

КЛОКОВ В. В.

## АНОДНОЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПРИ ИЗОЛЯЦИИ НА КАТОДЕ

При определенных технологических режимах электрохимической размерной обработки используется нанесение изоляции на катод. С целью выяснения влияния нанесения ниже приводится расчет геометрии межэлектродного зазора после выхода процесса на так называемый предельный режим. Постановка крайвых задач для этого случая дана в [1].

В работе рассмотрен случай полубесконечного плоского катода, другая часть которого изолирована. Устанавливается профиль анодной поверхности, первоначально параллельной катоду и изолятору.

Результаты работы, полезные для оценки возможностей электрохимической размерной обработки металлов, могут быть использованы также при расчете некоторого возвратного струйного течения идеальной несжимаемой жидкости [2] или в гальваностегии ([3], с. 97) при определении формы катода, обеспечивающей равномерное покрытие его криволинейных участков.

Рассматривается случай плоско параллельного электрохимического формообразования, когда взаимодействие изолированных участков катода мало.

На рис. 1 представлено установленное экспериментально изменение анодной поверхности с течением времени обработки. Форма анодной поверхности за вторые 60 сек. обработки изменяется меньше, чем за первые — процесс выходит на предельный режим. Вид анодной поверхности используется при математическом моделировании задачи предельного формообразования.

Полагается, что с наступлением предельного режима по всей обра-

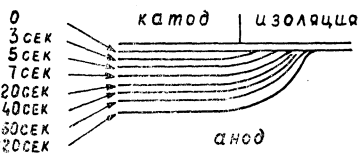


Рис. 1. Изменение анодной поверхности с течением времени. (Материал 2Х13; 8% NaCl;  $U = 7$ В;  $T = 20^\circ\text{C}$ ).

батываемой анодной поверхности плотность тока достигла предельного значения  $i_{1пр}$ , а анодный потенциал принял постоянное значение  $\varphi_{анпр}$ .

В межэлектродном зазоре  $D_z$  при допущении постоянной электропроводности среды потенциал электрического поля  $u$  удовлетворяет уравнению Лапласа ([4], с. 22)

$$\Delta u(x_1, y_1) = 0$$

и граничным условиям

$$u_a = U - \varphi_{анпр} \text{ — на всей анодной поверхности } ADC, \text{ рис. 2,}$$

$$u_k = -\varphi_k \text{ — на катодной поверхности } AB.$$

Здесь  $U$  — напряжение, подаваемое на электроды,  $\varphi_{анпр}$ ,  $\varphi_k$  — соответственно анодный и катодный потенциалы. Локальная плотность тока на границах  $D_z$  определяется равенством

$$i_1 = \kappa (\partial u / \partial n_1),$$

где  $\kappa$  — коэффициент электропроводности,  $\partial / \partial n_1$  — производная в направлении внутренней к области  $D_z$  нормали к границе. На изоляторе, через который ток не течет, имеем

$$\partial u / \partial n_1 = 0.$$

Граница изолятора — силовая линия. При сделанных допущениях анодная поверхность является эквипотенциальной. Локальная плотность тока на обрабатывавшейся анодной поверхности на предельном режиме постоянна. На участке анодной поверхности, форма которой будет определяться, имеем

$$i_{1a} = i_{1пр} = \kappa (\partial u / \partial n_1) |_{AED} = \text{const.}$$

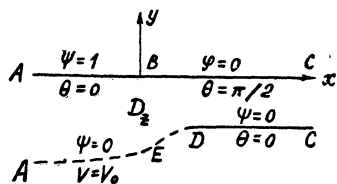


Рис. 2. Область межэлектродного зазора.

Этот участок  $AED$  (рис. 2) переходит в параллельный катоду и изолятору участок  $DC$ . Участок анодной поверхности  $DC$ , не подвергавшийся обработке, отстоит от изолятора  $BC$  на расстоянии  $h_1$ .

