УДК 519.1

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВОК С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОЗИЦИЯМИ

В. С. Шевелев

Введение

Одним из важнейших разделов бурно развивающейся в настоящее время перечислительной комбинаторики является восходящая еще к Монмору, Эйлеру и Люка́ теория перечисления перестановок с ограниченными позициями. Так, Эйлер дал изящное рекуррентное решение задачи о встречах («Le probléme des recontres») — о числе перестановок без неподвижных элементов, которая была одной из первых (если не первой!) задач, эффективно решенных методом включения—исключения (Монмор, 1713), задолго до начала систематического использования этого метода, начиная с 1854 года, Да Сильвой (см. [36, с. 62]). В 1891 году Люка́ сформулировал свою знаменитую «Probléme des ménages» — задачу о супружеских парах, сводящуюся к перечислению перестановок элементов $1, 2, \ldots, n$, в которых элемент i не занимает позиций i и $i+1$ $(i=1, \ldots, n-1)$, а элемент n не занимает позиций 1 и n, причем в этой абстрактной формулировке задачу еще раньше (1878) рассматривали Тейт, Кэли и Мюир. Задача Люка́ оказалась настолько содержательной, что явилась важной вехой в комбинаторных исследованиях таких видных математиков, как Мак-Магон, Тушар, Капланский, Риордан, Керавала, Ямамото, Виман, Мозер и др. Подробную библиографию по исследованиям этой задачи, к которой можно добавить работы [47], [90], [101], [104], [120], см. в [107]. На пути к своему ренессансу теория перечисления перестановок с ограниченными позициями стимулировала развитие теории перманента, у истоков которой стояли Бине и Коши, и уже в 20 веке — более общей теории ладейных многочленов, начала которой заложены в сороковых годах Риорданом и Капланским.[1]

Теория перманентов (0,1)-матриц, несомненно, является важнейшим подразделом теории перечисления перестановок с ограниченными позициями. Это связано с тем, что перманент (0,1)-матрицы естественно трактовать как число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$ (где n — порядок матрицы), ограничение на пози-

[1] Здесь следует сказать о том, что по существу впервые ладейная техника перечисления применялась замечательным советским математиком С. Е. Аршоном, погибшим в сталинских застенках. К сожалению, рукопись его книги «Новая комбинаторная алгебра» бесследно исчезла во время войны (см. по этому поводу [8, с. 166]).

ции которых задается множеством позиций нулевых элементов матрицы. В самом деле, если какая-либо диагональ матрицы (т. е. множество n неколлинеарных ее позиций) содержит по крайней мере один нулевой элемент, то ее вклад в величину перманента (по его определению) равен 0; в противном случае этот вклад оказывается равным 1. Таким образом, величина перманента совпадает с числом диагоналей, соответствующих «допустимым» перестановкам.

Несмотря на то, что перманент (0,1)-матрицы является столь естественным инструментом исследования, рассматриваемая теория не сводится лишь к теории перманентов (0,1)-матриц. Действительно, с одной стороны, имеются неперманентные методы перечисления перестановок с ограниченными позициями (такие, как метод коэффициентов, основанный на главной теореме Мак-Магона [11, с. 269—272], и развивающиеся в последнее десятилетие методы трансфер-матрицы и разложения на свободные моноиды [41, с. 354—357; 362—366; пункты 4.7.7, 4.7.8; 4.7.15—4.7.17]). С другой стороны, в рамки перманентов не укладывается, например, перечисление редуцированных k-строчных латинских прямоугольников, которое является по сути перечислением комплексов, состоящих из $k-1$ противоречивых перестановок[1] без единичных циклов; перечисление перестановок с ограниченными позициями и фиксированным числом циклов и т. д.

В настоящем обзоре последовательность изложения согласуется с некоторой тезисно представленной автором в [77] классификацией основных направлений теории. Ряд параграфов посвящен разделам теории, прогресс в развитии которых появился лишь в самое последнее время (§§ 7, 12—17), либо пока только намечен (§§ 18—20). С другой стороны, наиболее развитыми направлениями представляются направление оценок перманента (0, 1)-матриц, важнейшими достижениями которого являются верхние оценки Минка—Брэгмана и нижние оценки, связанные с неравенством Ван дер Вардена—Егорычева—Фаликмана для перманента дважды стохастических матриц, и направление перечисления перестановок с конечно-диагональными множествами «разрешенных» позиций циклического и теплицева типов. Важнейшие результаты этого менее известного направления представлены в §§ 2—6.

§ 1. Определение класса перестановок с ограниченными позициями. Некоторые задачи

Пусть A — квадратная (0, 1)-матрица порядка n и $\mathfrak{D}_n^*(A)$ — множество ее диагоналей, составленных из единиц. Если

[1] В последнее время, по-видимому, с легкой руки переводчиков в ходу стали также эквивалентные термины «диссонирующих» или «несогласующихся» [11], [41] перестановок.

$\mathfrak{B}_n^*(A) \neq \varnothing$, то каждой его диагонали ставится в соответствие матрица инцидентности некоторой перестановки σ из элементов $1, 2, \ldots, n$. Совокупность всех таких перестановок составляет по определению класс $\mathfrak{B}_n(A)$ перестановок с ограниченными позициями с характеристической матрицей A. Из определения следует, что $|\mathfrak{B}_n(A)| = \operatorname{per} A$. Не уменьшая общности, будем предполагать, что перманентные миноры всех единиц матрицы A положительны. Действительно, при «стирании» в A любой единицы с нулевым перманентным минором (т. е. замене ее нулем) класс $\mathfrak{B}_n(A)$ не изменится. Несколько позже покажем, что при нашем предположении матрица A всегда имеет дважды стохастическую модель [30, с. 51]. Множество E позиций всех нулевых элементов в A будем называть системой ограничений на позиции перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$. Класс $\mathfrak{B}_n(A)$ будем называть циклическим, теплицевым и т. д. по типу характеристической матрицы A.

Отметим, что в ряде случаев перманент позволяет перечислять и перестановки $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$ с теми или иными дополнительными ограничениями на σ (фиксация чисел точек (слабого) превышения [41, с. 44], неподвижных точек, фиксация отдельных позиций перестановок и т. д.). Некоторые задачи такого рода без ограничений на позиции перестановок, т. е. в случае, когда $A = J_n$ — $(n \times n)$-матрица из единиц, рассмотрены в монографиях [11], [41]. Приведем лишь несколько примеров решения таких задач в терминах перманентов в случае произвольной характеристической матрицы класса.

Пример 1. Обозначим $A^{(1)}(x)$ матрицу, получаемую из A заменой элементов $\{a_{ii}\}$ ее главной диагонали на $\{xa_{ii}\}$. Тогда $\operatorname{coeff}_{x^r} \operatorname{per} A^{(1)}(x)$ дает число перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$, имеющих r неподвижных точек.

Пример 2. Пусть $A^{(2)}(x)$ — матрица, получаемая из A заменой элементов $\{a_{ij}\}$, для которых $j \geqslant i$, на $\{xa_{ij}\}$. Тогда $\operatorname{coeff}_{x^r} \operatorname{per} A^{(2)}(x)$ дает число перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$, имеющих r точек слабого превышения, для которых $\sigma(i) \geqslant i$. Известно [41, с. 44], что в случае $A = J_n$ это число совпадает с числом Эйлера $A(n, r)$.

Пример 3. Точку i, для которой $\sigma(i) = i \oplus d (\operatorname{mod} n)$, назовем точкой d-сдвига по модулю n. Обозначим $A^{(3)}(x)$ матрицу, получаемую из A заменой элементов $\{a_{ij}\}$, для которых $j = i \oplus d (\operatorname{mod} n)$, элементами $\{xa_{ij}\}$. Тогда $\operatorname{coeff}_{x^r} \operatorname{per} A^{(3)}(x)$ дает число перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$, имеющих в точности r точек d-сдвига.

Совершенно очевидно, что перечень таких примеров може быть продолжен как угодно далеко. Подключение $\det A$ дае возможность в приведенных примерах дополнительно фиксировать четность перестановок. Так, число четных перестановок в примерах 1—3 равно $\frac{1}{2}\operatorname{coeff}_{x^r}(\operatorname{per} A^{i}(x)+\det A^{(i)}(x))$, а нечетных — $\frac{1}{2}\operatorname{coeff}_{x^r}(\operatorname{per} A^{(i)}(x)-\det A^{(i)}(x))$, $i=1, 2, 3$.

Примеры 1—3 иллюстрируют то положение, что в теории перестановок с ограниченными позициями имеет смысл рассматривать не только (0, 1)-матрицы.

Отметим, однако, что существуют задачи, трудность которых при переходе от $A=J_n$ к произвольной характеристической матрице класса повышается столь значительно, что требует принципиально новых подходов. Важным примером задачи такого рода является задача перечисления перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$ с фиксированным числом циклов[1], общий алгоритм решения которой будет представлен в § 12. Приведем еще несколько естественных и, насколько известно автору, новых проблем.

а) i называется точкой спуска подстановки σ, если $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Проблема 1. Найти алгоритм перечисления перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$, имеющих r точек спуска.

В случае $A=J_n$ число перестановок σ, имеющих r—1 точек спуска, совпадает с упоминавшимся выше числом Эйлера $A(n, r)$.

б) Элемент σ_i перестановки называется рекордом [41, с. 37], если $\sigma_i > \sigma_j$ для всех $j < i$.

Проблема 2. Найти алгоритм перечисления перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$, имеющих r рекордов.

В случае $A=J_n$ число перестановок σ, имеющих r рекордов, совпадает с абсолютной величиной чисел Стирлинга 1 рода.

в) Перестановка σ называется альтернирующей [11, с. 170], если $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \ldots$.

Проблема 3. Найти алгоритм перечисления альтернирующих перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$.

Проблема 3 в случае $A=J_n$ известна под названием проблемы Андре. В этом случае производящей экспонентой чисел альтернирующих перестановок является сумма секанса и тангенса [151], [11, с. 170], [41, с. 219].

