимана (см. § 1 п. 2), и поэтому ряд теорем, например, теоремы Мазура об окрестностях (см. ниже п. 3) можно доказывать в рамках $pl$-топологии. В литературе имеются указания на то, что Столлингс доказал также $pl$-вариант теоремы об $h$ (или $s$)-кобордизме (см. ниже). Как выяснил Мазур, в технике Смейла фундаментальную роль играет уайтхедовский простой гомотопический тип, который, по выражению Мазура, как бы сшит по мерке теории Морса — Смейла. В частности, это позволяет отбросить в целом ряде теорем, прежде всего в теореме об $h$-кобордизме, ограничение односвязности. Напомним, что если конечный клеточный комплекс $X$ есть деформационный ретракт комплекса $Y$, то кручение Уайтхеда есть препятствие для перевода $(Y, X)$ в $(X, X)$ посредством конечного числа элементарных операций: приклеивания новой $m$-клетки с помощью отображения $(m-1)$-клетки на ее границе в комплекс $Y$ (элементарное расширение) и обратной операции (элементарное стягивание). Препятствие $\tau(Y, X)$ лежит в так называемой группе Уайтхеда $\mathrm{Wh}(\pi_1 Y)$ фундаментальной группы $\pi_1 Y$. Группа $\mathrm{Wh}(\pi_1 Y)$ получается путем коммутирования и факторизации по образу $\pi_1 Y$ группы $GL(Z(\pi_1 Y)) = \lim\limits_{n \to \infty} GL(n, Z(\pi_1 Y))$, где $GL(n, Z(\pi_1 Y))$ — группа невырожденных матриц порядка $n$ над групповым кольцом $Z(\pi_1 Y)$ группы $\pi_1 Y$; $GL(n, Z(\pi_1 Y))$ считается вложенной естественным образом в $GL(n+1, Z(\pi_1 Y))$. Для отображения $f: X \to Y$, являющегося гомотопической эквивалентностью, можно определить инвариант $\tau(f) = \tau(C_f, X)$, где $C_f$ — цилиндр отображения. Если $\tau(f) = 0$, то говорят, что $f$ устанавливает простую гомотопическую эквивалентность. В частности, если $\mathrm{Wh}(\pi_1 Y) = 0$, то простой гомотопический тип совпадает с обычным. Примеры таких групп: $\pi_1 Y = 1, Z_2, Z_3, Z_4, Z$. Группа $\mathrm{Wh}(Z_5)$ является бесконечной циклической с образующим $t^2 - t + 1$.

Сформулируем теперь теорему об $s$-кобордизме. Напомним, что ориентируемые многообразия $M_1$ и $M_2$ называются $h$-кобордантными, если $M_1 - M_2$ является краем компактного многообразия $W$ (с учетом ориентации) и $W$ можно продеформировать на $M_1$ и на $M_2$; $s$-кобордизм есть $h$-кобордизм, в котором $\tau(W, M_1) = 0$. Оказывается, что если $n \geqslant 6$, то $W^n$ изоморфно $M_1 \times I$ тогда и только тогда, когда $h$-кобордизм является $s$-кобордизмом. Это обобщение теоремы Смейла опубликовано Мазуром [202] и доказано также Барденом (Barden) (диссертация) и Столлингсом (не опубликовано). Хорошее изложение доказательства дано Кервером [161]* Все эти доказательства относятся к гладкому варианту, лишь в [45] упоминается и используется доказательство Столлингса в $pl$-формулировке. Из этой теоремы вытекает немедленно, что стягиваемое компактное многообразие с односвязным краем при $n \geqslant 6$ $pl$-эквивалентно симплексу (если пользоваться гладким вариантом, то нужно сперва сгладить многообразие): выкидываем внутренний симплекс и рассматриваем в качестве $W$ оставшуюся часть многообразия. С другой стороны, стягиваемое компактное пятимерное многообразие $M$, ограниченное сферой, гомеоморфно клетке. Для доказательства умножим $M$ на отрезок и применим обобщенную теорему Шёнфлиса в крае многообразия $M \times I$, которое, согласно сказанному выше, является клеткой. Отсюда следует также обобщенная гипотеза Пуанкаре в топологической форме. Из недавнего результата Серфа следует единственность гладкой и $pl$-структур также на $I^5$ и на $S^5$. Одно из важных применений теоремы об $h$-кобордизме ([161], стр. 41) получается также и методом леммы о поглощении (причем при $n \geqslant 5$, см. [266], стр. 251): для любого $h$-кобордизма, т. е. без учета $\tau(W, M_1)$, $W \setminus M_1$ изоморфно $M_2 \times [0, 1)$, $W \setminus (M_1 \cup M_2) \approx M_1 \times (0, 1)$ и $M_1 \times S^1 \approx M_2 \times S^1$.

Новые применения теоремы об $h$-кобордизме в односвязной ситуации были даны Браудером [44] и Браудером, Левиным и Ливсеем [45] (см. также [261]), которые опирались на современную технику, разработанную Браудером и С. П. Новиковым. Браудер [44] показал, что для односвязного замкнутого топологического многообразия $M$ размерности $n \geqslant 5$ произведение $M \times E^1$ имеет $pl$-структуру (или сглаживаемо) тогда и только тогда, когда $M$ $h$-кобордантно $pl$-(гладкому) многообразию $N$, причем $M \times E^1 \approx N \times E^1$ и $N$ единственно.

* Готов перевод лекций Милнора об $h$-кобордизме и лекций об инварианте Уайтхеда.

В [45] доказывается, что открытое $pl$- (и гладкое) многообразие размерности $n \geqslant 6$ изоморфно внутренности компактного многообразия тогда и только тогда, когда оно имеет конечно-порожденные гомологии, односвязно в бесконечности и имеет конечное число концов. При этом компактификация единственна. (Аналогичные теоремы в трехмерном случае получены Эдвардсом [93]). В [45] получена также теорема об $h$-кобордизме для открытых многообразий. (Недавно В. Голо показал, что эти результаты не обобщаются, вообще говоря, на неодносвязный случай: существуют многообразия с двумя концами, не диффеоморфные произведению на прямую, не диффеоморфные внутренности компактного многообразия и т. д.).

**2. Hauptvermutung.** а) Значительное упрощение примеров комбинаторно неэквивалентных, но гомеоморфных полиэдров, принадлежащих Милнору, дал Столлингс [266]. Пусть $P$ — двумерный полиэдр, $\pi_1 P = Z_5$ и $f: P \to P$ — гомотопическая эквивалентность, не являющаяся простой гомотопической эквивалентностью (в размерности 2 индуцированное цепное отображение есть умножение на $t^2 - t + 1$, см. п. 1). В $E^n$ ($n \geqslant 5$) можно реализовать $f$ как гомеоморфизм двух $\varepsilon$-близких экземпляров полиэдра $P$. Если $U \supset V$ — их регулярные окрестности, то $W = [U \setminus V]$ определяет $h$-кобордизм, не являющийся $s$-кобордизмом и, в силу сказанного в п. 1, конус над краем $U$ и конус над краем $U$ вместе с $V$ гомеоморфны. Они не комбинаторно эквивалентны, так как иначе $W$ было бы изоморфно $\dot{V} \times I$ и ретракция $W$ на $\dot{V}$ была бы простой гомотопической эквивалентностью. Заметим, что при $n > 5$ край $U$ и край $V$ $pl$-гомеоморфны.

б) В списке проблем конференции в Сиэттле [2] приведены 7 проблем, которые Милнор выдвигает в качестве основных проблем геометрической топологии многообразий: проблема Пуанкаре в комбинаторной формулировке в размерностях 3 и 4, триангулируемость многообразий, проблема кольца, проблема о двойной надстройке над гомологической сферой, Hauptvermutung для комбинаторных многообразий, топологическая инвариантность простого гомотопического типа и классов Понтрягина. Инвариантность рациональных классов Понтрягина доказана в 1965 г. С. П. Новиковым [4]. Инвариантность простого гомотопического типа доказана только в размерностях меньших 4, где она следует из решения Hauptvermutung, данного Мойсом [217]. Для многообразий Hauptvermutung естественным образом распадается на две проблемы: о комбинаторности всякой триангуляции и Hauptvermung для комбинаторных триангуляций. Последняя проблема, кроме сфер, решена еще для многообразий гомотопического типа $S^n \times S^2$ и связных сумм таких многообразий С.П. Новиковым [3]. Проблема о двойной надстройке над гомологической сферой заключается в вопросе о том, может ли двойная надстройка над полиэдром, гомологии которого совпадают с гомологиями сферы, быть гомеоморфной сфере, если сам полиэдр не есть $pl$-сфера. Если да, то мы получим сферу в некомбинаторной триангуляции. Обратно, если существуют некомбинаторные триангуляции многообразий, то существуют и такие надстройки. Таким образом, эта проблема является переформулировкой проблемы о комбинаторности триангуляций. Если допустить гипотезу Пуанкаре в комбинаторной формулировке в размерностях 3 и 4, то легко по индукции показывается, что каждый полиэдр, у которого комбинаторное дополнение каждого симплекса есть гомотопическая сфера, является комбинаторным многообразием. Это условие в частности, выполнено для триангуляций многообразий, в которых каждый симплекс вложен локально плоско.

В частности, в двойной надстройке над гомологической, но не гомотопической сферой $M^n$, т. е. в $S^1 * M$, $S^1$ должно быть вложено дико, если допустить, что $S^1 * M = S^{n+2}$. В то же время каждая дуга в $S^1$ вложена клеточно в $S^{n+2}$, $S^1$ ни в одной точке не прокалывает $(n+1)$-диска, словом, вложение $S^1$ в $S^{n+2}$ должно иметь чрезвычайно странные свойства (ср. [119; 1962])*. Отметим еще, что Хиршем показано [143], что надстройка над гомотопической комбинаторной 4-сферой $M^4$ гомеоморфна $S^5$ (согласно Керверу и Милнору, $M^4$ и $S^4$ $h$-кобордантны и, как указано выше, отсюда следует, что $M^4 \times E^1 \approx S^4 \times E^1$,. т. е. надстройки над $M^4$ и над $S^4$ гомеоморфны). Отсюда вытекает, что если гипотеза Пуанкаре неверна в размерности 4, то существуют некомбинаторные триангуляции сферы $S^4$ (с локально плоскими симплексами).

Hauptvermutung для комбинаторных многообразий связана также с проблемой Шёнфлиса в комбинаторной формулировке [119, 1962], которая верна в общем случае, если она верна для вложений $S^3$ в $S^4$ [186], что в свою очередь эквивалентно справедливости Hauptvermutung для $S^4$.

Проблемы кольца и триангулируемости тесно связаны между собой. Хомма [147] сформулировал лемму, которая аналогична его лемме из [146] и из справедливости которой во всех размерностях вытекало бы решение этих проблем и также

* Вложения $S^1$ в $S^n$, $n>3$, с такими свойствами существуют: если $\alpha$—дикая дуга в $E^{n-1}$, то $E^{n-1}/\alpha \times E^1 \approx E^n$ (см. 1, § 4, п. 1), и если $x$—образ дуги $\alpha$ в $E^{n-1}/\alpha$, то $x \times E^1 \cup \omega$ есть окружность, вложенная указанным образом в $S^n = E^n \cup \omega$.