Рассматриваемая задача относится к классу обратных смешанных краевых задач.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\psi = \frac{u - U + \varphi_{анпр}}{-\varphi_k - U + \varphi_{анпр}}, \quad x = x_1 / h_1, \quad y = y_1 / h_1, \quad n = n_1 / h_1.$$

Для отыскания неизвестного участка границы  $AED$  заметим, что функция  $\psi(x, y)$  — решение уравнения Лапласа

$$\Delta \psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

в области  $D_z$ ,  $z = x + iy$ , (рис. 2) и удовлетворяет граничным условиям

$$\psi_{AB} = 1, \psi_{AEDC} = 0, \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{BC} = 0, \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{AED} = V_0, \quad (2)$$

где

$$V_0 = \frac{i_{\text{пр}} h_1}{\alpha (-\varphi_k - U + \varphi_{\text{анп}})}. \quad (3)$$

Введем комплексный потенциал  $W = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi$  гармонически сопряженная к  $\psi$  аналитическая в  $D_z$  функция. В силу граничных условий (2) функция  $\varphi$  на  $BC$  и  $AED$  удовлетворяет соотношениям

$$\varphi_{BC} = 0, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{AED} = V_0. \quad (4)$$

Второе равенство из (4) эквивалентно условиям

$$dW/dz|_{AED} = V_0 \text{ или } \varphi_{AED} = V_0 s + \text{const.}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\chi = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} = \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{V}{V_0} - i\theta \right). \quad (5)$$

В силу граничных условий и гидродинамической интерпретации подобных задач формообразования (см. [1],  $V$  — модуль вектора скорости фиктивного потока идеальной несжимаемой жидкости,  $\theta$  — угол его наклона к оси  $x$ ), имеем

$$\theta_{AB} = 0, \theta_{BC} = \frac{\pi}{2}, \theta_{DC} = 0, V_{AED} = V_0. \quad (6)$$

Граничные условия (2) и соотношение (6) позволяют установить области определения функций  $W$  и  $\chi$  (рис. 3а, 3б). В определении области  $D_\chi$  положено, что уравнение границы  $AED$   $y = f(x)$ , где  $f$  является монотонной функцией.

Осуществим конформное отображение областей  $D_W$  и  $D_\chi$  на верхнюю полуплоскость изменения вспомогательной комплексной переменной  $\zeta$ . Отображение

$$\cos \pi i W = \zeta \quad (7)$$

переводит  $D_W$  на  $D_\zeta$  (рис. 3в) со следующим соответствием точек (нормировкой): точка  $A$  переходит в бесконечность,  $B$  — в точку  $\zeta = -1$ ,  $C$  — в точку  $\zeta = 1$ . Отображение  $\chi_1 = \chi e^{-\pi}$  по-

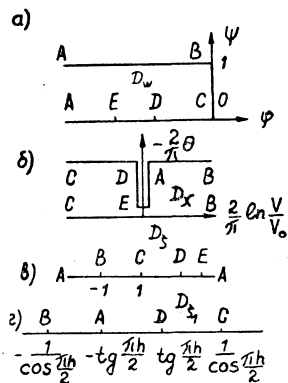


Рис. 3. Области вспомогательных переменных..

ворачивает область, отображение

$$\zeta_1 = \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi \lambda_1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}}, \quad (8)$$

(см. [5], с. 146 при  $a=0$ ), где  $h=ED$  — величина отрезка границы  $ED$  в плоскости  $D_\lambda$ , пока неизвестная, переводит  $D_\lambda$  в верхнюю полуплоскость  $D_{\zeta_1}$  с нормировкой, указанной на рис. 3г. Отображение  $D_{\zeta_1}$  на  $D_\zeta$  осуществляется с помощью дробно-линейной функции

$$\zeta_1 = \frac{1 - \zeta \sin(\pi h/2)}{\cos(\pi h/2) (\zeta - \sin(\pi h/2))}. \quad (9)$$

Из (5), (7)–(9) получаем важное равенство

$$\begin{aligned} & \operatorname{th}^2 \left( i \ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right) + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2} = \\ & = \frac{1}{\cos^2(\pi h/2)} \cdot \frac{1 - \cos \pi i W \sin(\pi h/2)}{\cos \pi i W - \sin(\pi h/2)}, \end{aligned} \quad (10)$$

из которого можно установить связь  $z(W)$  и найти параметрические уравнения границы  $AED$ .