§ 2. Работы по вычислению перманента (0, 1)-матриц и его оценкам

Вычислению перманента (0, 1)-матриц и его оценкам посвящен большой цикл работ различных авторов (подробную биб-

[1] Говоря о циклах перестановок, мы имеем в виду очевидную биекцию между перестановками и подстановками с фиксированной первой строкой (см., например, [11, с. 172], где рассмотрено разложение перестановок в произведение непустых непересекающихся циклов).

лиографию см. в [30], [129], [132]). Работы, связанные с верхними и нижними оценками перманента, распадаются на две большие ветви:

1) Работы, группировавшиеся вокруг гипотезы Райзера [144] и более общей гипотезы Минка [126] о верхних оценках перманента и завершившиеся блестящим доказательством обеих гипотез Л. М. Брэгманом [7].

2) Работы, группировавшиеся вокруг гипотезы Ван дер Вардена [156] о минимуме перманента дважды стохастических матриц. Заметим, что любые оценки снизу перманента дважды стохастических матриц влекут соответствующие оценки снизу перманента в классе (0, 1)-матриц с одинаковыми строчными и столбцовыми суммами (что достигается путем их нормировки). Сюда же относятся работы, связанные с более слабой гипотезой Эрдёша—Реньи [110], завершившиеся ее одновременным доказательством в статьях Банга, Ворхува и Фридленда [98], [113], [157]. После этого успеха через очень короткий промежуток времени была доказана, наконец, и гипотеза Ван дер Вардена в работах советских математиков Г. П. Егорычева и Д. И. Фаликмана [16]—[18], [45]. Подробное изложение доказательства содержится в монографии К. А. Рыбникова [37, с. 110—118].

О длинной цепи промежуточных результатов по гипотезам Ван дер Вардена, Райзера, Минка и Эрдёша—Реньи прекрасная информация имеется в работах [30], [129]; там же отражен и ряд работ, посвященных оценкам перманента (0, 1)-матриц без ограничений на строчные и столбцовые суммы. Отметим, что доказательство гипотезы Минка имело замечательное продолжение: спустя 5 лет (1978) Шривер [147] нашел короткое и эффектное доказательство, основанное на совершенно иной идее (см. [30, с. 114—116]; [37, с. 119—120]).

Пусть Λ_n^k означает класс (0, 1)-матриц, строчные и столбцовые суммы которых равны k. Важнейшей нерешенной до сих пор гипотезой является гипотеза Шривера и Валианта [148]: если $\lambda_k(n)=\min\{\operatorname{per} A \mid A\in\Lambda_n^k\}$, то

$$\theta_k=\lim_{n\to\infty}(\lambda_k(n))^{\frac{1}{n}}=k\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1}.$$

В [148] авторы, основываясь на характеристическом свойстве перманента матрицы $A\,(\in\Lambda_n^k)$, состоящем в его равенстве числу различных представителей системы множеств $\{X_i\}_{i=1}^n$, матрицей инцидентности которой является A [38, с. 90], получили оценку $\theta_k\leqslant k\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1}$.

Таким образом, для доказательства гипотезы достаточно показать, что $\theta_k \geqslant k\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1}$. Ворхув [157] с помощью совершенно элементарных соображений сделал это несколько раньше в случае $k=3$. Таким образом, актуальным является случай $k \geqslant 4$.

Вернемся к классу перестановок $\mathfrak{B}_n(A)$. Обозначим через H_σ матрицу инцидентности перестановки σ. Положим

$$B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)} H_\sigma. \tag{2.1}$$

Непосредственно из (2.1) вытекает, что элемент $b_{r,l}$ матрицы B равен числу перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$, удовлетворяющих условию $\sigma(r)=l$. Следовательно, ненулевые элементы матрицы B суть перманентные миноры единиц матрицы A, а потому все строчные и столбцовые суммы матрицы B равны $\operatorname{per} A$. Это означает, что матрица A имеет дважды стохастическую модель.

Естественно рассмотреть более простой случай «равноправия» всех допустимых позиций для подстановок класса $\mathfrak{B}_n(A)$ в том смысле, что все перманентные миноры единичных элементов матрицы A равны между собой. Предварительно рассмотрим еще более простой случай, когда перманентные миноры вообще всех элементов матрицы A одинаковы. Этот случай связан со следующим известным предположением Бруальди и Фореггера (1975) [103]: если A — квадратная $(0, 1)$-матрица порядка n, у которой все подперманенты порядка $n-1$ имеют одинаковое ненулевое значение, то $A=J_n$ или I_n+P, где $P=P_n$ — матрица перестановки цикла $(1, 2, \ldots, n)$.

Это предположение оказалось весьма глубоким и было доказано лишь спустя 8 лет индийским математиком Бапатом [99]. Таким образом, поскольку $\operatorname{per}(I_n+P)=2$, в случае равенства перманентных миноров всех элементов матрицы $A \neq J_n$ класс $\mathfrak{B}_n(A)$ содержит лишь две перестановки: тождественную и 1-сдвига по модулю n.

Вернемся к случаю равенства перманентных миноров единиц матрицы A, предполагая дополнительно, что $A \in \Lambda_n^k$. Оценивая снизу перманент дважды стохастической матрицы $(\operatorname{per} A)^{-1}B$ с помощью неравенства Ван дер Вардена—Егорычева—Фаликмана, а сверху — перманент матрицы $k(\operatorname{per} A)^{-1}B \in \Lambda_n^k$ с помощью неравенства Минка—Брэгмана, получим двойное неравенство

$$\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}} \operatorname{per} A \leqslant (\operatorname{per} B)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{k}(k!)^{\frac{1}{k}} \operatorname{per} A.$$

Переходя к последовательностям матриц $\{A_n\} \subset \Lambda_n^k$ и $\{B_n\}$ (2.1), в рассматриваемом случае при $k=k(n)\uparrow\infty$, находим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{per} A_n (\operatorname{per} B_n)^{-\frac{1}{n}}\right) = e. \tag{2.2}$$

Наше предположение состоит в том, что если $k(n)\sim n$ $(n\to\infty)$, то предельное соотношение (2.2) остается справедливым и без условия равенства перманентных миноров единиц матрицы A.

Гипотеза 1. Если матрица B_n получается путем замены в матрице $A\in\Lambda_n^{k(n)}$ единиц их перманентными минорами, то при $k(n)\sim n$ $(n\to\infty)$ имеет место равенство (2.2).

Проблематика, связанная с нижними оценками перманента дважды стохастических матриц, после доказательства гипотезы Ван дер Вардена получила развитие в направлении получения оценок перманента матриц, имеющих предписанное множество нулевых элементов. Здесь ряд результатов был получен Минком [130], [134]. Однако его гипотеза [132, с. 135] о том, что минимум перманента дважды стохастических матриц порядка n с нулевой главной диагональю достигается на матрице с элементами $a_{ij}=\frac{1}{n-1}$ $(1-\delta_{i,j})$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, (при единственности минимизирующей матрицы) остается до сих пор недоказанной.

Следуя Бруальди [102], обозначим через $\Omega_n(A)$ множество дважды стохастических матриц с нулями, совпадающими с нулями матрицы A. Ясно, что если B — матрица (2.1), то $(\operatorname{per} A)^{-1}B\in\Omega_n(A)$. Если $(\operatorname{per} A)^{-1}B$ при этом является матрицей с наименьшим на $\Omega_n(A)$ перманентом, то A по Бруальди называется барицентрической матрицей. Поскольку в этом случае перманент минимизирующей матрицы равен

$$(\operatorname{per} A)^{-n}\operatorname{per} B=\left(\operatorname{per} A\,(\operatorname{per} B)^{-\frac{1}{n}}\right)^{-n},$$

то из (2.2) следует, что если A — барицентрическая матрица с равными перманентными минорами единиц, то минимум перманента на $\Omega_n(A)$ имеет порядок e^{-n}. Поскольку матрица J_n-I, как известно [30, с. 55], имеет равные перманентные миноры единиц, то естественным обобщением упомянутой выше гипотезы Минка является следующее предположение.

Гипотеза 2. Если $(0, 1)$-матрица A имеет равные перманентные миноры единиц, то она является барицентрической.

Доказательство этого предположения не только повлекло бы положительное решение гипотезы Минка, но и внесло бы вклад в решение одной из проблем Бруальди [102] об описании множества всех барицентрических матриц. Отметим также работы Форегтера и Сикхорна [112] и Зеок-Зан-Сонга [149], [150] по этой проблематике.

В двух других работах [131], [133] Минк продолжил общее исследование перманентов k-диагональных $(0, 1)$-циркулянтов, начатое в основополагающей по этому предмету статье Метрополиса, М. Стейна и П. Стейна [125] (по поводу предшествовавших последним работам частных результатов отсылаем читателя к монографии [30]). В работе Идеса, Прагера и Себерри [108] получена явная формула для перманента кронекеровского произведения матриц $I+P_k$ и J_n. Напомним, что $(I+P_k)\times J_n$ — квадратная $(0,1)$-матрица порядка kn, получаемая из матрицы $I+P_k$ путем замены каждой ее единицы $n\times n$-блоком единиц, а каждого ее нуля — $n\times n$-блоком нулей. В [108] получена красивая формула

$$\operatorname{per}((I+P_k)\times J_n)=(n!)^k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^k.$$

На основании недавнего результата Кузика [106], конструктивно доказавшего предположение Френеля, сформулированное еще в прошлом веке (1895), о том, что сумма $S_n^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^k$ P-рекурсивна и, более точно, удовлетворяет линейному однородному рекуррентному уравнению с полиномиальными коэффициентами порядка $\left[\frac{k+1}{2}\right]$, заключаем, что P-рекурсивной при каждом k является и последовательность перманентов $\{\operatorname{per}((I+P_k)\times J_n)\}_{n\geqslant 1}$, причем если

$$S_n^{(k)}=\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_j^{(k)}(n)\,S_{n-j}^{(k)},$$

то

$$\operatorname{per}((I+P_k)\times J_n)=\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} b_j^{(k)}(n)\operatorname{per}((I+P_k)\times J_{n-j}),$$

где

$$b_j^{(k)}(n)=(n(n-1)\ldots(n-j+1))^k a_j^{(k)}(n).$$

В связи с этим, нам представляется естественным следующе предположение.