Hauptvermutung для комбинаторных многообразий. См. также [67].

**3. Теория окрестностей Мазура** [201, 202, 206, 242, 251, 287, 290]. Мазур применил теорию Смейла, понятую с точки зрения простого гомотопического типа, для доказательства аналогов (в некотором смысле) теорем Уайтхеда о регулярных окрестностях полиэдров в $E^n$ и построил теорию, которая может быть названа теорией абстрактных окрестностей. Каждое гладкое многообразие $M^n$, $n \geqslant 6$, может быть получено из шара последовательным приклеиванием ручек. Стягивание ручки к ее «сердцевине» превращает этот процесс в обычное построение клеточного комплекса. Таким образом, каждое многообразие $M^n$ с фиксированным разбиением на ручки дает клеточный комплекс $X$. Совокупность всех многообразий размерности $n$ (гладких или $pl$), из которых можно таким образом получить $X$ ($n$-окрестности $X$), Мазур обозначает $N^n(X)$. Основной результат заключается в том, что если $n \geqslant 6$ и $n \geqslant \max\{\dim X, \dim Y\} + 3$, то простая гомотопическая эквивалентность $f: X \to Y$ (см. п. 1) индуцирует изоморфизм множеств в соответствующей категории. При последовательном умножении на отрезок получается стабилизация, причем $N^{\lim}(X) = K(X)$, где соответствие определяется сопоставлением окрестности части ее касательного расслоения (или микропучка в $pl$-случае) над $X$.

Ограничения существенны, как показывают примеры стягиваемых компактных многообразий, отличных от шара (псевдоэлементы). Из результата Мазура следует, что эти многообразия нельзя стянуть при $n \geqslant 6$ элементарными стягиваниями более, чем на две размерности. Простейший пример такого рода был построен впервые в неявной форме Ньюменом (нужно взять двумерный полиэдр с тривиальными гомологиями и нетривиальной фундаментальной группой, вложить его в $E^n$ ($n \geqslant 5$), и тогда дополнение к открытой регулярной окрестности полиэдра будет требуемым многообразием). В размерности 4 примеры были даны Поэнару и Мазуром [211; 1962] и [175; 1962]. См. также [242].

Зиман изучил полиэдр $D$, на который стягивается мазуровский псевдокуб: этот «шутовской колпак» получается из треугольника $ABC$ отождествлением сторон $AB$, $BC$ и $AC$. При $n \neq 4$ оказывается, что всякое $n$-мерное многообразие, комбинаторно стягиваемое на $D$, является кубом. Если же $M^4$ стягивается на $D$, то $M^4 \times I = I^5$ и поэтому $M$ есть регулярная окрестность полиэдра $D$ в $S^4 = 2M = \dot{I}^5$.

**4. Другие результаты.** а) Зиман обсуждает в [241; 1962] понятие полиэдральной структуры топологического пространства. Он считает, что ее нужно задавать как структуру конечных подполиэдров. б) Хадсон и Зиман [156] дают разного рода усиления теорем Уайтхеда о регулярных окрестностях (см. [12], стр. 177), в частности, часто используемую относительную форму этих теорем. Формулировка теоремы единственности у них неточна, как замечено Тинделлом. Однако она может быть исправлена. в) См. также [82, 254, 255, 291].

## § 3. Вложения

**1. Hauptvermutung для вложений** опровергнута Мазуром [**203**]. Используя комплексы Милнора [185; 1962], он строит комплекс, допускающий два кусочно-линейных вложения в $E^n$, $n \geqslant 23$, эквивалентных топологически, но не кусочно-линейно. Сондов заявил, что это же верно для вложений сферы $S^{n-2}$ в $S^n$.

**2. Узлы [145, 160, 178, 183, 186, 256, 288].** а) В коразмерности, большей двух, окончательный результат принадлежит Зиману [288]: комбинаторные вложения сфер эквивалентны стандартным. Это соответствует топологическому результату Столлингса (I, § 3, п. 1а), но доказывается совсем другим методом, введенным в этой статье Зиманом. То же верно и для вложения клетки в клетку, при котором край вкладывается в край и внутренность во внутренность. Важное следствие этого результата — локальная незаузленность $pl$-вложений многообразий в коразмерности, большей двух. Как заметил С. П. Новиков, результаты Зимана проще всего получаются с помощью гладкой топологии: для пары $(S^n, S^k)$ возьмем звезды $(B_1^n, B_1^k)$ и $(B_2^n, B_2^k)$ двух вершин $S^k$ в достаточно мелкой триангуляции $(S^n, S^k)$. Пара многообразий $(S^n \setminus (B_1^n \cup B_2^n), S^k \setminus (B_1^k \cup B_2^k))$ определяет $h$-кобордизм пар $(\dot{B}_1^n, \dot{B}_1^k)$ и $(\dot{B}_2^n, \dot{B}_2^k)$ (он, очевидно, односвязен при $n-k>2$ и сглаживается). Отсюда получается, что $(S^n, S^k)$ есть надстройка над парой $(S^{n-1}, S^{k-1})$. Таким образом, теорему достаточно доказать для случая $(S^5, S^2)$, что сделано Зиманом в [235; 1962] для $pl$-случая и У Вень-цзюнем в гладком случае. Дальнейшие приложения метода Зимана дал Ликориш [183].

б) В коразмерности 2 Дж. Левин [178] показал, что локально плоское $pl$-вложение сферы незаузлено в том и только в том случае, когда дополнение имеет гомотопический тип окружности. Столлингс построил пример вложения $S^{n-2}$ в $S^n$ ($n \geqslant 5$), при котором фундаментальная группа дополнения является циклической, но $\pi_2 \neq 0$ [160]. Кервер [160] дал следующую характеристику групп, которые могут быть фундаментальными группами дополнения к гладкому (и $pl$) узлу в $S^n$ ($n \geqslant 5$): (а) факторгруппа по коммутанту есть $Z$, (в) в группе имеется такой элемент, что минимальный нормальный делитель, содержащий его, совпадает со всей группой, и (с) двумерная группа гомологий тривиальна.

в) Коразмерность 1. Комбинаторная теорема Шёнфлиса остается до сих пор недоказанной при $n \geqslant 4$. Розен [256] доказал, что всякий подполиэдр звездной 5-сферы, гомеоморфный 4-сфере [201; 1962] ограничивает области, замыкания которых гомеоморфны шарам. (Это следует из того, что локальная плоскостность может нарушаться только в вершинах, а в то же время изолированных особых точек здесь быть не может (I § 3 п. 2в)).

г) Хирш и Нейвирт [145] дали построение теории узлов в рамках смешанной кусочно-линейной и гладкой техники.

**3. Вложения и погружения многообразий** [29, 126, 142, 153, 154, 158, 159, 231, 232, 235, 236, 268, 279, 285]. а) Используя технику Зимана (см. особенно [242; 1962]), Эрвин [159] доказывает ряд теорем о вложении следующего типа. Если $f: M \to Q$, где $M$ и $Q$ — компактные $pl$-многообразия размерностей $m$ и $q$, $m \leqslant q-3$, $p = 2m - q$, $f\dot{M} \subset \dot{Q}$, причем $M$ $p$-связно, а $Q$ $(p+1)$-связно, то $f$ гомотопно вложению при неподвижной границе. Хадсон [153, 154] показывает необходимость этих условий, рассматривая вложения $S^p \times S^l$ в $E^{p+2l+1}$, $p \leqslant l$. Оказывается, что число классов вложений всегда больше 1 и различно при разных $p$ и $l$. Он показывает также, что вложение может быть продолжено до вложения $B^{p+1} \times S^l$ в том и только том случае, когда вложение тора $S^p \times S^l$ незаузлено (см. также [172; 1962]). б) Хефлигер и Поэнару [128] дают кусочно-линейный аналог теории погружений, следуя Хиршу (см. [12], стр. 140). См. также [142, 159]. в) Уолл [279] доказывает существование нормального микропучка у подмногообразий в стабильных размерностях. Кейпер сообщил на конференции в Обервольфахе (лето 1965 г.) доказательство того, что каждый $pl$-микропучок эквивалентен расслоению со структурной группой $Pl(n)$. г) См. также [29, 235, 236, 270, 285]. Нейвирт [231, 232] ввел инварианты для вложений полиэдра в многообразие в коразмерности 1.

## III. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ТОПОЛОГИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

### § 1. Топология поверхностей [10, 21, 22, 27, 95, 96, 122, 123, 129, 131—133, 177, 180—182, 189—191, 200, 207, 208, 249, 250, 252, 276, 297, 298]

Мы отмечаем только работы с топологическим содержанием и оставляем в стороне более интересные метрические свойства.

1. Классификация некомпактных поверхностей с помощью теории концов полностью проведена Ричардсом [252].

2. Гриффитс [123] доказал с помощью теории Морса несколько частично известных результатов о фундаментальной группе поверхности, например: конечно-порожденная подгруппа фундаментальной группы поверхности содержит нетривиальные нормальные делители этой группы лишь в том случае, когда она имеет конечный индекс. Более общий результат для дискретных групп движений плоскости Лобачевского (фуксовы группы) принадлежит Гринбергу [122], но методы Гриффитса были недавно обобщены им не только на фуксовы, но и на клейновы группы. О дискретных группах см. также [189—191, 200, 207].

3. Фоллмерхаус [276] и Цишанг [10] доказали обобщения известной теоремы Нильсена об автоморфизмах фундаментальной группы замкнутой поверхности, представленной в виде дискретной группы движений в плоскости Лобачевского: каждый ее автоморфизм индуцирован гомеоморфизмом плоскости, коммутирующим с действием группы. Доказательства основаны на алгебраических методах. См. также обзорную статью Цишанга, которая появится в трудах Всесоюзной конференции по топологии 1963 года. Красивое доказательство обобщенной теоремы Нильсена недавно было дано Маскитом [200], который исходил из теории Тейхмюллера. См. также [208].

4. В интересных статьях [249, 250] Рейнхарт построил алгоритм для определения простых замкнутых кривых на компактных поверхностях. Недостаток его приема состоит в том, что приходится оперировать в плоскости Лобачевского и вычисления оказываются довольно сложными. Чисто алгебраический алгоритм дан в статье Цишанга [297]. Там же и у Рейнхарта [250] описаны критерии для того, чтобы система элементов фундаментальной группы поверхности была индуцирована каноническим разрезом.

5. Эпштейн [95] доказал, что любые две кривые, не ограничивающие диска или листа Мёбиуса и гомотопные при фиксированном начале, также и изотопны при фиксированном нача-

ле. Отсюда вытекает, что гомеоморфизмы поверхности с неподвижной точкой, которые индуцируют тождественный автоморфизм фундаментальной группы, изотопны тождественному преобразованию при фиксированном начале (в известной теореме Бэра отсутствует условие фиксированного начала). Ограничения на кривые необходимы [96].