Однако удобнее в качестве вспомогательного параметра использовать  $\zeta$ , отыскивая функцию  $z(\zeta)$ . Учитывая (7) и  $d\zeta = -\pi i \sqrt{1 - \zeta^2} dW$ , получаем следующую связь дифференциалов

$$dz = -\frac{1}{\pi V_0} \frac{\zeta - s + \sqrt{1 - 2\zeta s + s^2}}{\zeta^2 - 1} d\zeta, \quad (11)$$

где

$$s = \sin(\pi h/2). \quad (12)$$

Интегрируя (11), находим соотношение между точками  $D_\zeta$  и  $D_z$

$$z = -\frac{1}{\pi V_0} \int_{\zeta_B}^{\zeta} \frac{\zeta - s + \sqrt{1 - 2\zeta s + s^2}}{\zeta^2 - 1} d\zeta + C.$$

Пусть начало координат области  $D_z$  в точке  $B$ , тогда константа  $C$  находится из соответствия  $z_B=0$  и  $\zeta_B=-1$ . Последний интеграл выражается через элементарные функции

$$\begin{aligned} z = x + iy = & \frac{1}{\pi V_0} \left( \frac{1+s}{2} \ln \frac{\sqrt{1-2\zeta s + s^2} - (1+s)}{(1+\zeta)(\sqrt{1-2\zeta s + s^2} + (1+s))} + \right. \\ & \left. + \frac{1-s}{2} \ln \frac{\sqrt{1-2\zeta s + s^2} + 1-s}{(1-\zeta)(\sqrt{1-2\zeta s + s^2} - (1-s))} \right) + C. \end{aligned}$$

Константа интегрирования находится после предельного перехода  $\zeta \rightarrow -1$  и раскрытия неопределенности

$$C = \frac{1+s}{2\pi V_0} \ln \left[ -\frac{2(1+s)^2}{s} \right] + \frac{1-s}{2\pi V_0} \ln 2s.$$

После некоторых преобразований соответствие  $z(\zeta)$  представляется выражением

$$z = x + iy = \frac{1+s}{\pi V_0} \ln \frac{2(1+s)}{\sqrt{1-2\zeta s + s^2} + 1 + s} - \frac{1-s}{\pi V_0} \ln \frac{2s}{\sqrt{1-2\zeta s + s^2} - (1-s)}, \quad (13)$$

$$\zeta \neq \pm 1.$$

На каждом отрезке изменения  $\zeta$  выбирается соответствующая ему ветвь корня. На участке вещественного значения  $\zeta$ ,  $1 < \zeta < \zeta_D$ , соответствующем искомой линии, корень равен  $i\sqrt{2\zeta s - (1+s^2)}$ ; на  $DC$  равен  $\sqrt{1-2\zeta s + s^2}$ . В точке  $D$  должно быть равенство  $\zeta_D = (1+s^2)/(2s)$ . Но в этой же точке  $u_D = -1$  (рис. 2). Подставляя последние равенства в левую и правую части (13), получаем связь

$$x_D - i = \frac{1+s}{\pi V_0} \ln 2 + \frac{1-s}{\pi V_0} \ln \frac{2s}{1-s} + \frac{1-s}{\pi V_0} i\pi. \quad (14)$$

Сравнивая вещественные и мнимые части (14), находим

$$s = 1 - V_0, \quad (15)$$

$$x_D = \frac{1}{\pi V_0} \left( (1+s) \ln 2 + (1-s) \ln \frac{2s}{1-s} \right). \quad (16)$$

Величина  $s$  определяется равенствами (3) и (15). В окрестности бесконечно удаленной точки  $A$  анодной поверхности влияние изолятора мало; очевидно, что там ширина зазора будет равна

$$H = \frac{x(-\varphi_k - U + \varphi_{анр})}{i_{1пр}}.$$

Отсюда  $V_0 = h_1/H \leq 1$  и

$$s = 1 - V_0 = (H - h_1)/H. \quad (17)$$

Величина параметра  $s$  представляется в виде отношения величины максимального углубления  $H - h_1$  на анодной поверхности к максимальной величине зазора предельного режима  $H$ .

Подставляя (15) в (13), получаем для  $AED$ , где  $1 - 2\zeta s + s^2 < 0$ , выражение

$$z = x + iy = \frac{1}{\pi} \frac{1+s}{1-s} \ln \frac{2(1+s)}{(1+s) + i\sqrt{2\zeta s - (1+s^2)}} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{2s}{s-1 + i\sqrt{2\zeta s - (1+s^2)}}. \quad (18)$$

Выделяя из правой части (18) вещественную и мнимую части, получаем следующие параметрические уравнения искомой анодной границы

$$x = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1+s}{1-s} \ln \frac{2(1+s)^2}{s(1+\zeta)} + \ln \frac{2s}{\zeta-1} \right), \quad (19)$$

$$y = -1 - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1+s}{1-s} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\zeta s - (1+s^2)}}{1+s} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\zeta s - (1+s^2)}}{1-s} \right). \quad (20)$$