Гипотеза 3. При каждом $k\in N$ последовательность перманентов матриц $\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}x_iP_k^{i-1}\right)\times J_n\right\}_{n\geqslant 1}$, где $(x_1,\ldots,x_k)\in C^k$, P рекурсивна.

Прекрасная информация о наиболее известных алгоритмах вычисления перманентов имеется в [30, с. 124—131]. К этим алгоритмам в начале 80-х годов добавились оригинальный алгоритм вычисления перманентов $(0,1)$-матриц Каллмана [121] и быстрый алгоритм приближенного вычисления перманентов Голдшлагера [117]. Последний алгоритм ценен в связи с тем, что, как показал Валиант [155], вычисление перманента (0, 1)-матриц — полная проблема для класса задач, связанных с вычислениями, не выполнимыми за полиномиальное время.

Интересный подход к интегральному представлению перманентов и их вычислению был предложен Г. П. Егорычевым в [19]. Однако он опирается на поставленную в [19] трудную комбинаторную проблему о перечислении всех (квадратных и прямоугольных) подматриц данной матрицы, имеющих одинаковую сумму элементов при одинаковой четности суммы линейных размеров, в решении которой пока лишь намечается прогресс. Следует отметить, далее, цикл работ Г. П. Егорычева по полиномиальным тождествам для перманента [13]—[15] и его обобщения [20] и работу общего характера Г. П. Егорычева и А. М. Кытманова [21] по многомерным интегральным представлениям и вычислениям перманента путем решения специальных систем линейных уравнений. Наконец, отметим работу Л. М. Коганова [24], в которой путем комбинаторной интерпретации перманента, основанной на идеях Рота [2], [143], дан чисто комбинаторный вывод формул Г. П. Егорычева из работ [13]—[15], подобно тому, как ранее Крапо [105] получил доказательство формулы Райзера [35] путем классификации сюръективных отображений множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ в различные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(m \leqslant n)$ и обращения Мёбиуса на множестве подмножеств; его же работу [25], в которой дан комбинаторный вывод соотношений Врба [158] между перманентом и детерминантом квадратных матриц, и две работы С. П. Коваленко [22], [23], в которых с единых позиций обобщаются классические формулы Бине—Коши и Лапласа для перманентов.

Из работ автора по вычислению и оценкам перманента отметим статьи [47], [49], [50], [52], [55]—[58], [61], [65], [66], [68], [70], [75], [78], [81], [82], [88], [89], [91]. Ряд основных результатов и идей этих работ будет обсужден в последующих параграфах обзора.

§ 3. Рекуррентные формулы для перманентов циклических, Теплицевых и близких к ним классов матриц

Важной работой, внесшей существенный вклад в фундамент единой теории перманентов циклических матриц, явилась уже цитированная выше статья Метрополиса и М. и П. Стейнов [125], в которой предложен глубокий алгебраический подход к построению рекуррентных формул для перманентов (0, 1)-циркулянтов в случае, когда единицы в каждой строке образуют серию фиксированной длины. Этот подход, который можно было бы назвать «методом характеристических многочленов матриц преобразования», был спустя 16 лет (1985) усовершенствован Минком [131], что позволило ему получить рекуррентные формулы для перманентов $(0,1)$-циркулянтов, в каждой строке которых единицы образуют несколько серий фиксированной длины. Путем дальнейшего усовершенствования указанного метода нами получены не только общие рекуррентные формулы для перманентов k-диагональных циркулянтов над полем комплексных чисел [61], но и рекуррентные формулы для перманентов и детерминантов теплицевых матриц [70], [91], z-циркулянтов, получаемых из циркулянтов умножением элементов, находящихся ниже главной диагонали на $z \in \mathbf{C}$ [70], а также для последовательностей перманентов и детерминантов матриц, отличающихся от циклических или теплицевых на конечном множестве позиций [66], [78].

Отметим, что метод характеристических многочленов матриц преобразования содержит 3 основных компонента: 1) применение теоремы Лапласа о разложении перманента по нескольким первым строкам; 2) построение специальных алгоритмических матриц преобразования; 3) применение теоремы Гамильтона—Кэли об аннулировании матрицей своего характеристического многочлена. В работах [61], [70], [74] автором получено явное построение алгоритмических матриц преобразования метода как для последовательностей перманентов, так и для последовательностей детерминантов. Приведем основные теоремы об общих рекуррентных соотношениях. Пусть $X=(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbf{C}^k$ (при желании можно считать $\{x_i\}$ элементами ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей 1). Обозначим через $C_n(X)$ циркулянт $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i P_n^{i-1}$ $(n \geqslant k)$. Символом $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$, $l=2, \ldots, k-1$, обозначим квадратную матрицу порядка $\binom{k-1}{l-1}$, строки которой, имеющие лексикографическую нумерацию (каждой строке ставится в соответствие сочетание $1=j_1< <j_2< \ldots <j_l$ из элементов $1, 2, \ldots, k$), таковы:

$$\begin{cases} \underbrace{0\ldots0}_{m(j_1,\ldots,j_{l-1})} \; x_{j_l} \underbrace{0\ldots0}_{\rho_1} x_{j_{l-1}} \underbrace{0\ldots0}_{\rho_2} x_{j_{l-2}} \ldots x_{j_2} \underbrace{0\ldots0}_{\rho_{l-1}} x_{j_1} 0\ldots0, \\ \text{если } j_l<k, \\ \underbrace{0\ldots0}_{m(j_1,\ldots,j_{l-1})} \; x_k 0\ldots0, \text{ если } j_l=k, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$m(j_1, \ldots, j_{l-1})=\binom{k-1}{l-1}-\sum_{h=1}^{l-1}\binom{k-1-j_h}{l-h}-1,$$

$$\rho_s=\binom{k-1-j_{l-s}}{s}-\binom{k-1-j_{l-s+1}}{s}-1.$$

$\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ назовем алго-матрицей индекса $l-1$ (ALG — не только сокращение слова algorithm, но и аббревиатура словосочетания anti-lexico-graphical, соответствующего антилексикографической последовательности индексов элементов в (3.1)). Положим $\nu_k = 2^{k-1} - 2$.

Теорема 3.1. Если

$$f_k(\lambda; X) = \prod_{l=2}^{k-1} \det(\lambda I - \mathrm{ALG}_{l-1}(X)) = \lambda^{\nu_k} + \sum_{j=1}^{\nu_k} c_j \lambda^{\nu_k - j},$$

то при $n \geqslant \nu_k + 2(k-1)$

$$\operatorname{per} C_n(X) - x_1^n - x_k^n = -\sum_{j=1}^{\nu_k} c_j (\operatorname{per} C_{n-j}(X) - x_1^{n-j} - x_k^{n-j}).$$

При $1 \leqslant l \leqslant n-1$ обозначим через $P^{(l)} = P_n^{(l)}$ матрицу, получаемую из подстановочной матрицы P^l заменой единиц ниже главной диагонали нулями; кроме того, положим $P^{(0)} = I$, $P^{(-l)} = (P^{(l)})^T$. Обозначим через $T_{n,l}(X)$ ленточную теплицеву матрицу $\sum_{l=1}^{k} x_l P_n^{(l-l)}$ ширины k $(n > k - l)$. Если $l < 1$ или $l > k$, то, очевидно, $\operatorname{per} T_{n,l}(X) = 0$; если же $l = 1$ или $l = k$, то $\operatorname{per} T_{n,l}(X) = x_l^n$. В нетривиальном случае $2 \leqslant l \leqslant k-1$ имеет место

Теорема 3.2. Если

$$\det(\lambda I - \mathrm{ALG}_{l-1}(X)) = \lambda^{\binom{k-1}{l-1}} + \sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} d_j \lambda^{\binom{k-1}{l-1} - j},$$

то при $n \geqslant \binom{k-1}{l-1} + 2(k-1)$

$$\operatorname{per} T_{n,l}(X) = -\sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} d_j \operatorname{per} T_{n-j,l}.$$

Здесь, в отличие от перманента циркулянта, зависимость порядка рекуррентной формулы от ширины ленты k имеет не экспоненциальный, а степенной характер.

Теоремы 3.1, 3.2 допускают некоторое обобщение.

Последовательность векторов $\{\bar{a}_n\}_{n \geqslant 2m-1}$ назовем центрально-стационарной с параметром m, если $\bar{a}_n$ имеет вид

$$\bar{a}_n = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_m, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{2m+1}),$$

$$n \geqslant 2m - 1,$$

где числа a_i не зависят от n (при этом не обязательно x_{m-1}, x_{m+1} (и т. д.) $\neq x_m$). Рассмотрим систему векторов

$$\bar{x}_n^{(r)} = (x_{1,n}^{(r)}, x_{2,n}^{(r)}, \ldots, x_{n,n}^{(r)}), \quad x_{i,n}^{(r)} \in \mathrm{C}, \quad r = 1, \ldots, k, \quad n \geqslant n_0.$$

Обозначим через $\overline{x}_n^{(r)} * P_n^{r-1}$ матрицу, получаемую из P^{r-1} заменой единицы в i-й строке на $x_{i,n}^{(r)}$, $i=1, \ldots, n$. Обозначим, далее, $M_n(\mathscr{X})$, где $\mathscr{X}=(\overline{x}_n^{(1)}, \ldots, \overline{x}_n^{(k)})$ — мультивектор, ленточную матрицу циркулянтного типа

$$M_n(\mathscr{X})=\sum_{r=1}^{k} \overline{x}_n^{(r)} * P^{r-1} \quad (k \geqslant 3). \tag{3.2}$$

Будем говорить, что последовательность матриц $\{M_n(\mathscr{X})\}$ принадлежит классу $\mathscr{M}_m$, если последовательности векторов $\{\overline{x}_n^{(r)}\}_{n \geqslant 2m-1}$, $r=1, \ldots, k$, являются центрально-стационарными с параметром m. Поскольку первые m координат каждого из векторов $\{\overline{x}_n^{(r)}\}$ не зависят от n, положим $x_{i,n}^{(r)}=x_i^{(r)}$, $i=1, \ldots, m$.