6. В серии из четырех работ Ликориш ([174] 1962], [180—182]), исследовал образующие для группы гомеотопий замкнутой поверхности, т. е. факторгруппы группы гомеоморфизмов по связной компоненте единицы. Для ориентируемой поверхности образующими являются скручивания «на 360°» вдоль простых кривых и одно отражение. Этот результат был уже известен (Dehn, Acta Math, 1938, **69**, 135—206). В [181] Ликориш описывает конечную систему кривых, скручивания вдоль которых порождают всю группу сохраняющих ориентацию преобразований, и доказывает тем самым гипотезу Меннике (Ден также указал конечную систему образующих, но значительно большую). Для полного изучения группы всех гомеоморфизмов поверхности нужно наряду с группой гомеотопий рассмотреть также связную компоненту единицы этой группы. Отдельные результаты в этом направлении получила Хэмстром [129, 131, 133].

## § 2. Кривые на поверхности полного кренделя [8, 11, 23, 124, 125, 192, 293—296]

Они интересны, прежде всего, ввиду их связи с разложениями Хегора для трехмерных многообразий. Гриффитс [124] и Цишанг [293] доказали, что каждый автоморфизм фундаментальной группы полного кренделя (свободная группа) индуцирован гомеоморфизмом. Две системы кривых называются эквивалентными, если они переводятся друг в друга гомеоморфизмами кренделя. Классификация простых систем (т. е. систем кривых без взаимных пересечений и самопересечений) удовлетворительно проведена лишь для кренделей рода два (для рода 1 она хорошо известна), где она сведена в общем случае к классификации индуцированных элементов в свободной группе (Цишанг [8]. Исключения разобраны в [294]). Для кренделей произвольного рода самый сильный из полученных пока результатов состоит в следующем [11]: каждая простая система эквивалентна системе, для которой алгебраическое и геометрическое числа пересечений с каноническим разрезом совпадают. Доказательство использует алгоритм Уайтхеда для выяснения эквивалентности элементов свободной группы. Из этого результата, например, следует, что каждые две системы, индуцирующие свободные образующие фундаментальной группы, эквивалентны. Эта теорема доказана в более специальном случае Макмилланом [192] и Цишангом [295]. В [295] доказано также, что если система $2g$ элементов свободной группы порождает всю группу и они разбиваются на $g$ пар, произведение коммутаторов которых тривиально, то система индуцируется каноническим разрезом поверхности полного кренделя.

Известно, что не всякая система $k$ элементов свободной группы ранга $k$, которая не содержится в нормальном делителе, может быть переведена в систему свободных образующих гомоморфизмами Нильсена. Важную гипотезу выдвинули Эндрюс и Кёртис: это можно сделать, если допустить замену каждого из этих элементов сопряженным.

## § 3. Гипотеза Пуанкаре [37, 106, 127, 138, 198, 199, 238—241, 246, 247]

1. На основе разбиений Хегора Папакирьякопулос [238, свел гипотезу Пуанкаре к двум алгебраическим утверждениям. Маскит [198] предложил контрпримеры к первому из них, и теперь гипотезы приняли такой вид: пусть $a_i$, $b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — канонические образующие $\pi_1 N$, где $N$ — край кренделя, а $\tau_1, \ldots, \tau_p$ — такие элементы коммутанта, что $b_i\tau_i$ входят в некоторую систему канонических образующих. Пусть $\overline{\Delta}_i$ — нормальный делитель, порожденный $[a_j, b_j\tau_j]$. Тогда: (1) существует такое $j$, что $\pi_1 N/\overline{\Delta}_j$ не имеет кручения; (2) для этого $j$ накрывающее, отвечающее $\overline{\Delta}_j$, гомеоморфно открытому подмножеству двумерной сферы. Рапапорт [246, 247] доказала первую гипотезу. Модифицированные гипотезы анонсированы в [239], а редукция проведена в [240]. Эта последняя статья особенно ценна для каждого, кто желает ознакомиться с методами, исходящими из разбиений Хегора. С первой гипотезой связана и статья [241], где Папакирьякопулос подходит к этой проблеме с точки зрения алгебраической топологии. Вторая гипотеза является предметом исследований Маскита [198], который характеризует регулярные накрытия замкнутой поверхности, вложимые в сферу, и рассматривает задачу о существовании на поверхности простого замкнутого пути, который накрывается замкнутым путем.

2. Обзор геометрического подхода к гипотезе Пуанкаре дал Бинг [37] (см. [12] стр. 172, п. 3).

3. Более специальные результаты: Хемпел показал, что если односвязное многообразие получается переклеиванием в 3-сфере полнотория, представляющего узел на сфере, то многообразие есть 3-сфера. Этот результат содержится также в [138], где показана связь этой конструкции с диаграммами Хегора. Для

древовидных многообразий (см. § 4 п. 2) гипотезу Пуанкаре доказал фон Рандов [248]. Конструкцию односвязных накрывающих для узлов обсуждает Фокс [106].

## § 4. Классификация [42, 43, 65, 90—93, 185, 227, 229, 248, 264, 269, 277, 278, 281—283]

1. Очень успешным оказался в применении к классификации трехмерных многообразий метод косых произведений. Основой здесь служит теорема Столлингса [264] (см. [12] стр. 174 п. 5), характеризующая посредством фундаментальной группы те неприводимые многообразия, которые являются косыми произведениями. Нейвирт [229] показал, что в случае замкнутых многообразий два косых произведения над окружностью гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их фундаментальные группы. Если же многообразия имеют край, то все компоненты края являются торами, и тип многообразия определяется вложением фундаментальных групп этих торов в $\pi_1 M$ (так называемая периферическая система). В [227] Нейвирт рассмотрел частный случай. Особое значение эта теорема имеет для теории узлов (см. § 5 п. 1).

2. Более общий класс выделяется расслоениями в смысле Зейферта, которые кратко могут быть описаны так: в пучке окружностей над поверхностью некоторые дизъюнктные полнотория, заполненные слоями, заменяются иначе приклеенными полноториями. Расслоение можно продолжить внутрь до осевых линий, которые становятся сингулярными слоями. Если слои на крае полнотория не являются меридианами подклеенных полноторий, то получаются пространства в смысле Зейферта. Если исходная поверхность — сфера, а переклеивания произвольные, то получаются обобщенные древовидные многообразия [248]. Уже Зейферт (Acta Math., 1933, **60**, 147) классифицировал расслоения в его смысле относительно послойных гомеоморфизмов. Броди [43] доказал, что инварианты Зейферта определяют топологический тип, если рассматривать расслоения с не более чем двумя сингулярными слоями и если род исходной поверхности больше 1. Обобщенные древовидные многообразия рассматривались фон Рандовым [248]. Недавно Вальдхаузен [277] классифицировал все древовидные многообразия с довольно сложным строением. Для пространств Зейферта он показал, что каждый гомеоморфизм между такими пространствами может быть деформирован в послойный, когда род базисной поверхности больше нуля или если число особых слоев больше 3. Наконец, он показал, что древовидные многообразия являются пространствами Зейферта.

3. К сожалению, Хакен не опубликовал доказательств сообщенных в [150; 1962] результатов (см. [12], стр. 176).

4. Эдвардс [92] (см. также Уолл [278]) дал характеристику трехмерного евклидова пространства, аналогичную характеристике $E^n$, $n \geqslant 5$, данной Столлингсом [223; 1962]: стягиваемое открытое трехмерное многообразие гомеоморфно $E^3$ в том и только в том случае, когда оно односвязно в бесконечности и неприводимо. Получены и значительно более общие результаты. В [93] Эдвардс показывает, в частности, что компактные многообразия гомеоморфны, если гомеоморфны их внутренности.

5. Каслер [65] ввел так называемые стандартные остовы (см. также [67, 290]) трехмерных многообразий — комплексы, на которые многообразие (без одной 3-клетки, если оно замкнуто) может быть стянуто элементарными стягиваниями и которые локально являются объединениями двух, трех или четырех дисков по общей дуге на крае. Каждое трехмерное многообразие имеет стандартные остовы и Каслер показывает, что трехмерное многообразие с краем вкладывается в другое трехмерное многообразие в том и только в том случае, когда они имеют гомеоморфные остовы. Интересна задача выделения единственного остова для каждого трехмерного многообразия.

6. В [91] Эдвардс дает полное перечисление декартовых разложений компактных трехмерных многообразий.

7. Из работы Ливсея об инволюциях 3-сферы [185] (см. I, § 2, п. 2б) вытекает, что компактное ограниченное неориентируемое связное трехмерное многообразие с конечной фундаментальной группой гомеоморфно (по модулю гипотезы Пуанкаре) произведению, из которого выкинуто конечное число шаров. При склеивании точек, эквивалентных при некоторой инволюции 3-сферы, в частности, можно получить только проективное пространство. Тао [269] доказал, что аналогично этому при свободной от неподвижных точек инволюции многообразия $S^1 \times S^2$ можно получить либо одно из двух расслоений на сферы над окружностью, либо связную сумму двух проективных пространств. Он показал, что произведение окружности на 2-сферу является единственным по модулю гипотезы Пуанкаре трехмерным многообразием, где неверна теорема о сфере, и что двукратные накрытия неприводимых многообразий неприводимы.

## § 5. Теория узлов

**1. Группы узлов [9, 28, 46, 74—78, 104, 105, 179, 222, 223, 227—230, 233, 271—275].** За последнее время появились две книги по теории узлов: Кроуэлла — Фокса [77] и Нейвирта [233].

Следует также напомнить об обзоре Фокса [104] и составленном им списке проблем [105]. Книга Кроуэлла—Фокса имеет целью ввести начинающего в современную теорию узлов на основе понятия группы узла. Очень подробно рассмотрено понятие узла (ручного и дикого, доказано, что гладкие узлы ручные) и особенно подробно дано определение группы узла. Тщательно изложены алгебраические основы: свободные группы, задания групп, алгебраизированное доказательство теоремы Ван Кампена. Однако содержательная часть книги сводится к изложению достаточно известного свободного исчисления Фокса и алгебры, связанной с многочленами Александера. Нужно отметить отличную библиографию, снабженную кратким, но очень полезным путеводителем.

Книга Нейвирта написана неровно и несистематически, многое изложено тщательно, а некоторые вещи, например, модульная структура прокоммутированного коммутанта, описаны довольно смутно. Однако эта книга очень полезна и своевременна, так как в ней собраны более или менее все важные факты о группах узлов, в том числе полученные в последнее время, и нам будет удобно вести параллельно обзор книги и современного состояния этого предмета. Большое место в книге занимают недавние красивые и важные результаты автора. В книгу включено подробное описание построения накрытия, отвечающего двумерному комплексу в трехмерном многообразии. Центральным местом книги является гл. IV, где изучен коммутант $G'$ группы узла $G$. В нее включены результаты автора [227, 228] и Кроуэлла [74—76]. Если 3-сферу разрезать по ориентируемой поверхности минимального рода $g$, ограниченной данным узлом, и затем склеить цепочкой бесконечную в обе стороны последовательность экземпляров таких разрезанных сфер, то получится накрытие, отвечающее $G'$. Вложение каждого из двух экземпляров поверхности разреза в разрезанную 3-сферу индуцирует мономорфизм фундаментальных групп. Если этот мономорфизм является эпиморфизмом, то группа поверхности (свободная группа ранга $2g$) есть $G'$; в противном случае $G'$ является бесконечным свободным произведением цепочки свободных групп с отождествленными подгруппами и во всяком случае не является конечно-порожденным (третья возможность откинута Брауном и Кроуэллом [46]). Эти два случая резко отличаются друг от друга.