Из (19) при  $\zeta = \frac{1+s^2}{2s} = \zeta_D$  получается (16), а при  $\zeta \rightarrow \infty$   $x \rightarrow -\infty$ ,  $y \rightarrow -\frac{1}{1-s} = -\frac{H}{h_1}$ . Линия  $AED$  имеет точку перегиба  $E$ . В этой точке  $\chi_1 = hi$ ,  $\zeta_1 = 0$ ,  $\xi = 1/s$ , что на основании (19) и (20) дает следующие координаты точки перегиба

$$x_E = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1+s}{1-s} \ln 2(1+s) + \ln \frac{2s^2}{1-s} \right),$$

$$y_E = -1 - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1+s}{1-s} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-s}{1+s}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} \right). \quad (21)$$

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов. В качестве параметра выбрано отношение величины максимального углубления к первоначальному зазору

$$k = \frac{H-h_1}{h_1} = \frac{s}{1-s}.$$

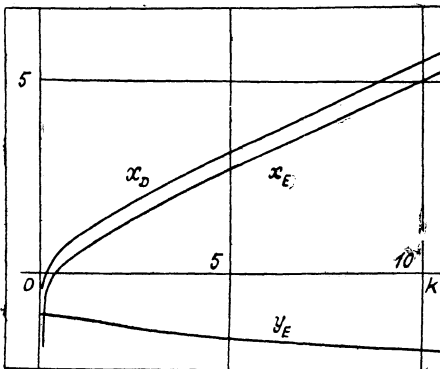


Рис. 4. Зависимость величины зоны обработки и положения точки перегиба от глубины обработки.

Графики зависимости  $x_D(k)$ ,  $x_E(k)$ ,  $y_E(k)$  на рис. 4. Величина  $x_D(k)$  характеризует протяженность зоны электрохимической обработки. Расчеты показали, что с увеличением глубины обработки эта зона увеличивается. При больших значениях  $k$  ( $k > 5$ ) зависимость  $x_D$  от  $k$  близка к линейной.

Имеет место приближенное соотношение

$$x_D \approx 0.5k + 0.8, k > 5.$$

При больших  $k$  разность значений  $x_D - x_E$  остается приблизительно постоянной

$$x_D - x_E \approx 0.7.$$

Зона ЭХО будет совпадать с величиной катода, когда  $x_D = 0$ . Величина  $k$  в этом случае определяется из трансцендентного уравнения

$$(1 + k) \ln 4 + \ln k = 0$$

или эквивалентного ему

$$k = \exp(-(1 + k) \ln 4) = f(k).$$

Последнее уравнение имеет единственное решение  $k = 0.191$  и разрешимо методом последовательных приближений

$$k^{(n)} = f(k^{(n-1)}).$$

Доказательство основано на методе сжатых отображений ([6], с. 156), ибо при  $k > 0$ ,  $|f'(k)| < 1$ .

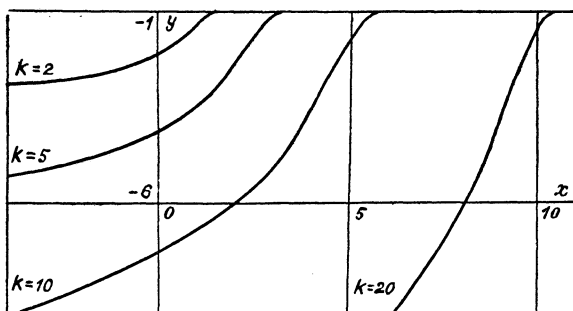


Рис. 5. Границы анода при предельном режиме.

На рис. 5 представлены очертания анодных поверхностей при некоторых значениях  $k$ . Построенные границы действительно являются монотонными.

Автор выражает благодарность З. Б. Садыкову за предоставленный экспериментальный материал.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клоков В. В. Обратные задачи предельной электрохимической обработки. — Труды семинара по крайевым задачам. Вып. 13. Казань, Изд-во Казан. ун-та, 1976.
2. Гуревич И. М. Теория струй идеальной жидкости. М., ГИФМЛ, 1961.

3. Лайнер В. И. Современная гальванотехника. М., „Металлургия“, 1967.
4. Мороз И. И. и др. Электрохимическая обработка металлов. М., „Машиностроение“, 1969.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., ГИФМЛ, 1958.
6. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. М., „Просвещение“, 1968.

*Доложено на семинаре 5 мая 1976 г.*