Теорема 3.3. Пусть $\{M_n(\mathscr{X})\} \in \mathscr{M}_m$ $(m \geqslant k \geqslant 3)$ и

$$\prod_{l=2}^{k-1} \det(\lambda I - \mathrm{ALG}_{l-1}(X)) = \lambda^{\nu_k} + \sum_{j=1}^{\nu_k} c_j \lambda^{\nu_k - j},$$

где $X=(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \ldots, x_m^{(k)})$. Тогда

$$\operatorname{per} M_n(\mathscr{X}) - \prod_{i=1}^{n} x_{i,n}^{(1)} - \prod_{i=1}^{n} x_{i,n}^{(k)} = -\sum_{j=1}^{\nu_k} c_j \Big(\operatorname{per} M_{n-j}(\mathscr{X}) -$$

$$- \prod_{i=1}^{n-j} x_{i,n-j}^{(1)} - \prod_{i=1}^{n-j} x_{i,n-j}^{(k)}\Big), \quad n \geqslant \nu_k + 2(m-1) + k - 1. \tag{3.3}$$

В дополнение к теореме 3.3 заметим, что если выполнены равенства $x_{m-t}^{(r)}=x_m^{(r)}$, $r=t+1, \ldots, k$, $t=1, \ldots, k-1$, то формула (3.3) справедлива уже при $n \geqslant \nu_k + 2(m-1)$. Так будет при $m=k$, например, в случае z-циркулянта $C_n(X; z)$, полученного из $C_n(X)$ умножением на z элементов ниже главной диагонали. Это соответствует следующему обобщению теоремы 3.1.

Теорема 3.4. В условиях теоремы 3.1

$$\operatorname{per} C_n(X; z) - x_1^n - x_k^n z^{k-1} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\nu_k} c_j \left(\operatorname{per} C_{n-j}(X; z) - x_1^{n-j} - x_k^{n-j} z^{k-1}\right),$$

$$n \geqslant \nu_k + 2(k-1). \tag{3.4}$$

Вполне аналогичное обобщение (типа теоремы 3.3), которое здесь не приводим, допускает теорема 3.2. Кроме того, отметим, что приведенные в этом параграфе теоремы имеют аналогично устанавливаемые детерминантные аналоги, в которых роль матриц $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ играют матрицы $\widetilde{\mathrm{ALG}}_{l-1}(X)$, $l=2, \ldots$ $\ldots, k-1$. При той же лексикографической нумерации строк, что и для матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$, строки матрицы $\widetilde{\mathrm{ALG}}_{l-1}(X)$ имеют вид (ср. с (3.1)):

$$\begin{cases} \underbrace{0\ldots 0}_{m(j_1,\ldots,j_{l-1})}-(-1)^{j_l}x_{j_l}\underbrace{0\ldots 0}_{\rho_1}(-1)^{j_{l-1}}x_{j_{l-1}}\underbrace{0\ldots 0}_{\rho_2}- \\ -(-1)^{j_{l-2}}x_{j_{l-2}}\ldots(-1)^l(-1)^{j_1}x_{j_1}0\ldots 0,\ j_l<k, \\ \underbrace{0\ldots 0}_{m(j_1,\ldots,j_{l-1})}(-1)^{k-1}x_k 0\ldots 0,\quad j_l=k. \end{cases} \tag{3.5}$$

Приведем, например, детерминантный аналог теоремы 3.2.

Теорема 3.5. Если

$$\det(\lambda I-\widetilde{\mathrm{ALG}}_{l-1}(X))=\lambda^{\binom{k-1}{l-1}}+\sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}}\tilde{d}_j\lambda^{\binom{k-1}{l-1}-j}, \tag{3.6}$$

то при $n\geqslant\binom{k-1}{l-1}+2(k-1)$

$$\det T_{n,l}(X)=-\sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}}\tilde{d}_j\det T_{n-j,l}.$$

При замене в (3.5) x_l на $x_l-\lambda$ многочлен (3.6) индуцирует рекуррентную формулу для характеристических многочленов матриц $\{T_{n,l}(X)\}$.

§ 4. Канонические представления детерминанта и перманента k-диагонального z-циркулянта

Пусть $X=(x_1, \ldots, x_k)\in\mathbf{C}^k$. Хорошо известно (см., например, [44, с. 51] и [186]), что

$$\det C_n(X;\ z)=\prod_{l=1}^{n}g(\alpha_l), \tag{4.1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все корни n-й степени из z, $g(t)=x_1+x_2t+\ldots$ $\ldots+x_kt^{k-1}$. В случае $x_1=1$ из (4.1) с помощью несложных выкладок можно получить равенство [70]

$$\det C_n(X;\ z)=1-z\sum_{1\leqslant r\leqslant k-1}\beta_r^n+z^2\sum_{1\leqslant r<s\leqslant k-1}(\beta_r\beta_s)^n-$$
$$-z^3\sum_{1\leqslant r<s<t\leqslant k-1}(\beta_r\beta_s\beta_t)^n+\ldots$$

$$\ldots + (-1)^k z^{k-2} \sum_{1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_{k-2} \leqslant k-1} (\beta_{r_1} \beta_{r_2} \ldots \beta_{r_{k-2}})^n +$$

$$+ (-1)^{(k-1)(n-1)} z^{k-1} x_k^n, \tag{4.2}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ — корни многочлена $g^*(t) = t^{k-1} + x_2 t^{k-2} + \ldots$ $\ldots + x_k$.

Обозначая $D_r(A)$ r-ю ассоциированную с A матрицу [9], элементами которой являются миноры матрицы A порядка r, упорядоченные лексикографически по строкам и столбцам, с помощью (3.5) при $x_1 = 1$ устанавливаем равенство

$$\widetilde{\mathrm{ALG}}_{l-1}(X) = D_{l-1}(\widetilde{\mathrm{ALG}}_1(X)). \tag{4.3}$$

Замечая, что $\det(\lambda I - \widetilde{\mathrm{ALG}}_1(X)) = g^*(\lambda)$, и используя то известное обстоятельство (см., например, [29]), что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения $(n \times n)$-матрицы A, то собственные значения матрицы $D_r(A)$ суть $\binom{n}{r}$ произведений вида $\lambda_{s_1} \lambda_{s_2} \ldots \lambda_{s_r}$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_r \leqslant n$, запишем формулу (4.2) в виде

$$\det C_n(X;\, z) = 1 + \sum_{l=2}^{k-1} (-1)^{l-1} z^{l-1} \sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} \rho_j^n(l) +$$

$$+ (-1)^{(k-1)(n-1)} z^{k-1} x_k^n, \tag{4.4}$$

где внутреннее суммирование проводится по всем собственным значениям матрицы $\widetilde{\mathrm{ALG}}_{l-1}(X)$ с учетом их кратностей. Формулу (4.4) будем называть каноническим представлением детерминанта k-диагонального z-циркулянта. Заметим, что с вычислительной точки зрения при больших n формула (4.4) предпочтительнее, чем (4.1), поскольку число слагаемых в (4.4) не зависит от n. Более того, для вычисления n-х степенных сумм $\Sigma\rho^n$ в (4.4) с помощью коэффициентов характеристических многочленов алго-матриц $\widetilde{\mathrm{ALG}}_{l-1}(X)$ можно использовать классические рекуррентные формулы Ньютона [26, с. 331], позволяющие, таким образом, организовать формализованный рекуррентный процесс вычисления $\det C_n(X; z)$ за время $O(n)$ без прямого вычисления начальных условий.

Переходя к перманенту k-диагонального z-циркулянта, отметим, кто какого-либо аналога формулы (4.1) для него нет. Тем более замечательным является то обстоятельство, что имеет место следующий аналог формулы (4.4) (каноническое представление перманента k-диагонального z-циркулянта):

$$\operatorname{per} C_n(X; z) = 1 + \sum_{l=2}^{k-1} z^{l-1} \sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} \tau_j^n(l) + z^{k-1} x_k^n,$$
$$n \geqslant 2(k-1), \qquad (4.5)$$

в котором внутреннее суммирование проводится по всем собственным значениям матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ (с учетом кратностей).

Этот результат является принципиально важным и в частном случае перманентов (0, 1)-циркулянтов ($z=1$, $x_i=0$ или 1). Следует отметить, что в этом частном случае он не был получен ни в работе Метрополиса и М. и П. Стейнов [125], ни в работах Минка [131], [133]. В случае $z=1$, $X \in \mathbf{C}^k$ предположение о справедливости (4.5) по существу было высказано нами в [61]. Набросок доказательства этого предположения дан в [65], затем автономно основной результат был опубликован в [75]; развернутое доказательство случая $z=1$ представлено в [68]. Общий случай рассмотрен в [70] и подробнее в [89]. В то время как формула (4.4), как мы видели, является достаточно простым следствием известной формулы (4.1), формула (4.5) является несоизмеримо более глубоким фактом. Здесь мы приведем цепочку лемм [89], приводящих к (4.5). Обозначим через $C_{n-1}^{(r,1)}(X; z)$ матрицу, получаемую из $C_n(X; z)$ вычеркиванием первой строки и $(r+1)$-го столбца ($0 \leqslant r \leqslant k-1$).

Лемма 4.1. Если $x_{r+1} \neq 0$, то при $n \geqslant \nu_k + 2k - 1$ последовательность

$$\{\operatorname{per} C_{n-1}^{(r,1)}(X; z) - x_1^{n-1}\delta_{1,0} - x_k^{n-1} z^{k-1} \delta_{r,k-1}\},$$

где $\delta_{\cdot,\cdot}$ — символ Кронекера, удовлетворяет тому же разностному уравнению, что и последовательность $\{\operatorname{per} C_n(X; z) - x_1^n - x_k^n z^{k-1}\}$ (см. теорему 3.4).