Первый класс узлов (с конечно порожденными коммутантами), согласно теореме Столлингса (см. § 4, п. 1), имеет расслаивающееся над окружностью дополнение. Более того, как показывает Нейвирт ([227, 229] и гл. X книги), в этом случае тип дополнения полностью определен группой, а тип узла — периферической системой (см. § 4, п. 1). Относительно характеризации групп узлов с конечно-порожденным коммутантом известно немного: первый коэффициент многочлена Александера должен равняться $\pm 1$ (см. [233], стр. 47). Для альтернирующих узлов Мурасуги доказал [222] обратное, но Кроуэлл и Троттер обнаружили, что некоторые узлы на кренделе рода 2 удовлетворяют этому условию, но имеют не конечно-порожденный коммутант.

Кроуэлл исследует строение прокоммутированного коммутанта как модуля над групповым кольцом группы целых чисел (группа гомологий накрытия относительно скольжений). Он доказывает, в частности, что аннулирующий этот модуль идеал порождается отношением первых двух многочленов Александера [75] и что сам модуль не имеет кручения [76]. Нейвирт показывает также, что модуль тривиален в том и только том случае, когда многочлен Александера равен 1. (Матрица Александера описывает модульные соотношения, а $k$-ый многочлен Александера — это наибольший общий делитель миноров порядка $n-k$ в матрице Александера).

Характеристические свойства первого многочлена Александера $\Delta(t)$: (a) $\Delta(1) = \pm 1$ и (b) $\Delta\left(\frac{1}{t}\right) = t^{-2g}\Delta(t)$ ([233], гл. IX] распространены недавно Левиным [179] на всю совокупность многочленов: последовательность многочленов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, определенная с точностью до единиц $t^{\pm l}$, является системой многочленов Александера некоторого ручного узла в $S^3$ тогда и только тогда, когда: (a) начиная с некоторого $i$, $\Delta_i$ становятся единицами $t^{\pm l}$ кольца, (b) $\Delta_i(1) = \pm 1$, (c) $\Delta_i(t) = t^{2g}\Delta(t^{-1})$, ($d$) $\Delta_i$ делится на $\Delta_{i+1}$.

В гл. V [233] рассматриваются подгруппы групп узлов, в частности, изучается строение подгрупп, отвечающих конечным циклическим накрытиям (здесь/же доказан ряд известных теорем о гомологиях накрытий), а также строение коммутативных подгрупп. Показано, что если $G$ имеет нетривиальный центр, то корни многочлена Александера являются корнями из единицы. (Недавно Бурде и Цишанг доказали, что нетривиальным центром обладают только группы узлов на торе).

Две следующие главы посвящены нахождению представлений (в частности, метациклических, по методу Фокса) и автоморфизмам. Здесь имеются две гипотезы: для каждого элемента группы существует гомоморфизм в конечную группу, не равный нулю на этом элементе (это доказывается Нейвиртом для групп с конечно порожденным коммутантом), и гипотеза Смита (см. [12] стр. 168 и I, § 2, п. 2б) и в)). Для групп с конечно порожденным коммутантом Нейвирт находит группы автоморфизмов, индуцирующих тождественное преобразование $G'/G''$. Троттер рассматривал симметрии узлов. Он заметил [275], что некоторые узлы на кренделе рода 2 необратимы, и решил тем самым известную проблему. В [273] он доказывает, что если коммутант конечно-порожден и группа допускает автоморфизм порядка $k$, то все корни многочлена Александера являются корнями $k$-ой степени из единицы.

В гл. VIII Нейвирт строит некоторую группу, состоящую из групп, операция в которой копирует связную сумму узлов. Эйленберг в дополнении к книге дал категорную основу этой конструкции. Эта группа нетривиальна для двумерных узлов в 4-сфере, для узлов в 3-сфере вопрос не решен.

В гл. IX наиболее важно упоминание о неопубликованном результате Столлингса: не существует алгоритма для распознавания групп узлов среди конечно-представимых групп.

Упомянем еще одну нерешенную задачу Нейвирта: можно ли представить группу любого узла в 3-сфере в виде свободного произведения с отождествленной свободной подгруппой ранга $2p—1$ двух свободных групп ранга $p$ каждая? Такое представление тесно связано с разбиением Хегора и действительно получается для альтернирующих узлов из естественных разбиений Хегора (Ауманн [28]). Нейвирт показал, что грубо говоря, если узел лежит на поверхности, род которой меньше удвоенного рода узла, то группа узла имеет желаемое представление [230]. Цишанг [19] установил в некотором смысле обратное: такая группа является при некоторых необходимых ограничениях группой узла по крайней мере в гомотопической сфере.

**2. Другие инварианты [24, 85, 108, 167, 224—226, 274].** Фокс и Смит [108] определили новые инварианты для узлов, получающиеся из столбцов и строк матрицы Александера. Они различают узлы с одинаковыми многочленами, кручениями и зацеплениями в накрывающих.

Мурасуги [225] подробно исследовал сигнатуру зацеплений, инвариантность которой была доказана Троттером [274]. С ее помощью он получил ряд интересных теорем, например, что сигнатура срезанных узлов, т. е. узлов, ограничивающих в четырехмерном полупространстве локально плоскую клетку, равна нулю. В частности, отсюда следует справедливость старой гипотезы: сумма двух противоположных узлов трилистника не является срезанным узлом. Он оценивает также модуль сигнатуры. В [226] он заканчивает исследование о розеточных узлах, начатое Крётенхардтом [167], который ввел эти красивые узлы. В [224] Мурасуги доказывает, что для срезанных узлов все единицы Минковского положительны. См. также [24].

**3. Теория кос [50, 51, 97, 100, 101, 107, 109].** Новый подход был дан Нейвиртом, Фэделлом и Фоксом [101, 107]: Пусть $M$ — любое многообразие, $Q_m=\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ — некоторое множество различных точек из $M$. Пространство $F_{m,n} = \{(p_1, p_2, \ldots, p_n) | p_i \in M \setminus Q_m;\ p_i \neq p_j,\ i \neq j\}$ с естественной топологией называется пространством конфигураций [97]. Рассматриваются [97, 100] локально тривиальные расслоения пространств $F_{m,n}$ и в некоторых случаях определяются их гомотопические группы. Группа кос оказывается фундаментальной группой некоторого пространства конфигураций [100] и из общих результатов следует, например, что группа кос не содержит элементов конечного порядка. С помощью этой конструкции Фэделл и Ван Бускирк [101] снова доказали известную теорему о том, что геометрическое определение группы кос по Артину и алгебраические определения (см., например, А. А. Марков, Труды МИАН, 1945, **16**) приводят к изоморфным группам. В [50] Бурде доказывает новым способом, основанным на классических методах, ряд известных фундаментальных теорем. Статья может служить элементарным введением в теорию кос. Ему удалось построить одно представление с двумя проекциями, первая из которых дает диаграмму косы в смысле Артина, другая является нормальным разбиением плоскости с дырами. Тем самым наглядно доказывается следующий известный факт: фактор-группа группы гомеоморфизмов плоскости с дырами по связной компоненте единицы изоморфна группе кос (см. также [107]). Бурде [50] описывает геометрическое построение нормальных форм для кос, найденное Артиным алгебраическим путем, и доказывает, независимо от Фокса и Нейвирта, что в группе кос нет элементов конечного порядка. Решая задачу Артина, Бурде вычисляет в [51] нормализаторы в группе кос для так называемых чистых $k$-кос, где искривляется только $k$-ая нитка. Они образуют свободную группу. Для них Фрейлихом была решена проблема сопряженности. Оказывается, что вопросы о сопряженности и о нормализаторе эквивалентны вопросу о возможности перевести друг в друга два элемента свободной группы косовым или внутренним автоморфизмом. Гасснер [109] подошла к проблеме сопряженности с помощью представлений группы кос матрицами и обобщила теорию Бурау.

4. **Метод Хакена** (см. [12], стр. 175, п. 7) был использован в теории узлов Шубертом [259] и его учениками Хаммером и Зольцином [128, 260]. Если узел не имеет сопровождающих узлов, что можно выяснить алгоритмически [130], то поверхности минимального рода, натянутые на него, распадаются на конечное число изотопических классов [256]. С помощью метода Хакена можно найти конечную систему поверхностей, представляющих все классы. См. также [263].

5. См. также [54—56], [258], [151].

## Добавления при корректуре

1. К I § 3 п. 1 и II § 3 п. 2. Модульная структура гомологий накрывающего дополнительного пространства многомерного узла подробно рассмотрена Кервером [309]. См. также [145].

2. К I § 3. Вышла из печати монография Л. В. Келдыш [299], посвященная вопросам вложения в плоскость и в $E^3$, а также некоторым новым результатам о вложениях $E^k$.

3. К I § 3 п. 3. В работе Л. В. Келдыш [300] показано, в частности, что всякая двумерная сфера в $E^3$ получается из стандартной псевдоизотопией пространства.

4. К I § 3 п. 4. Теорема Мазура о стабильной тангенциальной эквивалентности (см. [205, 311]) обобщена Хольмом [307] и Хиршем [305] на некомпактные многообразия, в непрерывной и $pl$-категориях.

5. К I § 4 п. 2. В. П. Компаниец [301] изучил точечные отображения, дал гомотопический критерий таких отображений и показал, в частности, что если $f: M^k \to N^k$, $k>4$, точечно и одно из многообразий есть $E^k$ или $S^k$, то и другое также. См. также [245].

6. К II § 2 п. 4. Хирш и Зиман [306] обсуждают два подхода (Столлингса и Зимана) к лемме о поглощении (см. [12], стр. 177). Второй подход использует Хирш в [304] (см. добавление 7). Ньюмен дал чисто топологическое доказательство в первом случае [234]. Коннел использовал это для доказательства обобщенной гипотезы Пуанкаре ($k \geqslant 5$) для топологических многообразий. Результат Столлингса о характеризации $E^k$ (см. [223; 1962] и [12] стр. 177) также может быть перенесен на топологический случай.

7. К II § 3 п. 3. Хотя техника микропучков Милнора теперь детально разработана (см. [310], а также [279] в $pl$-случае и [212] в непрерывном), она неудобна в ряде геометрических вопросов. Например, 1) стабильные нормальные микропучки существуют (см. [279], [304]), но неизвестно, всегда ли существуют нормальные расслоения даже в $E^k$; 2) Новиков [4] и в более частном случае более элементарными средствами Хирш [304] показали, что трубчатые $pl$-расслоения (со слоем диском) для сфер в евклидовом пространстве неединственны (ср. I § 3 п. 1 б); 3) Хирш [144] показал, что существуют вложения сферы $S^6$ в 12-мерное многообразие вообще без такой окрестности; 4) Браудер [303] показал, что не всякое нормальное расслоение в непрерывном и $pl$-случаях содержит трубчатую окрестность и т. д. В связи с этим интересные «блок-расслоения», представляющие из себя, грубо говоря, $pl$-склеива-

ния тривиальных блоков, ввели Рурк (Rourke) и Сандерсон (B. Sanderson). Они занимают промежуточное положение между регулярными окрестностями и нормальными $pl$-расслоениями и, по-видимому, объединяют в себе их достоинства и свободны от их недостатков. В частности, справедлива теорема существования и единственности нормальных блок-расслоений, строится классификация и т. д. Технически наиболее существенный момент состоит в использовании теоремы Хадсона — Зимана [156].

8. К III § 4. Хендерсон дал далеко идущее обобщение леммы о петле и леммы Дена, объединив их в одном предложении и доказав, в частности, что полиэдральная кривая ограничивает диск, если она стягивается в точку в своем дополнении [141].

9. К III § 3. Свои исследования в направлении гипотезы Пуанкаре подытожил в [127] Хакен.

## БИБЛИОГРАФИЯ


1. **Компаниец В. П.**, О монотонных отображениях $n$-мерной сферы на себя. Укр. Матем. ж., 1965, **17**, № 6, 100—104
2. **Новиков С. П.**, О летнем топологическом институте (Сиэттл, 1963 г., США). Успехи матем. наук, 1965, **20**, вып. 1, 147—170
3. —, Рациональные классы Понтрягина. Гомеоморфизм и гомотопический тип замкнутых многообразий. I. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, **29**, № 6, 1373—1388 (РЖМат, 1966, 5А334)
4. —, О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях (Классы Понтрягина, гладкости, многомерные узлы), Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, **30**, № 1, 207—246
5. **Сосинский А. Б.**, Монотонно открытые отображения сферы. Матем. сб., 1965, **66**, № 2, 170—203 (РЖМат, 1965, 7А288)
6. —, Многомерные узлы. Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 6, 1326—1329 (РЖМат, 1966, 1А550)
7. **Трохимчук Ю. Ю.**, О непрерывных отображениях областей евклидова пространства. Укр. матем. ж., 1964, **16**, № 2, 196—211 (РЖМат, 1965, 3А389)
8. **Цишанг Х.**, О классификации простых систем путей на полном кренделе рода 2. Докл. АН СССР, 1963, **152**, № 4, 841—844 (РЖМат, 1964, 2А394)
9. —, К одной проблеме Нейвирта о группах узлов. Докл. АН СССР, 1963, **153**, № 5, 1017—1019 (РЖМат, 1964, 4А263)
10. —, Об автоморфизмах плоских групп. Докл. АН СССР, 1964, **155**, № 1, 57—60 (РЖМат, 1965, 3А197)
11. —, О простых системах путей на полных кренделях. Матем. сб., 1965, **66**, № 2, 230—239 (РЖМат, 1966, 1А597)
12. **Чернавский А. В.**, Геометрическая топология многообразий. В сб. «Алгебра. Топология. 1962 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1963, 161—187 (РЖМат, 1965, 2А443)
13. —, Конечнократные открытые отображения многообразий. Матем. сб., 1964, **65**, № 3, 357—369 (РЖМат, 1965, 5А281)
14. —, Дополнение к статье «О конечнократных открытых отображениях многообразий». Матем. сб., 1965, **66**, № 3, 471—472 (РЖМат, 1966, 3А296)

15. —, Изотопии в евклидовых пространствах. Успехи матем. наук, 1964, **19**, № 6, 71—73 (РЖМат, 1965, 5А282)
16. —, Изотопия элементов и сфер в $n$-мерном пространстве при $k<\frac{2}{3}n-1$. Докл. АН СССР, 1964, **158**, № 1, 62—65 (РЖМат, 1964, 12А279)
17. —, Гомеоморфизмы евклидова пространства и топологические вложения полиэдров в евклидовы пространства. I. Матем. сб., 1965, **68**, № 4, 581—613
18. —, О топологических вложениях полиэдров в евклидовы пространства. Докл АН СССР, 1965, **165**, № 6, 1257—1260 (РЖМат, 1966, 5А313)
19. —, Об особых точках локально плоских вложений многообразий и объединении локально плоских клеток. Докл. АН СССР, 1966, **167**, № 3, 528—530 (РЖМат, 1966, 8А378)
20. **Alford W. R.**, Ball B. J., Some almost polyhedral wild arcs. Duke Math. J., 1963, **30**, № 1, 33—38 (РЖМат, 1964, 1А366)
21. **Andreatta A.**, Sistemi di circuiti tracciati su una superficie chiusa orientabile di genere qualunque. Rend. Inst. Lombardo sci. e lettere. Sci. mat. fis. chim. e geol., 1961, **A95**, № 3, 827—844 (РЖМат, 1965, 10А322)
22. —, Invarianti topologici d'una coppia di classi d'omologia unidimensionale su una superficie omeomorfa al toro. Riv. mat. Univ. Parma, 1961, **2**, ser 2, 133—150 (РЖМат, 1963, 2А295)
23. **Andrews J. J.**, Curtis M. L., Free groups and handlebodies. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 2, 192—195
24. —, Dristy F., The Minkowski units of ribbon knots. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 6, 856—864 (РЖМат, 1966, 3А334)
25. —, Rubin L., Some spaces whose product with $E^1$ is $E^4$. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, **71**, № 4, 675—677 (РЖМат, 1966, 3А306)
26. **Armentrout S.**, Upper semi-continuous decompositions of $E^3$ with at most countably many nondegenerate elements. Ann. Math., 1963, **78**, № 3, 605—618 (РЖМат, 1964, 7А344)
27. **Armstrong M. A.**, On the fundamental group of an orbit space. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, **61**, № 3, 639—646
28. **Aumann R. J.**, Asphericity of alternating knots. Ann. Math., 1956, **64**, № 2, 374—392 (РЖМат, 1958, 3612)
29. **Banchoff T. F.**, Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds. Amer. J. Math., 1965, **87**, № 2, 462—472 (РЖМат, 1966, 10А311)
30. **Bean R. J.**, Disks in $E^3$. I. Subsets of disks having neighbourhoods lying on 2-spheres. «Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **112**, № 2, 206—213 (РЖМат, 1965, 7А297); II. Там. же, 1965, **119**, № 1, 123—125.
31. **Bing R. H.**, Elementary point set topology. Amer. Math. Month. 1960, **67**, № 7, Part 2, IV; 58 pp., ill. (РЖМат, 1962, 1А298)
32. —, Applications of the side approximating theorem for surfaces. «Gen. Topol and its Relat. Mod. Analysis and Algebra». New York—London, Acad. Press; Prague, Publ. House Czechosl. Acad. Sci., 1962, 91—95 (РЖМат, 1963, 9А257)
33. —, Approximating surfaces from the side. Ann. Math., 1963, **71**, № 1, 145—192 (РЖМат, 1964, 5А269)
34. —, Spheres in $E^3$. Amer. Math. Monthly, 1964, **71**, № 4, 353—364 (РЖМат, 1966, 6А313)
35. —, Pushing a 2-sphere into its complement. Michigan Math. J., 1964, **11**, № 1, 33—45 (РЖМат, 1965, 12А435)
36. —, Inequivalent families of periodic homeomorphisms of $E^3$ Ann. Math., 1964, **80**, № 1, 78—93 (РЖМат, 1965, 8А297)
37. —, Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture. Lect. Mod. Math., vol. 2, New York—London—Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1964, 93—128 (РЖМат, 1966, 1А546)
38. —, Improving the side approximation theorem. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **116**, № 4, 511—525
39. —, Kirkor A., An arc is tame in 3-space if and only if it is strongly

cellular. Fundam. math., 1964, **55**, № 2, 175—180 (РЖМат, 1966, 1А509)

40. —, K i s t e r J. M., Taming complexes in hyperplanes. Duke Math. J., 1964, **31**, № 3, 491—511 (РЖМат, 1965, 7А295)
41. —, K l e e V., Every simple closed curve in $E^3$ is unknotted in $E^4$. L. London. Math. Soc., 1964, **39**, № 1, 86—94 (РЖМат, 1965, 2А448)
42. **Brahana T. R.**, Embedding a regular neigbourhood of the singular locus of a 2 dimensional polyhedron in $E^3$. Duke Math. J., 1963, **30**, № 2, 215—220 (РЖМат, 1964, 5А270)
43. **Brody E. J.**, On the fibred spaces of Seifert. Quart. J. Math., 1962, **13**, № 1, 161—171 (РЖМат, 1964, 1А377)
44. **Browder W.**, Structures on $M \times R$. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, **61**, № 2, 337—345 (РЖМат, 1965, 11А318)
45. —, L e v i n e J., L i v e s a y G. R., Finding a boundary for an open manifold. Amer. J. Math., 1965, **87**, № 4, 1017—1028 (РЖМат, 1966, 9А288)
46. **Brown E. M.**, C r o w e l l R. H., Deformation retractions of 3-manifolds into their boundaries. Ann. Math., 1965, **82**, № 3, 445—458 (РЖМат, 1966, 8А373)
47. **Brown M., Gluck H.**, Stable structures on manifolds. I. Homeomorphisms on $S^n$. Ann. Math., 1964, **79**, № 1, 1—17 (РЖМат, 1964, 8А302)
48. —, —, Stable structures on manifolds. II. Stable manifolds. Ann. Math., 1964, **79**, № 1, 18—44 (РЖМат, 1964, 8А303)
49. —, —, Stable structures on manifolds. III. Applications. Ann. Math., 1964, **79**, № 1, 45—48 (РЖМат, 1964, 8А304)
50. **Burde G.**, Zur Theorie der Zöpfe. Math. Ann., 1963, **151**, № 2, 101—107 (РЖМат, 1964, 5А238)
51. —, Über Normalisatoren der Zopfgruppe. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1964, **27**, № 1—2, 96—115 (РЖМат, 1965, 3А199)
52. **Burgess C. E.**, Properties of certain types of wild surfaces in $E^3$. Amer. J. Math., 1964, **86**, № 2, 325—338 (РЖМат, 1965, 8А304)
53. —, Characterizations of tame surfaces in $E^3$. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, № 1, 80—97
54. **Călugăreanu G.**, Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants. Czeshosl. Math. J., 1961, **11**, № 4, 588—625 (РЖМат, 1963, 6А266)
55. —, O teoremă asupra traversărilor unui nod. Studia Univ. Babes — Bolyai Ser. math.- phys., 1962, **7**, № 1, 39—43 (РЖМат, 1964, 8А284)
56. —, Considérations directes sur la génération des noeuds. Rev. roumaine math. pures et appl., 1965, **10**, № 4, 389—403 (РЖМат, 1966, 3А331)
57. **Cantrell J. C.**, Almost locally polyhedral 2-spheres in $S^3$. Duke Math. J., 1963, **30**, № 2, 249—252 (РЖМат, 1964, 1А365)
58. —, Separation of the $n$-sphere by an $(n-1)$-sphere. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **108**, № 2, 185—194 (РЖМат, 1964, 5А268)
59. —, Almost locally flat embeddings of $S^{n-1}$ in $S^n$. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 5, 716—718 (РЖМат, 1966, 1А549)
60. —, Non-flat embeddings of $S^{n-1}$ in $S^n$. Michigan Math. J., 1963, **10**, № 4, 359—362 (РЖМат, 1964, 7А348)
61. —, $n$-frames in euclidean $k$-space Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 4, 574—578 (РЖМат, 1965, 8А302)
62. —, Some results concerning the union of flat cells. Duke Math. J., 1965, **32**, № 4, 673—677 (РЖМат, 1966, 9А278)
63. —, E d w a r d s C. H., J r, Almost locally polyhedral curves in euclidean $n$-space. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **107**, № 3, 451—457 (РЖМат., 1964, 9А299)
64. —, —, Almost locally flat imbeddings of manifolds. Michigan Math. J., 1965, **12**, № 2, 217—223