В [89] представлено наиболее простое доказательство этой леммы, состоящее в замене в $C_n(X; z)$ элемента x_{r+1} в первой строке элементом tx_{r+1}, разложении перманента полученной матрицы по этому элементу [38, с. 88] и использовании теоремы 3.3.

Пусть $C_n(X) = \{c_{ij}\}$. Положим

$$(\operatorname{per} C_n(X))^{(l)} = \sum_{\sigma \in S_n : \gamma(\sigma) = n-l} \prod_{l=1}^{n} c_{l\sigma(l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, k-1, \qquad (4.6)$$

где $\gamma(\sigma)$ — число точек слабого превышения ($\sigma(i) \geqslant i$) подстановки σ, являющееся, как нетрудно проверить, инвариантом отображения

$$\sigma \to \sigma' : \sigma'(i \oplus d) = \sigma(i) \oplus d \pmod n \qquad (4.7)$$

для любого вычета d по модулю n.

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — квадратная матрица порядка n. Каждой подстановке $\pi \in S_n$ сопоставим диагональ матрицы A (т. е. множество n неколлинеарных ее позиций): $D(\pi)=\{(i,\pi(i))\}^n_{i=1}$. Циклическим инвариантом диагонали $D(\pi)$ назовем величину $\Gamma(D(\pi))=n-\gamma(\pi)$.

Лемма 4.2. Если D является диагональю z-циркулянта $C_n(X;z)$ с условием $\Gamma(D)=l-1$ $(2\leqslant l\leqslant k-1)$, то ее диагональное произведение имеет вид hz^{l-1}, где h — диагональное произведение соответствующей диагонали циркулянта $C_n(X;1)$.

Следствие. $(\operatorname{per} C_n(X))^{(l-1)}=\operatorname{coeff}_{z^{l-1}} \operatorname{per} C_n(X;z)$ $(2\leqslant l\leqslant k-1)$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из доказательства теоремы 3.1.

Лемма 4.3. Если

$$\det(\lambda I-\mathrm{ALG}_{l-1}(X))=\lambda^{\binom{k-1}{l-1}}+\sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} b_j\lambda^{\binom{k-1}{l-1}-j}\quad (2\leqslant l\leqslant k-1),$$

то для компоненты (4.6) перманента $C_n(X)$ имеет место рекуррентная формула

$$(\operatorname{per} C_n(X))^{(l-1)}=-\sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} b_j(\operatorname{per} C_{n-j}(X))^{(l-1)},$$

$$n\geqslant\binom{k-1}{l-1}+2(k-1).$$

Через $C_{n-1}^{(r,j)}(X;z)$ обозначим матрицу, получаемую из $C_n(X;z)$ путем вычеркивания j-й строки и $(r\oplus j)$-го столбца, $j=1, 2, \ldots, n$, $r=0, 1, \ldots, k-1$ (при этом в j-й строке вычеркивается элемент x_{r+1}, если $j\leqslant n-r$, и элемент zx_{r+1}, если $j\geqslant n-r+1$).

Лемма 4.4. Если $x_{r+1}\neq 0$ $(0\leqslant r\leqslant k-1)$, то

1) при $1\leqslant j_1<j_2\leqslant n-r$ или при $n-r+1\leqslant j_1<j_2\leqslant n$

$$\operatorname{per} C_{n-1}^{(r,j_1)}(X;z)=\operatorname{per} C_{n-1}^{(r,j_2)}(X;z);$$

2) при $1\leqslant j_1\leqslant n-r<j_2\leqslant n$

$$\operatorname{per} C_{n-1}^{(r,j_1)}(X;z)=z\operatorname{per} C_{n-1}^{(r,j_2)}(X;z).$$

Лемма 4.5. Если $x_{r+1}\neq 0$, то справедлива формула

$$\operatorname{per} C_{n-1}^{(r,1)}(X;z)=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\operatorname{per} C_n(X;z)\quad (0\leqslant r\leqslant k-1).$$

Пусть $q\geqslant 0$ — кратность корня $\lambda=0$ многочлена $f_k(\lambda;X)$ в условии теоремы 3.1. Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество векторов $X\in\mathbf{C}^k$, неаннулирующих дискриминант многочлена $\lambda^{-q}f_k(\lambda;X)$.

Из общей теории линейных однородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами [10] следует, что для функции

$$Q_n(X; z) = \operatorname{per} C_n(X; z) - x_1^n - x_k^n z^{k-1}, \tag{4.8}$$

удовлетворяющей разностному соотношению (3.4), при $X \in \mathfrak{M}$ имеет место представление

$$Q_n(X; z) = \sum_{j=1}^{\nu_k} c_j(X; z)\, \lambda_j^n(X), \tag{4.9}$$

где $\{\lambda_i(X)\}$ — различные корни уравнения $f_k(\lambda; X) = 0$ (при условии $X \in \mathfrak{M}$ $f_k(\lambda; X)$ не имеет кратных корней, кроме, возможно, нулевых). С помощью лемм 4.4, 4.5 устанавливается

Лемма 4.6. Если $X \in \mathfrak{M}$, то коэффициенты $c_j(X; z)$ в (4.9) не зависят от X.

Запишем (4.9) в виде

$$\operatorname{per} C_n(X; z) = \sum_{j=1}^{2^{k-1}} h_j(z)\, g_j^n(X), \tag{4.10}$$

где (с учетом (4.8))

$$h_1 = 1,\ h_{2^{k-1}} = z^{k-1},\ h_j = c_{j-1},\ g_1 = x_1,\quad g_{2^{k-1}} = x_k,$$
$$g_j = \lambda_{j-1}(X),\ j = 2, 3, \ldots, 2^{k-1} - 1, \tag{4.11}$$

причем на основании леммы 4.6 коэффициенты $h_j(z)$ не зависят от X. Введем в $\mathbf{C}^k$ стандартную евклидову норму $\|X\| = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2}$.

Лемма 4.7. Множество $\mathfrak{M}$ всюду плотно в $\mathbf{C}^k$.

Доказательство проводится по схеме [33, с. 16—17]. С помощью леммы 4.7 в (4.10) снимается ограничение $X \in \mathfrak{M}$.

Лемма 4.8. Для $\forall X \in \mathbf{C}^k$ справедлива формула (4.10) с коэффициентами $h_j(z)$, не зависящими от X.

Нашей целью теперь является вычисление коэффициентов $h_j(z)$. Полагая в (4.10) вначале $X = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, 1, \ldots, 1)$, а затем $X = (1, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$, и сравнивая результаты, получаем следующее утверждение.

Лемма 4.9. При некоторой перенумерации корней $\{g_j(X)\}$ многочлена $f_k(\lambda; X)$ (характер которой будет ясен ниже) для коэффициентов представления (4.10) имеют место следующие соотношения

$$h_1(z) = 1,\ h_{2^{k-1} - 2^{k-m-1} + j}(z) = z^m h_j(z),\ j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{k-m-1};$$
$$m = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{4.12}$$

Лемма 4.10. Система уравнений (4.12) имеет единственное решение

$$h_j(z)=z^{e(j-1)}, \qquad j=1, 2, 3, \ldots, 2^{k-1},$$

где $e(n)$ — число единиц в двоичной записи числа n.

Лемма 4.10 устанавливается индукцией.

Итак, коэффициенты $\{h_j(z)\}$ в (4.10) вычислены. Более того, теперь в силу леммы 4.3 и следствия из леммы 4.2 ясен характер упомянутой в условии леммы 4.9 перенумерации: корнями $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ с учетом кратностей являются те $g_j(X)$, $j=1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, 2^{k-1}$, для которых $e(j-1)=l-1$ (число таких индексов в точности равно $\binom{k-1}{l-1}$). Окончательный результат запишем в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. Для перманента z-циркулянта $C_n(X; z)$ справедливо каноническое представление (4.5); более того, для каждого l, $2\leqslant l\leqslant k-1$, справедлива формула

$$(\mathrm{per}\, C_n(X))^{(l-1)}=\sum_{j=1}^{\binom{k-1}{l-1}} \tau_j^n(l), \tag{4.13}$$

где $\{\tau_j\}$ — спектр матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$.

Обозначим через $L_r(A)$ r-ю перманентно ассоциированную с A матрицу или r-й перманентный компаунд [125], элементами которого являются подперманенты (перманентные миноры) порядка r матрицы A, упорядоченные лексикографически по строкам и столбцам. При $x_1=1$ из (3.1) вытекает равенство, являющееся перманентным аналогом формулы (4.3)

$$\mathrm{ALG}_{l-1}(X)=L_{l-1}(\mathrm{ALG}_1(X)) \qquad (2\leqslant l\leqslant k-1), \tag{4.14}$$

в котором

$$\mathrm{ALG}_1(X)=\begin{pmatrix} x_2 & 1\ 0\ldots 0 \\ x_3 & 0\ 1\ldots 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{k-1} & 0\ 0\ldots 1 \\ x_k & 0\ 0\ldots 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

— сопровождающая матрица (в одной из эквивалентных форм) многочлена

$$t^{k-1}-x_2t^{k-2}-\ldots-x_{k-1}t-x_k. \tag{4.16}$$

Очевидно, из (4.15) следует, что $L_{k-1}(\mathrm{ALG}_1(X))=(x_k)$ — матрица размера 1×1. Поэтому наряду с (4.14) положим

$$\mathrm{ALG}_{k-1}(X)=L_{k-1}(\mathrm{ALG}_1(X))=(x_k). \tag{4.17}$$

Хорошо известно (см., например, [46, с. 59]), что если $\{\lambda_i\}$ — собственные значения матрицы M (с учетом их кратностей), то для $\forall k\in N$ $\mathrm{tr}\, M^k=\Sigma\lambda_i^k$. Учитывая это и принимая во внимание (4.14), (4.17), запишем теорему 4.1 в следующей эквивалентной форме.