65. **Casler B. G.**, An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 4, 559—566
66. —, On the sum of two solid Alexander horned spheres. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **116**, № 4, 135—150
67. **Chandler R. E.**, Cellular subcomplexes of piecewise linear manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 4, 599—600
68. **Church P. T.**, Differentiable open maps on manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **109**, № 1, 87—100 (РЖМат, 1964, 4А304)
69. —, On points of Jacobian rank $k$. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **110**, № 3, 413—423 (РЖМат, 1966, 1А518)
70. —, On points of Jacobian rank $k$. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 5, 1035—1038 (РЖМат, 1966, 8А384)
71. —, Hemmingsen E., Light open maps on $n$-manifolds. III. Duke Math. J., 1963, **30**, № 3, 379—380 (РЖМат, 1964, 4А290)
72. **Connell E. H.**, Approximating stable homeomorphisms by piecewise linear ones. Ann. Math., 1963, **78**, № 2, 326—338 (РЖМат, 1964, 10А298)
73. —, Obstructions to stable structures on manifolds. Duke Math. J., 1965, **32**, № 3, 511—518 (РЖМат, 1966, 8А374)
74. **Crowell R. H.**, The group $G'/G''$ of a knot group $G$. Duke Math. J., 1963, **30**, № 3, 349—354 (РЖМат, 1964, 4А190)
75. —, The annihilator of a knot module. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 5, 696—700 (РЖМат, 1965, 4А250)
76. —, Torsion in link modules. J. Math. Mech., 1965, **14**, № 2, 289—298 (РЖМат, 1966, 9А296)
77. —, Fox R. H., Introduction to knot theory. Boston, Mass., Ginn and Co., New York, 1963 (РЖМат, 1965, 4А249К)
78. —, Trotter H. F., A class of pretzel knots. Duke Math. J., 1963, **30**, № 3, 373—377 (РЖМат, 1964, 5А239)
79. **Curtis M. L.**, Kwun K. W., Infinite sums of manifolds. Topology, 1965, **3**, № 1, 31—42 (РЖМат, 1966, 3А322)
80. —, McMillan D. R., Cellularity of sets in products. Michigan Math. J., 1962, **9**, № 4, 299—302 (РЖМат, 1964, 1А378)
81. **Debrunner H.**, Über den Zerfall von Verkettungen. Math. Z., 1964, **85**, № 2, 154—168 (РЖМат, 1966, 3А330)
82. **Dedecker P.**, Variétés linéaires par morceaux et variétés combinatoires. Ann. mat. pur. ed appl., 1962, **66**, 365—383 (РЖМат, 1966, 1А552)
83. **Dickman R. F.**, Rubin L.-R., Swingle P. M., Characterization of $n$-spheres by an excluded middle membrane principle. Michigan Math. J., 1964, **11**, № 1, 53—59 (РЖМат, 1965, 7А298)
84. —, —, —, Another characterization of the $n$-sphere and related results. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 3, 871—878 (РЖМат, 1966, 1А514)
85. **Ding Chung-Hua**, On the total curvature of curves. II. Chinese Math., 1963, **4**, № 4, 553—560 (РЖМат, 1965, 10А452)
86. **Doyle P. H.**, Certain manifolds with boundary that are products. Michigan Math. J., 1964, **11**, № 2, 177—181 (РЖМат, 1965, 4А296)
87. —, A sufficient condition that an arc in $S^n$ be cellular. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 2, 501—503 (РЖМат, 1965, 8А301); Correction. 1965, № 3
88. —, On the embedding of complexes in 3-space. Illinoise J. Math., 1964, **8**, № 4, 615—620 (РЖМат, 1965, 7А294)
89. —, Hocking J. G., Special $n$-manifolds with boundary. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 1, 133—135 (РЖМат, 1966, 3А321)
90. **Edwards C. H., Jr**, On the union of two solid tori. Amer. J. Math., 1962, **84**, № 1, 11—15 (РЖМат, 1963, 6А304)
91. —, Cartesian factorization of compact 3- and 4-manifolds. Duke Math. J., 1963, **30**, № 3, 355—361 (РЖМат, 1964, 12А305).
92. —, Open 3-manifolds which are simply connected at infinity. Proc.

Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 391—395 (РЖМат, 1964, 2А439)
93. —, Concentricity in 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **113**, № 3, 406—423 (РЖМат, 1965, 8А306)
94. **Epstein D. B. A.**, Embedding punctured manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 2, 175—176 (РЖМат, 1965, 1А576)
95. —, Curves on 2-manifolds and isotopies. Acta math., 1966, **115**, № 1, 83—107
96. —, Zieschang H., Curves on 2-manifolds: a counterexample. Acta math., 1966, **115**, № 1-2, 109—110
97. **Fadell E.**, Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac. Duke Math. J., 1962, **29**, № 2, 231—242 (РЖМат, 1963, 2А304)
98. —, Generalized normal bundles for locally flat imbeddings. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, № 2, 488—513 (РЖМат, 1966, 7А396)
99. —, Locally flat immersions and Whitney duality. Duke Math. J., 1965, **32**, № 1, 37—52 (РЖМат, 1966, 7А397)
100. —, Neuwirth L., Configuration spaces. Math. scand., 1962, **10**, № 1, 111—118 (РЖМат, 1963, 2А303)
101. —, Van Buskirk J., The braid groups of $E^2$ and $S^2$. Duke Math. J., 1962, **29**, № 2, 243—257 (РЖМат, 1963, 2А190)
102. **Finney R.**, Point-like simplicial mappings of a 3-sphere. Canad. J. Math., 1963, **15**, № 4, 591—604 (РЖМат, 1964, 9А300)
103. **Fort M. K., Jr**, A wild sphere which can be pierced at each point by a straight line segment. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 6, 994—995 (РЖМат, 1964, 7А345)
104. **Fox R. H.**, A quick trip through knot theory. Topology of 3-manifolds and related topics. Ed. Fort M. K. Jr., Inc., Englewood Cliffs (N. J.) Prentice — Hall, 1962, 120—168 (РЖМат, 1965, 4А276)
105. —, Some problems in knot theory. Topology of 3-manifolds and related topics. Ed. Fort M. K. Jr., Englewood Cliffs, (N. J.), Prentice—Hall, 1962, 168—176
106. —, Construction of simply connected 3-manifolds. Topology of 3-manifolds and related topics. Ed. Fort M. K. Jr., Inc., Englewood Cliffs, (N. J.), Prentice — Hall, 1962, 213—215 (РЖМат, 1965, 5А283)
107. —, Neuwirth L., The braid groups. Math. scand., 1962, **10**, № 1, 119—126 (РЖМат, 1963, 1А195)
108. —, Smythe N., An ideal class invariant of knots. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 5, 707—709 (РЖМат, 1965, 4А251)
109. **Gassner B. J.**, On braid groups. Abhandl. math Semin Univ. Hamburg, 1961, **25**, № 1, 10—22 (РЖМат, 1963, 1А196)
110. **Giffen C. H.**, The generalized Smith conjecture. Amer. J. Math., 1966, **88**, № 1, 187—198 (РЖМат, 1966, 12А425)
111. **Gillman D. S.** Side approximation, missing an arc. Amer. J. Math., 1963, **85**, № 3, 459—476 (РЖМат, 1964, 10А285)
112. —, Note concerning a wild sphere of Bing. Duke Math. J., 1964, **31**, № 2 247—254, (РЖМат, 1965, 8А305)
113. —, Sequentially 1 — ULC tori. Trans Amer. Math. Soc., 1964, **111**, № 3, 449—456 (РЖМат, 1965, 8А307)
114. **Gluck H.**, Unknotting $S^1$ in $S^4$. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 1, 91—94 (РЖМат, 1964, 2А441)
115. —, Restriction of isotopies. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 1, 78—82 (РЖМат, 1964, 2А444)
116. —, Embeddings in the trivial range. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 6, 824—831 (РЖМат, 1966, 5А332)
117. —, Embeddings in the trivial range. Ann. Math., 1965, **81**, № 2, 195—210 (РЖМат, 1966, 5А331)

118. —, Homogeneity of certain manifolds. Michigan Math. J., 1964, **11**, № 1, 19—32 (РЖМат, 1965, 1А334)
119. **Greathouse C. A.**, Locally flat, locally tame and tame embeddings. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 6, 820—823
120. —, Locally flat strings. Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 3, 415—418 (РЖМат, 1965, 4А297)
121. —, The equivalence of the annulus conjecture and the slab conjecture. Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 5, 716—717 (РЖМат, 1965, 5А289)
122. **Greenberg L.**, Discrete groups of motions. Canad. J. Math., 1960, **12**, 415—426 (РЖМат, 1961, 4А173)
123. **Griffiths H. B.**, The fundamental group of a surface and a theorem of Schreier. Acta math., 1963, **110**, № 1-2, 1—17 (РЖМат, 1964, 12А301)
124. —, Automorphisms of a 3-dimensional handlebody. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1964, **26**, № 3-4, 191—210
125. —, Some elementary topology of 3-dimensional handlebodies. Communs Pure and Appl. Math., 1964, **17**, № 3, 317—334 (РЖМат, 1965, 7А322)
126. **Haefliger A.**, Poenaru V., La classification des immersions combinatoires. Publs. Math. Inst. Hautes Etudes Scient., 1964, **23**, 651—667 (РЖМат, 1966, 1А557)
127. **Haken W.**, On homotopy 3-spheres. Illinoise J. Math., 1966, **10**, № 1, 159—178
128. **Hammer G.**, Ein Verfahren zur Bestimmung von Begleitknoten. Math. Z., 1963, **81**, № 5, 395—413 (РЖМат, 1964, 8А283)
129. **Hamstrom M. E.**, Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes. Duke Math. J., 1962, **29**, № 4, 657—622 (РЖМат, 1965, 12А436)
130. —, A decomposition theorem for $E^4$. Illinois J. Math., 1963, **7**, № 3, 503—507 (РЖМат, 1964, 7А347)
131. —, The space of homeomorphisms on a torus. Illinois J. Math., 1965, **9**, № 1, 59—65 (РЖМат, 1966, 1А517)
132. —, A note on homotopy in homeomorphism spaces. Illinoise Math. J., 1965, **9**, № 4, 602—607 (РЖМат, 1966, 9А274)
133. —, Homotopy properties of the spaces of homeomorphisms on $P^2$ and the Klein bottle. Trans. Amer. Math., Soc., 1965, **120**, № 1, 37—45 (РЖМат, 1966, 9А275)
134. **Harrold O. G., Jr**, Pseudo-isotopically contractible spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 2, 186—187 (РЖМат, 1965, 10А321)
135. —, A characterization of locally Euclidean spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **118**, № 6, 1—16
136. —, A new local property of embeddings. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, **71**, № 1, 882—885
137. **Hemmingsen E.**, Open simplicial mappings of manifolds on manifolds. Duke Math. J., 1965, **32**, № 2, 325—331 (РЖМат, 1966, 1А516)
138. **Hempel J.**, A simply connected 3-manifold is $S^3$ if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 1, 154—158 (РЖМат, 1965, 7А323).
139. —, Closing a surface in $E^3$. Duke Math. J., 1964, **31**, № 4, 611—615 (РЖМат, 1965, 7А292)
140. —, A surface in $S^3$ is tame if it can be deformed into each complementary domain. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **111**, № 2, 273—287 (РЖМат, 1966, 1А510)
141. **Henderson D. W.**, Extensions of Dehn's lemma and the loop theorem. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **120**, № 3, 448—469; Self-unlinked simple closed curves. Там же, стр. 470—480
142. **Hirsch M. W.**, On piecewise linear immersion. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 5, 1029—1030 (РЖМат, 1966, 8А381)
143. —, On homotopy spheres of low dimensions. Differential and combina-

169. **Kwun K. W.**, Factors of $n$-space. Michigan Math. J., 1962, **9**, № 3, 207—211 (РЖМат, 1965, 1A331)
170. —, An involution of the $n$-cell. Duke Math. J., 1963, **30**, № 3, 443—446 (РЖМат, 1964, 12A322)
171. —, Product of Euclidean spaces modulo an arc. Ann. Math., 1964, **79**, № 1, 104—108 (РЖМат, 1964, 7A342)
172. —, Uniqueness of the open cone neighbourhood. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 3, 476—479 (РЖМат, 1965, 1A332)
173. —, Raymond F., Factors of cubes. Amer. J. Math., 1962, **84**, № 3, 433—440 (РЖМат, 1964, 2A440)
174. —, —, Mapping cylinder neighbourhoods. Michigan Math. J., 1963, **10**, № 4, 353—357 (РЖМат, 1965, 1A333)
175. —, —, Manifolds which are joins. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **111**, № 1, 108—120 (РЖМат, 1965, 2A502)
176. —, —, Almost acyclic maps of manifolds. Amer. J. Math., 1964, **86**, № 3, 638—650 (РЖМат, 1966, 2A417)
177. **Levine H. I.**, Homotopic curves on surfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 6, 986—990 (РЖМат, 1965, 2A500)
178. **Levine J.**, Unknotting spheres in codimension two. Topology, 1965, **4**, № 1, 9—16
179. —, A characterization of knot polynomials. Topology, 1965, **4**, № 2, 135—141
180. **Lickorish W. B. R.**, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds. Proc. Cambridge Philos. Scc., 1963, **59**, № 2, 307—317 (РЖМат, 1964, 3A270)
181. —, A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1964, **60**, № 4, 769—778 (РЖМат, 1965, 7A324); Corrigendum. 1966, **62**, № 4, 679—681
182. —, On the homeomorphisms of a non-orientable surface. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, **61**, № 1, 61—64 (РЖМат, 1966, 1A542)
183. —, The piecewise linear unknotting of cones. Topology, 1965, **4**, № 1, 67—91
184. **Lininger L. L.**, Some results on crumpled cubes. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **118**, № 6, 534—549 (РЖМат, 1966, 5A312)
185. **Livesay G. R.**, Involutions with two fixed points on the three sphere. Ann. Math., 1963, **78**, № 3, 582—593 (РЖМат, 1964, 12A321)
186. **Luft E.**, On the combinatorial Schoenflies conjecture. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 5, 108—1011 (РЖМат, 1966, 8A377)
187. **McAuley L. F.**, Lifting disks and certain light open mappings. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1965, **53**, 2, 255—260 (РЖМат, 1966, 1A513)
188. —, Concerning a conjecture of Whyburn on light open mappings. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, **71**, № 4, 671—674
189. **Macbeath A. M.**, Geometrical realization of isomorphisms between plane groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, **71**, № 4, 629—630 (РЖМат, 1966, 4A143)
190. —, On a curve of genus 7. Proc. London. Math. Soc., 1965, **15**, № 3, 527—545 (РЖМат, 1966, 2A515)
191. **Maclachlan C.**, Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces. Proc. London. Math. Soc., 1965, **15**, № 4, 699—712 (РЖМат, 1966, 6A155)
192. **McMillan D. R., Jr**, Homeomorphisms on a solid torus. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 386—390 (РЖМат, 1964, 2A393)
193. —, The singular points of a topological embeddings. Duke Math. J., 1964, **31**, № 4, 711—716 (РЖМат, 1966, 2A439)
194. —, A criterion for cellularity in a manifold. Ann. Math., 1964, **79**, № 2, 327—337 (РЖМат, 1964, 10A284)
195. —, Taming Cantor sets in $E^n$. Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 5, 706—708 (РЖМат, 1965, 7A293)

196. **Martin J. M.**, Extending a disk to a sphere. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **109**, № 3, 385—399 (РЖМат, 1964, 7A346)
197. —, Tame arcs on disks. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 1, 131—133 (РЖМат, 1966, 1A512)
198. **Maskit B.** On a conjecture concerning planar coverings of surfaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 3, 396—398 (РЖМат, 1964, 11A261)
199. —, A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds. Ann. Math., 1965, **81**, № 2, 341—355
200. —, Construction of Kleinian groups. Proc. Conf. Complex. Analysis, Minneapolis 1964, Berlin—Heidelberg—New York, 1965, 281—296
201. **Mazur B.** Relative neighbourhoods and the theorems of Smale. Ann. Math., 1963, **77**, № 2, 232—249 (РЖМат, 1965, 3A417)
202. —, Differential topology from the point of view of simple homotopy theory. Publ. Math. Inst. Hautes Études. Scient. 1963, № 15, 93. Corrections. Там же, 1964, № 22, 87—91 (РЖМет, 1966, 12A413, 414)
203. —, Combinatorial equivalence versus topological equivalence. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **111**, № 2, 288—316 (РЖМат, 1965, 3A416)
204. —, Corrections to my paper: «Symmetric homology spheres». Illinois J. Math., 1964, **8**, № 1, 175 (РЖМат, 1964, 10A299)
205. —, The method of infinite repetition in pure topology. I. Ann. Math., 1964, **80**, № 2, 201—226 (РЖМат, 1966, 1A547)
206. —, Morse theory. Differentiable and combinatorial topology. Sympos. in honor of M. Morse. 1965. Princeton Univ. Press, 145—166
207. **Mennicke J.**, A note on regular coverings of closed orientable surfaces. Proc. Glasgow Math. Soc., 1961, **5**, № 2, 49—66 (РЖМат, 1962, 7A166)
208. —, Eine Bemerkung zu J. Nielsen's Theorie der topologischen Abbildungen geschlossener orientierbarer Flächen. Math. Z. 1964, **83**, № 1, 37—40 (РЖМат, 1964, 8A285)
209. **Meyer D. V.**, A decomposition of $E^3$ into points and a null family of tame 3-cells is $E^3$. Ann. Math., 1963, **78**, № 3, 600—604 (РЖМат, 1964, 7A343)
210. —, $E^3$ modulo 3-cell. Pacif. J. Math., 1963, **13**, № 1, 193—196 (РЖМат, 1964, 4A293).
211. **Milnor J.**, Most knots are wild. Fundam. Math., 1964, **54**, № 3, 335—338 (РЖМат, 1965, 4A269)
212. —, Microbundles. Part I. Topology, 1964, **3**, Suppl. 1, 53—80 (РЖМат, 1966, 1A561)
213. **Moise E. E.**, Affine structures in 3-manifolds. I. Polyhedral approximation of solids. Ann. Math., 1951, **54**, № 3, 506—533
214. —, Affine structures in 3-manifolds, II. Positional properties of 2-sphere. Ann. Math., 1952, **55**, № 1, 172—176
215. —, Affine structures in 3-manifolds. III. Tubular neighbourhoods of linear graphs. Ann. Math., 1952, **55**, № 2, 203—214
216. —, Affine structures in 3-manifolds. IV. Piecewise linear approximations of homeomorphisms. Ann. Math., 1952, **55**, № 2, 215—222
217. —, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. Ann. Math., 1952, **56**, № 1, 96—114
218. —, Affine structures in 3-manifolds. VI. Compact spaces covered by two Euclidean neighbourhoods. Ann. Math., 1953, **58**, № 1, 107 (РЖМат, 1954, 3641)
219. —, Affine structures in 3-manifolds. VII. Disks which are pierced by intervals. Ann. Math., 1953, **58**, № 3, 403—408 (РЖМат, 1955, 1695)
220. —, Affine structures in 3-manifolds. VIII. Invariance of knot types. Local tame imbeddings. Ann. Math., 1954, **59**, № 1, 159—170 (РЖМат, 1955, 1696)
221. **Morse M.**, Topological, differential and analytic formulations of Schoen-

flies problems. Sympos. mat. internaz. Roma, 1962, Roma 1963, 84—93 (РЖМат, 1966, 1А559)
222. **Murasugi K.**, On a certain subgroup of the group of an alternating link. Amer. J. Math., 1963, **85**, № 4, 544—550 (РЖМат, 1965, 2А404)
223. —, The center of a group with a single defining relation. Math. Ann., 1964, **155**, № 3, 246—251 (РЖМат, 1965, 1А183)
224. —, On the Minkowski units of slice links. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, № 2, 377—383
225. —, On a certain numerical invariant of link types. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **117**, № 5, 387—422
226. —, Remarks on rosette knots. Math. Ann., 1965, **158**, № 5, 290—292 (РЖМат, 1966, 1А598)
227. **Neuwirth L. P.**, A topological classification of certain 3-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 3, 372—375 (РЖМат, 1964, 12А302)
228. —, A remark on knot groups with a center. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 378—379 (РЖМат, 1964, 5А236)
229. —, On Stallings fibrations. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 380—381 (РЖМат, 1964, 5А237)
230. —, Interpolating manifolds for knots in $S^3$. Topology, 1963, **2**, № 4, 359—365 (РЖМат, 1965, 2А405)
231. —, In-groups and imbeddings of $n$-complexes in $(n+1)$-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 5, 737—738 (РЖМат, 1966, 2А440)
232. —, In-groups, coverings and imbeddings. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, **61**, № 3, 647—656
233. —, Knot groups. Ann. Math. Studies., 1965, VI, 114 pp. ill. № 56, (РЖМат, 1966, 3А335)
234. **Newman M. H. A.**, The engulfing theorem for locally tame embeddings. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 5, 861—862
235. **Noguchi H.**, A classification of orientable surfaces in 4-space. Proc. Japan Acad., 1963, **39**, № 7, 422—423 (РЖМат, 1966, 1А543)
236. —, One-flat 3-manifolds in 5-space. Osaka Math. J., 1964, **1**, № 2, 117—125 (РЖМат, 1966, 1А551)
237. **Palais R. S.**, Richardson P. W., Jr. Uncountably many inequivalent analytic actions of a compact group on $R^n$. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 374—377 (РЖМат, 1964, 2А451)
238. **Papakyriakopoulos C. D.**, A reduction of the Poincaré conjecture to other conjectures. Bull. Amer. Math. Soc., 1962, **68**, № 4, 360—366 (РЖМат, 1964, 4А300)
239. —, A reduction of the Poincaré conjecture to other conjectures. II. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 3, 399—401 (РЖМат, 1964, 11А262)
240. —, A reduction of the Poincaré conjecture to group-theoretic conjectures. Ann. Math., 1963, **77**, № 2, 250—302 (РЖМат, 1964, 1А380)
241. —, Attaching 2-dimensional cells to a complex. Ann. Math., 1963, **78**, № 2, 205—222 (РЖМат, 1964, 11А260)
242. **Poenaru V.**, Produits cartesiens de variétés différentielles par un disque. Proc. Intern. Congr. Math., 1962, Djursholm Uppsalla, 1963, 481—489 (РЖМат, 1965, 5А290)
243. —, Sur les variétés tridimensionnelles ayant le type d'homotopie de la sphère $S^3$. Cahiers, Seminar. topol. et géom. diff. Ch. Eresmann. Fac. Sci. Paris, 1964, 6 (РЖМат, 1965, 8А329)
244. **Posey E. E.**, Proteus forms of wild and tame arcs. Duke Math. J., 1964, **31**, № 1, 63—72 (РЖМат, 1966, 1А511)
245. **Price T. M.**, A necessary condition that a cellular upper semicontinuous decompositions of $E^n$ yield $E^n$. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **122**, № 2, 427—435 (РЖМат, 1967, 2А327)
246. **Rapaport E. S.**, On a problem of Papakyriakopoulos. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 3, 402—404 (РЖМат, 1964, 11А263)