Теорема 4.1′ [89]. Для перманента z-циркулянта $C_n(X; z)$ имеет место формула

$$\operatorname{per} C_n(X; z) = 1 + \sum_{l=2}^{k} z^{l-1} \operatorname{tr}((L_{l-1}(A(X)))^n), \tag{4.18}$$

где $A(X)$ ($\equiv \mathrm{ALG}_1(X)$) — сопровождающая матрица многочлена (4.16); более того, для каждого l, $2 \leqslant l \leqslant k-1$, справедлива формула

$$(\operatorname{per} C_n(X))^{(l-1)} = \operatorname{tr}((L_{l-1}(A(X)))^n).$$

Применение классических формул Ньютона [26] для вычисления каждой n-й степенной суммы (4.13) с помощью характеристических многочленов алго-матриц позволяет организовать, как выше было указано для детерминанта, формализованный рекуррентный процесс вычисления $\operatorname{per} C_n(X; z)$ за время $O(n)$ без прямого вычисления начальных условий. Отметим, что из (4.6) следует, что в случае $x_i = 1$ или 0 (4.13) перечисляет перестановки с циркулянтным множеством допустимых позиций и заданным числом $(n-l)$ точек слабого превышения.

Другим важным следствием формул (4.5), (4.13) является возможность получения явных формул в форме конечных сумм для $\operatorname{per} C_n(X; z)$ и $(\operatorname{per} C_n(X))^{(l-1)}$, которые в общем случае не были известны даже в случае перманентов k-диагональных $(0,1)$-циркулянтов. Первые результаты такого рода для $\operatorname{per} C_n(X)$ (тогда еще условные) были указаны нами в работе [61].

Теорема 4.2. Имеют место явные формулы

$$(\operatorname{per} C_n(X))^{(l-1)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{r} \operatorname*{coeff}_{\lambda^n} (1 - Q_l(\lambda))^r,$$
$$l = 2, \ldots, k-1, \tag{4.19}$$

$$\operatorname{per} C_n(X; z) = x_1^n + z^{k-1} x_k^n + \sum_{l=2}^{k-1} z^{l-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{r} \operatorname*{coeff}_{\lambda^n} (1 - Q_l(\lambda))^r, \tag{4.20}$$

где $Q_l(\lambda) = \det(I - \lambda \mathrm{ALG}_{l-1}(X))$.

Пример. Пусть $k=4$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Тогда $Q_2(\lambda) = Q_3(\lambda) = 1 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3$. Следовательно, согласно (4.19)—(4.20),

$$(\operatorname{per} C_n(X))^{(l-1)} = 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r} \sum_{\frac{n-r}{2} \leqslant i < r} \binom{r}{i} \binom{i}{n-r-i}, \quad l = 2, 3;$$

$$\operatorname{per} C_n(X; z) =$$
$$= (z+1)\left(z^2 + \left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{n}{r} \sum_{\frac{n-r}{2} \leqslant i < r} \binom{r}{i} \binom{i}{n-r-i}\right) z + 1\right), \quad n \geqslant 4.$$

§ 5. Дуальный и палинтропический случаи

Вектор $X^* = (x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1)$ называется дуальным вектору $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$. z-циркулянты $C_n(X, z)$ и $C_n(X^*; z)$ назовем дуальными, а в случае равенства $X = X^*$ z-циркулянт $C_n(X; z)$ назовем палинтропическим.[1] Так, в случае $z=1$, $X = (1, \ldots, 1)$, рассмотренном Метрополисом, М. Стейном и П. Стейном [125], циркулянты являются палинтропическими. Связь между дуальными случаями вытекает из следующего утверждения.

Теорема 5.1. Если $x_1 = x_k = 1$, то спектры матриц $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ и $\mathrm{ALG}_{k-l}(X^*)$ $(2 \leqslant l \leqslant k-1)$ совпадают.

Следствие 1. $(\mathrm{per}\, C_n(X))^{(l-1)} = (\mathrm{per}\, C_n(X^*))^{(k-l)}$ $(2 \leqslant l \leqslant k-1)$.

В частности, $\mathrm{per}\, C_n(X) = \mathrm{per}\, C_n(X^*)$.

Следствие 2. Если $X = X^*$, то спектры матриц $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ и $\mathrm{ALG}_{k-l}(X)$ совпадают.

Следствие 3. В случае палинтропического z-циркулянта формула (4.5) принимает вид:

$$\mathrm{per}\, C_n(X; z) = \sum_{l=0}^{\frac{k}{2}-1} (z^l + z^{k-l-1}) S_l(n), \quad \text{если } k \text{ четно},$$

$$\mathrm{per}\, C_n(X; z) = \sum_{l=0}^{\frac{k-1}{2}-1} (z^l + z^{k-l-1}) S_l(n) + z^{\frac{k-1}{2}} S_{\frac{k-1}{2}}(n),$$

если k нечетно,

где $S_0(n) = x_1^n$, $S_l(n)$, $l \geqslant 1$, — n-я степенная сумма (или n-й момент [46, с. 59]) собственных значений матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$. Кроме того, из теорем 3.4 и 5.1 вытекает, что в палинтропическом случае перманент z-циркулянта удовлетворяет разностному уравнению существенно меньшего порядка, равного $\frac{\nu_k}{2}$ при четном k и $\frac{\nu_k}{2} + \binom{k-2}{\frac{k-1}{2}}$ при нечетном k.

Детерминантные аналоги результатов этого параграфа, а также формулы (4.13) см. в [70]. В случае $z=1$ из результатов §§ 4—5 с единых позиций обобщаются различные формулы для перманентов циркулянтов Ямамото [161], Минка [30], [131], [127], [128], Немета, Себерри и Шу [137], Идеса, Прагера и Себерри [108], Кинга и Паркера [123], Метрополиса, М. Стейна и

[1] Термины «дуальный» и «палинтропический» применялись Минком [131, с. 261, 264] для (0,1)-циркулянтов.

П. Стейна [125] и др. Отметим, что большинство результатов цитированных авторов будут обобщены в другом направлении в § 13.

§ 6. Метод трансфер-матрицы вычисления перманента циркулянта. Вопрос Минка

В последней главе недавно переведенной на русский язык превосходной книги Стенли [41] изложен находящий все новые приложения графо-аналитический метод перечисления, называемый методом трансфер-матрицы. Метод имеет весьма изящное теоретическое обоснование [41, с. 354—357], однако его практическое применение всякий раз связано с достаточно кропотливым исследованием и не всегда является оптимальным. В настоящем параграфе мы коснемся приведенных в [41] результатов, связанных с перечислением перестановок с ограничениями на позиции. Эти результаты вытекают из соображений индуктивного характера после рассмотрения двух частных примеров, решения которых получены Стенли методом трансфер-матрицы и сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 6.1 ([41, пункт 4.7.8]). а) Пусть S — конечное подмножество множества целых чисел; $f_S(n)$ — число перестановок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из элементов $1, 2, \ldots, n$, для которых $a_i-i\in S$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда $\sum\limits_{n\geq 1} f_S(n)\lambda^n$ — рациональная функция от λ.

б) Пусть $g_S(n)$ — число перестановок $(a_1a_2\ldots a_n)$ из тех же элементов, для которых для $\forall i\in\{1, 2, \ldots, n\}\exists j\in S: a_i-i\equiv j \pmod n$. Если подходящим образом интерпретировать значения $g_S(n)$ при малых n, то существует многочлен $Q(\lambda)$, для которого

$$\sum_{n\geq 1} g_S(n)\lambda^n = -\lambda Q'(\lambda)/Q(\lambda).$$

Теорема 6.1 допускает следующую переформулировку в терминах перманентов.

Теорема 6.1′. При подходящем доопределении последовательности перманентов при $n \leq \sup S - \inf S$

а) $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\operatorname{per}\sum\limits_{r\in S} P_n^{(r)}\right)\lambda^n$ является рациональной функцией от λ;

б) существует многочлен $Q(\lambda)$, для которого

$$\sum_{n\geq 1}\left(\operatorname{per}\sum_{r\in S} P_n^r\right)\lambda^n = -\lambda Q'(\lambda)/Q(\lambda). \tag{6.1}$$

Теорема 6.1 (6.1′) носит существовательный характер. Покажем, каким образом утверждения а), б) теоремы 1.6′ могут быть конструктивно уточнены с помощью полученных выше результатов.

а) Через $(-k_1)$, k_2 обозначим соответственно $\inf S$ и $\sup S$. В случае теплицевой матрицы $\sum\limits_{r\in S} P_n{}^{(r)}$ нетривиальным является случай k_1, $k_2>0$. Положим в теореме 3.2

$$l=k_1+1, \quad k=k_1+k_2+1,$$

$$x_r=\begin{cases}1, & \text{если } r\in S,\\ 0, & \text{если } r\notin S,\end{cases} \quad r=1, 2, \ldots, k_1+k_2+1.$$

Тогда частным случаем теоремы 3.2 является следующее утверждение.

Теорема 3.2′. Если

$$\det(\lambda I-\mathrm{ALG}_{k_1}(X))=\lambda^{\binom{k_1+k_2}{k_1}}+\sum_{t=1}^{\binom{k_1+k_2}{k_1}} d_t\lambda^{\binom{k_1+k_2}{k_1}-t},$$

то

$$\operatorname{per}\sum_{r\in S} P_n^{(r)}=-\sum_{t=1}^{\binom{k_1+k_2}{k_1}} d_t \operatorname{per}\sum_{r\in S} P_{n-t}^{(r)}, \quad n\geqslant\binom{k_1+k_2}{k_1}+2(k_1+k_2).$$

Напомним теперь известный факт из теории рациональных производящих функций.