247. —, Proof of a conjecture of Papakyriakopoulos. Ann. Math., 1964, **79**, № 3, 506—513 (РЖМат, 1965, 1А184)
248. **Randow R. von**, Zur Topologie von Dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten. Bonner math. Schriften, 1962, **14**, 131 S., ill. (РЖМат, 1964, 10А286)
249. **Reinhart B. L.**, Simple curves on compact surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1960, **46**, № 9, 1242—1243 (РЖМат, 1962, 6А254)
250. —, Algorithms for Jordan curves on compact surfaces. Ann. Math., 1962, **75**, № 2, 209—222 (РЖМат, 1963, 4А255)
251. **Rham G. de**, Factorisations topologiques du disque à cinq dimensions. Semin. topol. et géom. différent. Ch. Ehresmann Fac. sci. Paris, 1960—1962, 3, 1—9 (РЖМат, 1965, 8А327)
252. **Richards J.**, On the classification of non-compact surfaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **106**, № 2, 259—269 (РЖМат, 1964, 3А264)
253. **Rosen R. H.**, Exemples of non-orthogonal involutions of Euclidean spaces. Ann. Math., 1963, **78**, № 3, 560—566 (РЖМат, 1964, 12А320)
254. —, Polyhedral neighbourhoods in triangulated manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 3, 359—361 (РЖМат, 1964, 12А304)
255. —, Stellar neighbourhoods in polyhedral manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 3, 401—406 (РЖМат, 1966, 8А376)
256. —, The five dimensional polyhedral Schoenflies theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 4, 511—526 (РЖМат, 1965, 2А501)
257. **Roy P.**, Locally flat n-cells are stable flat, ab. 621—66. Notices Amer. Math. Soc., 1965, **12**, № 4, 323
258. **Schmidt J.**, Über eine Klasse von Verkettungen. Math. Z., 1963, **81**, № 3, 187—205 (РЖМат, 1964, 4А260)
259. **Schubert H.**, Bestimmung der Primfaktorzerlegung vor Verkettungen. Math. Z., 1961, **76**, № 2, 116—148 (РЖМат, 1964, 4А258)
260. —, S o l t s i e n K., Isotopie von Flächen in einfachen Knoten. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1964, **27**, № 1-2, 116—123 (РЖМат, 1966, 3А332)
261. **Siebenmann L. C.**, Finding a boundary for an open manifold, ab 662—41. Notices Amer. Math. Soc., 1965, **12**, № 3, 337
262. **Smith P. A.**, Periodic transformation of 3-manifolds. Illinoise Math. J., 1965, **9**, № 2, 343—348 (РЖМат, 1966, 3А336)
263. **Soltsien K.**. Bestimmung von Schlingknoten. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1965, **28**, № 3/4, 234—249
264. **Stallings J.**, On fibering certain 3-manifolds. Topology of 3-manifolds and related topics. Prentice-Hall, Ed. Fort M. K. Jr., Englewood Cliffs. (N. J.), 1962, 95—100 (РЖМат, 1965, 4А272)
265. —, On topologically unknotted spheres. Ann. Math., 1963, **77**, № 3, 490—503 (РЖМат, 1А548)
266. —, On infinite processes leading to differentiability in the complement of a point. Differential and combinatorial topology. Symposium in honor of M. Morse. 1965, Princeton Univ. Press, 245—254 (РЖМат, 1966, 12А407)
267. **Stewart D. G.**, Cellular subsets of the 3-sphere. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, 1, 10—22 (РЖМат, 1966, 3А308)
268. **Takase R.**, Note on orientable surfaces in 4-space. Proc. Japan Acad., 1963, **39**, № 7, 424 (РЖМат, 1966, 1А544)
269. **Tao I.**, On fixed point free involutions of $S^1 \times S^2$. Osaka Math. J., 1962, **14**, № 1, 145—152 (РЖМат, 1963, 7А257)
270. **Titus C. J.**, Y o u n g G. S., The extension of interiority, with some applications. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **103**, № 2, 329—340 (РЖМат, 1963, 6А274)
271. **Torres G.**, Una proyección canónica de cadenas. Ann. Inst. mat. Univ. nac. autónoma. México, 1962, **2**, 17—23 (РЖМат, 1966, 1А599)

272. —, Sobre la matriz de Alexander de una cadena. Ann. Inst. mat. Univ. nac. autónoma. Mexico, 1963, 3, 21—27 (РЖМат, 1966, 3А333)
273. **Trotter H. F.**, Periodic automorphisms of groups and knots. Duke Math. J., 1961, 28, № 4, 553—557 (РЖМат, 1963, 6А268)
274. —, Homology of group systems with application to knot theory. Ann. Math., 1962, 76, № 3, 464—498 (РЖМат, 1964, 4А259)
275. —, Non-invertible knots exist. Topology, 1963, 2, № 4, 275—280 (РЖМат, 1965, 4А252)
276. **Vollmerhaus W.**, Über die Automorphismen ebener Gruppen. Dissert. Göttingen, 1963
277. **Waldhausen F.**, Baummannigfaltigkeiten und Seifertsche Faserräume. Dissert. Bonn., 1966
278. **Wall C. T. C.**, Open 3-manifolds which are 1-connected at infinity. Quart. J. Math., 1965, 16, № 63, 263—268
279. —, Piecewise linear normal microbundles. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, 71, № 4, 638—641
280. **Whittaker J. V.**, On isomorphic groups and homeomorphic spaces. Ann. Math., 1963, 78, № 1, 74—91 (РЖМат, 1964, 2А389)
281. **Whittlesey E. F.**, Classification 2-complexes. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 6, 841—845 (РЖМат, 1961, 7А357)
282. —, Finite surfaces. A study of finite 2-complexes. Math. Mag., 1960, 34, № 1, 11—22 (РЖМат, 1961, 7А358)
283. —, Finite surfaces. A study of finite 2-complexes. Part II. The canonical form. Math. Mag., 1960, 34, № 2, 67—80 (РЖМат, 1965, 8А298)
284. **Wilder R. L.**, Partially free subsets of Euclidean n-spaces. Michigan Math. J., 1962, 9, № 2, 97—107 (РЖМат, 1965, 12А434)
285. **Yajima Takeshi.** On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space. J. Math. Osaka, 1962, 13, № 2, 63—71 (РЖМат, 1964, 5А235)
286. —, On simply knotted spheres in $R^4$. J. Math. Osaka, 1964, 1, № 2, 133—152 (РЖМат, 1966, 10А328)
287. **Zeeman E. C.**, A note on an example of Mazur. Ann. Math., 1962, 76, № 2, 235—236 (РЖМат, 1963, 12А355)
288. —, Unknotting combinatorial balls. Ann. Math., 1963, 78, № 3, 501—526 (РЖМат, 1964, 9А309)
289. —, Non-triangulable polyhedral manifolds. Arch. Math., 1963, 14, № 1, 65—69 (РЖМат, 1964, 5А288)
290. —, On the dunce hat. Topology, 1963, 2, № 4, 341—358 (РЖМат, 1966, 1А553)
291. —, Relative simplicial approximation. Proc. Cambridge Phils. Soc., 1964, 60, № 1, 39—43 (РЖМат, 1966, 1А541)
292. —, Twisting spun knots. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 115, № 3, 471—495 (РЖМат, 1966, 9А294)
293. **Zieschang H.**, Über einfache Kurven auf Vollbrezeln. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1962, 25, № 3-4, 231—250 (РЖМат, 1964, 4А261)
294. —, Über einfache Kurvensysteme auf einer Vollbrezel vom Geschlecht 2. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1964, 26, № 3-4, 237—247 (РЖМат, 1966, 1А596)
295. —, Alternierende Produkte in freien Gruppen. Abhandl. mat. Semin. Univ. Hamburg, 1964, 27, № 1-2, 13—31 (РЖМат, 1965, 3А198)
296. —, Alternierende Produkte in freien Gruppen. II. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1965, 28, № 3-4, 219—233
297. —, Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen, Math. Scand., 1965, 17, № 1, 17—40
298. —, Über automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen. Math. Ann., 1966, 166, № 2, 148—167

## Дополнительная библиография


299. **Келдыш Л. В.**, Топологические вложения в евклидово пространство. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, **81**, 184 (РЖМат, 1966, 12А390)
300. —, Топологические вложения и псевдоизотопия. Докл. АН СССР, 1966, **169**, № 6, 1262—1265 (РЖМат, 1967, 1А351)
301. **Компаниец В. П.** Гомотопический критерий точечного отображения. Укр. Матем. ж., 1966, **18**, № 4, 3—10 (РЖМат, 1967, 2А326)
302. —, Чернавский А. В. Эквивалентность двух классов отображений $n$-мерной сферы. Докл. АН СССР, 1966, **169**, № 6, 1266—1268 (РЖМат, 1967, 1А350)
303. **Browder W.**, Open and closed disk bundles. Ann. Math., 1966, **83**, № 2, 218—230 (РЖМат, 1967, 1А370)
304. **Hirsch M. W.**, On tubular neighbourhoods of manifolds. I, II. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1966, **62**, № 2, 177—181, 183—185 (РЖМат, 1966, 12А403, 404)
305. —, On tangential equivalence of manifolds. Ann. Math., 1966, **83**, № 2, 211—217 (РЖМат, 1967, 1А365)
306. —, Zeman E. C., Engulfing. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 1, Part 1, 113—115 (РЖМат, 1966, 12А401)
307. **Holm P.**, Microbundles and bundles. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 3. 545—548
308. **Hudson J. F. P.**, Concordance and isotopy of *PL* embeddings. Piecewise linear embeddings and isotopies. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 3, 534—535, 536—537
309. **Kervaire M. A.**, Les noeuds de dimensions supérieures. Bull. Soc. math. France, 1965, **93**, № 3, 225—272 (РЖМат, 1966, 12А421)
310. **Kuiper N. H.**, Lashof R. K., Microbundles and bundles. I. Elementary theory. Invent. math., 1966, **1**, № 1, 1—17 (РЖМат, 1967, 1А369)
311. **Mazur B.**, The method of infinite repetition in pure topology. II. Stable applications. 83, № 3, 387—401 (РЖМат, 1966, 12А406)
312. **Milnor J.**, Whitehead torsion. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 3, 358—426