Лемма 6.1 ([41, с. 301]). Пусть фиксирована последовательность β_1, β_2, ..., β_m комплексных чисел, причем $m\geqslant 1$ и $\beta_m\neq 0$. Для функции $f: N\to\mathbf{C}$ следующие условия равносильны:

$$\text{i)}\ \sum_{n\geqslant 1} f(n)x^n=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $Q(x)=1+\beta_1 x+\ldots+\beta_m x^m$, $P(x)$ — многочлен степени $<m$;

ii) для всех $n\geqslant m$ $f(n)=-\beta_1 f(n-1)-\beta_2 f(n-2)-\ldots$ $\ldots-\beta_m f(n-m)$.

Полагая в ii) $f(n)=\operatorname{per}\sum\limits_{r\in S} P_{n+2(k_1+k_2)}^{(r)}$, $m=\binom{k_1+k_2}{k_1}$, $\beta_t=d_t$ $t=1, \ldots, m$, на основании теоремы 3.2′ и леммы 6.1 заключаем, что

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\operatorname{per}\sum_{r\in S} P_{n+2(k_1+k_2)}^{(r)}\right)\lambda^n=P(\lambda)/Q(\lambda), \tag{6.2}$$

где

$$Q(\lambda)=\det(I-\lambda\,\mathrm{ALG}_{k_1}(X)). \tag{6.3}$$

Многочлен $P(\lambda)$ степени $<\binom{k_1+k_2}{k_1}$ в (6.2) при известном многочлене $Q(\lambda)$ (6.3) может быть в каждом конкретном случае определен методом неопределенных коэффициентов, описанном в [41, с. 305]. Таким образом, не только установлен результат а) теоремы 6.1′, но и ему придан ясный конструктивный характер. Более того, из сопоставления теоремы 3.2 и леммы 6.1 вытекает существенно более общий результат.

Теорема 6.2. Если $\gamma_{-k_1}\neq 0$, $\gamma_{k_2}\neq 0$, то

$$\sum_{n\geq 0}\left(\operatorname{per}\sum_{l=-k_1}^{k_2}\gamma_l P^{(l)}_{n+2(k_1+k_2)}\right)\lambda^n=P(\lambda)/Q(\lambda),$$

где $Q(\lambda)$ определяется формулой (6.3) при $X=(\gamma_{-k_1},\ldots,\gamma_{k_2})$, $P(\lambda)$ — некоторый многочлен степени $<\binom{k_1+k_2}{k_1}$.

Замечание. Для полного соответствия лемме 6.1 следует показать что $\beta_m=d_m\neq 0$ при $m=\binom{k_1+k_2}{k_1}$ или что $\det \mathrm{ALG}_{k_1}(X)\neq 0$. Покажем, что

$$|\det \mathrm{ALG}_{k_1}(X)|=|\gamma_{-k_1}|^{\binom{k_1+k_2-1}{k_1}}|\gamma_{k_2}|^{\binom{k_1+k_2-1}{k_1-1}}\neq 0$$

или в обозначениях $k_1+k_2+1=k$, $k_1=l-1$, $\gamma_{-k_1}=$ $=x_1,\ldots,\gamma_{k_2}=x_k$

$$|\det \mathrm{ALG}_{l-1}(X)|=|x_1|^{\binom{k-2}{l-1}}|x_k|^{\binom{k-2}{l-2}},\quad l=2,3,\ldots,k-1. \tag{6.4}$$

Действительно, из структуры матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$ следует, что в строках, которым соответствует значение $j_l=k$, имеется единственный ненулевой элемент x_k. Таких строк $\binom{k-2}{l-2}$. В остальных $\binom{k-1}{l-1}-\binom{k-2}{l-2}=\binom{k-2}{l-1}$ строках имеется элемент x_1, причем в столбцах матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$, содержащих x_1, остальные элементы равны 0. Отсюда, очевидно, следует (6.4).

б) Прежде всего приведем обобщение формулы (6.1), получаемое методом трансфер-матрицы, на перманенты произвольных k-диагональных циркулянтов над полем комплексных чисел.

Пусть $X=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbf{C}^k$. Рассмотрим орграф D, множество V вершин которого состоит из тех $(k-1)$-мерных точек

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1})\in\{0,1,\ldots,k-1\}^{k-1}, \tag{6.5}$$

для которых выполнены условия

$$\begin{cases}\beta_1\neq\beta_2+1,\ \beta_3+2,\ldots,\beta_{k-1}+k-2,\\ \beta_2\neq\qquad\ \beta_3+1,\ldots,\beta_{k-1}+k-3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{k-2}\neq\qquad\qquad\quad \beta_{k-1}+1.\end{cases}\pmod n \tag{6.6}$$

Вершина $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1})$ соединяется с вершиной $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ $\ldots,\gamma_{k-1})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{aligned}&\text{i) } \gamma_1=\beta_2,\ \gamma_2=\beta_3,\ldots,\gamma_{k-2}=\beta_{k-1},\\ &\text{ii) } \beta_1\neq\gamma_{k-1}+k-1 \pmod n.\end{aligned} \tag{6.7}$$

При этом соединяющему ребру присваивается вес $x_{\gamma_{k-1}+1}$.

Пусть A — весовая матрица инцидентности графа D.

Теорема 6.3 ([88]). При подходящем доопределении последовательности $\operatorname{per} C_n(X)$ при $n \leqslant k-1$ имеет место формула

$$\sum_{n \geqslant 1} \operatorname{per} C_n(X) \lambda^n = -\lambda Q'(\lambda)/Q(\lambda), \tag{6.8}$$

где

$$Q(\lambda) = \det(I - \lambda A). \tag{6.9}$$

Пример. В случае $k=3$ множество V вершин орграфа D состоит из пар $\{\beta_1, \beta_2\} \in \{0, 1, 2\}^2$, а условие (6.6) сводится к условию $\beta_1 \neq \beta_2 + 1$, так что мы имеем вершины $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (0, 2)$, $v_4 = (1, 1)$, $v_5 = (1, 2)$, $v_6 = (2, 0)$, $v_7 = (2, 2)$. Весовая матрица инцидентности графа D в этом случае имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычисление $\det(I_7 - \lambda A)$ дает: $(1 - x_1\lambda)(1 - x_3\lambda)(1 - x_2\lambda - x_1x_3\lambda^2)$, и согласно (6.8)

$$\operatorname{per}(x_1 I_n + x_2 P + x_3 P^2) = \operatorname{coeff}_{\lambda^{n-1}} \left(\frac{x_1}{1 - x_1\lambda} + \frac{x_3}{1 - x_3\lambda} + \frac{x_2 + 2x_1x_3\lambda}{1 - x_2\lambda - x_1x_3\lambda^2} \right) =$$

$$= x_1^n + x_3^n + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{coeff}_{\lambda^{n-j}} (x_2 + x_1x_3\lambda)^j + x_1x_3 \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{coeff}_{\lambda^{n-j-1}} (x_2 + x_1x_3\lambda)^{j-1} =$$

$$= x_1^n + x_3^n + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-i}{i} x_2^{n-2i} (x_1x_3)^i +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \binom{n-i-2}{i} x_2^{n-2i-2} (x_1x_3)^{i+1}. \tag{6.10}$$

В частном случае $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ формула (6.10) путем непосредственных выкладок, связанных с $\operatorname{per}(I_n + P + P^2)$, была получена *Кингом и Паркером* [123].

Теперь заметим, что из (6.8) при достаточно малом $\rho > 0$ вытекает представление

$$\operatorname{per} C_n(X) = -\operatorname*{coeff}_{\lambda^{-1}}(\lambda^n Q'(\lambda)/Q(\lambda)) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}(Q'(w)/Q(w))\frac{dw}{w^n}, \quad n \geqslant k, \tag{6.11}$$

при этом $Q(0)=1$, а $Q'(\lambda)/Q(\lambda)$ имеет простые полюсы, совпадающие с нулями $Q(\lambda)$. Пусть ρ — корень кратности s многочлена $Q(\lambda)$. Тогда

$$Q(\lambda) = (\lambda-\rho)^s q(\lambda), \quad q(\rho)\neq 0.$$

Следовательно, в окрестности точки $\lambda=\rho$

$$\frac{Q'(\lambda)}{Q(\lambda)\lambda^n} = \frac{sq(\lambda)+(\lambda-\rho)q'(\lambda)}{(\lambda-\rho)q(\lambda)\lambda^n}$$

и

$$\operatorname{res}\frac{Q'(\lambda)}{Q(\lambda)\lambda^n} = \lim_{\lambda\to\rho}\frac{sq(\lambda)+(\lambda-\rho)q'(\lambda)}{q(\lambda)\lambda^n} = \frac{s}{\rho^n}.$$

Замечая, что $\frac{1}{\rho}$ есть корень той же кратности s многочлена $\lambda^m Q\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где $m=\deg Q(\lambda)$, заключаем, что по теореме о вычетах из (6.11) вытекает равенство

$$\operatorname{per} C_n(X) = \sum_\rho \rho^n, \quad n \geqslant k, \tag{6.12}$$

где суммирование ведется по корням многочлена $\lambda^m Q\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, выписываемым столько раз, какова их кратность.

Теорема 6.4. При $x_1=1$ имеют место формулы

$$\deg Q(\lambda) = 2^{k-1}, \tag{6.13}$$

$$\lambda^{2^{k-1}} Q\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f_k(\lambda; X)(\lambda-1)(\lambda-x_k), \tag{6.14}$$

где $f_k(\lambda; X)$ — полином из теоремы 3.1.

Доказательство. Наряду с (6.12), имеет место вытекающее из (4.5) при $z=1$ представление

$$\operatorname{per} C_n(X) = 1 + x_k^n + \sum_\tau \tau^n, \quad n \geqslant 2(k-1), \tag{6.15}$$

где суммирование ведется по корням многочлена $f_k(\lambda; X)$ (с учетом их кратностей). Проводя выкладки, приведшие к (6.12), в обратной последовательности — исходя из 6.15, получим вместо (6.11) формулу

$$\operatorname{per} C_n(X) = -\operatorname*{coeff}_{\lambda^{-1}}(\lambda^n G'(\lambda)/G(\lambda)), \quad n \geqslant 2(k-1), \tag{6.16}$$

где

$$G(\lambda)=\lambda^{2^k} f_k\left(\frac{1}{\lambda};\ X\right)(1-\lambda)(1-x_k\lambda). \tag{6.17}$$

Поскольку $Q(0)=G(0)=1$, то $\frac{Q'(\lambda)}{Q(\lambda)}$ и $\frac{G'(\lambda)}{G(\lambda)}$ — аналитические в некоторой окрестности точки $\lambda=0$ функции, имеющие в силу (6.11) и (6.16), возможно, лишь конечное число не совпадающих тейлоровских коэффициентов. Следовательно,

$$\frac{Q'(\lambda)}{Q(\lambda)}-\frac{G'(\lambda)}{G(\lambda)}=M(\lambda), \tag{6.18}$$

где $M(\lambda)$ — некоторый многочлен. Однако Q'/Q и G'/G — правильные дроби и их разность — правильная дробь. Следовательно, равенство (6.18) возможно лишь при условии, что $M(\lambda)\equiv 0$. Следовательно,

$$\ln Q(\lambda)=\ln G(\lambda)+C,$$

и поскольку $Q(0)=G(0)=1$, то $C=0$. Итак, $Q(\lambda)=G(\lambda)$, а тогда из (6.17) вытекают формулы (6.13)—(6.14) теоремы.

Формула (6.14) показывает, что, не располагая трансфер-матрицей A — весовой матрицей инцидентности орграфа D, из теоремы 6.3 при $x_1=1$ мы в состоянии вычислить $Q(\lambda)=\det(I-\lambda A)$, причем многочлен $f_k(\lambda;\ X)(\lambda-1)(\lambda-x_k)$ с точностью до кратности собственного числа $\lambda=0$ совпадает с характеристическим многочленом A. Действительно, если h — порядок матрицы A, то

$$\det(I\lambda-A)=\lambda^h \det\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)=\lambda^h Q\left(\frac{1}{\lambda}\right)=$$

$$=\lambda^{h-2^k-1} f_k(\lambda;\ X)(\lambda-1)(\lambda-x_k).$$

(Заметим, что определение порядка h трансфер-матрицы, равного числу $(k-1)$-мерных точек (6.5), для которых выполнены условия (6.6), — трудная и, по-видимому, не решенная комбинаторная задача. Из последнего равенства следует, что если $x_1=1$, $x_k\neq 0$, то $h\geqslant 2^{k-1}$. Так, в рассмотренном выше примере при $k=3$ $h=7$.) Из теоремы 6.4 вытекает и значительно более важный вывод.

Теорема 6.5. Каноническое представление перманента z-циркулянта (4.5) справедливо, начиная уже с $n\geqslant k$.

Доказательство. В силу теоремы 6.4 формулы (4.5) и (6.12) при $z=1$ совпадают с точностью до порядка слагаемых в правых частях. При этом те слагаемые формулы (6.12), которые соответствуют собственным значениям матрицы $\mathrm{ALG}_{l-1}(X)$, соответствуют, с другой стороны, тем и только тем диагоналям циркулянта, циклический инвариант которых равен $i-1$) (или, что то же, имеющих $l-1$ позиций (i, j) с условием $j<i$).

Следствие. Рекуррентные формулы теорем 3.1 и 3.4 имеют место начиная уже с $n \geqslant \nu_k + k$, а рекуррентная формула леммы 4.3 справедлива при $n \geqslant \binom{k-1}{l-1} + k$.

Часть следствия, касающаяся теоремы 3.1, в частном случае (0, 1)-вектора X дает положительный ответ на (неявно) поставленный вопрос Минка [131, с. 250]: верно ли, что полученные в [131] рекуррентные формулы для перманентов (0, 1)-циркулянтов, кодируемых k-значным двоичным числом первой строки ($x_1 = x_k = 1$), справеливы, начиная с $n \geqslant \nu_k + k$?

§ 7. Перечисление r-перестановок с ограниченными позициями

Пусть $M = \{m_{ij}\}$ — прямоугольная (0, 1)-матрица размера $r \times n$. Назовем псевдодиагональю любое множество r ее позиций вида $\{(i, j_i)\}_{i=1}^{r}$, а произведение $\prod_{i=1}^{r} a_{ij_i}$ — псевдодиагональным произведением. Рассмотрим множество $\mathfrak{C}^*(M)$ всех псевдодиагоналей матрицы M, составленных из единиц. Если $\mathfrak{C}^*(M) \neq \varnothing$, то каждой его диагонали ставится в соответствие матрица инцидентности некоторой r-перестановки τ (с повторениями) из элементов $1, 2, \ldots, n$. Совокупность всех таких r-перестановок составляет по определению класс $\mathfrak{C}(M)$ r-перестановок с ограниченными позициями, причем ограничения на позиции r-перестановок естественно задаются множеством E позиций нулей M. Если нет каких-либо дополнительных условий, которым должны удовлетворять r-перестановки, то задачу их перечисления решает очевидное равенство $|\mathfrak{C}(M)| = \prod_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$. Рассмотрим задачу с дополнительными ограничениями на число повторений элементов в r-перестановках. С этой целью множество $\Lambda_i = \{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{il_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, назовом множеством возможных кратностей элемента i в r-перестановке, если элемент i может встретиться в ней λ_{i_1} или λ_{i_2} или... или $\lambda_{i_{l_i}}$ раз. Подкласс r-перестановок класса $\mathfrak{C}(M)$ с заданной системой непустых множеств $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{n}$ назовем $\mathfrak{C}_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n}(M)$-классом. Для перечисления r-перестановок класса $\mathfrak{C}_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n}(M)$ удобно использовать обобщение понятия перманента, введенное В. И. Большаковым [3], [4]. $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$-перманентом В. И. Большакова матрицы M назовем число

$$\operatorname{Per}_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)} M = \sum m_{1j_1} m_{2j_2} \ldots m_{rj_r}, \tag{7.1}$$

где в произведении $m_{1j_1}\ldots m_{rj_r}$ участвует λ_{i_1} или λ_{i_2} или... ... или $\lambda_{i_{l_i}}$ элементов из столбца i и суммирование проводится по всем таким произведениям. Будем считать, что пустому множеству слагаемых в (7.1) соответствует нулевое значение $\mathrm{Per}_{(\Lambda_1,\ldots\Lambda_n)}M$. Легко видеть, что

$$|\mathfrak{C}_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n}(M)| = \mathrm{Per}_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)}M. \tag{7.2}$$

Покажем, что в принципиально важном случае одноэлементных множеств $\Lambda_i = \{\lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = r$, задача перечисления r-перестановок класса $\mathfrak{C}_{\{\lambda_1\},\ldots,\{\lambda_n\}}(M)$ сводится к задаче перечисления перестановок с ограниченными позициями некоторого класса $\mathfrak{B}_r(A)$. Действительно, согласно теореме 4 [3],

$$\mathrm{Per}_{(\{\lambda_1\},\ldots,\{\lambda_n\})}M = \operatorname*{coeff}_{x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}} \prod_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j. \tag{7.3}$$

С другой стороны, Наталиа Бебиано [100] установила тождество

$$\prod_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j = \sum_{\lambda_i \geqslant 0:\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = r} \mathrm{per}\, A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \frac{x_1^{\lambda_1}}{\lambda_1!} \cdots \frac{x_n^{\lambda_n}}{\lambda_n!}, \tag{7.4}$$

где $A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — квадратная $(0, 1)$-матрица порядка r, составленная из λ_1 экземпляров первого столбца, λ_2 экземпляров второго столбца, ..., λ_n экземпляров n-го столбца матрицы M. Несколько позже это тождество в эквивалентной форме получено также В. И. Большаковым [4, теорема 3]. Сравнивая (7.2)—(7.4), получим

$$|\mathfrak{C}_{\{\lambda_1\},\ldots,\{\lambda_n\}}(M)| = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i!\right)^{-1} \mathrm{per}\, A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{7.5}$$

что и доказывает утверждение. Впрочем, формула (7.5) достаточно просто устанавливается и с помощью чисто комбинаторных соображений. В общем случае, очевидно, имеем

$$|\mathfrak{C}_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n}(M)| = \sum_{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = r:\ \lambda_i \in \Lambda_i,\ i=1,\ldots,n} |\mathfrak{C}_{\{\lambda_1\},\ldots,\{\lambda_n\}}(M)|.$$

§ 8. Проблема Тушара и обобщенная проблема Тушара

Напомним, что «Problème des ménages» в формулировке Люка́ состоит в перечислении способов размещения n супружеских пар за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались и ни один муж не сидел рядом с женой. Хорошо известно [30, с. 55], [43, с. 76], что после того, как дамы заняли свои места (одним из $2n!$ способов), задача сводится к вычислению $\mathrm{per}(J_n-I-P)$, а в случае, когда пары рассаживают по одну сторону прямоугольного стола (линейная «Problème des ménages») — к вычислению $\mathrm{per}(J_n-I-P^{(1)})$.

Заметим, что числа

$$u_n^{(k)}=\mathrm{per}\left(J_n-\sum_{l=1}^{k}P^{l-1}\right), \tag{8.1}$$

$$v_n^{(k,l)}=\mathrm{per}\left(J_n-\sum_{l=1}^{k}P^{(i-l-1)}\right), \quad n\geqslant k, \tag{8.2}$$

решают «Problème des ménages» с различными дополнительными ограничениями на размещение мужчин после того, как дамы заняли места за круглым или односторонним прямоугольным столом. Так, комбинаторный смысл $u_n^{(3)}$ состоит в том, что $u_n^{(3)}$ есть число размещений мужчин, при котором им не только запрещено садиться рядом с супругами, но и нельзя занимать места, на которых в выбранном направлении их разделяли бы с супругой 2 кресла. Разумеется, от выбора направления число размещений мужчин не зависит, однако при переходе к одностороннему прямоугольному столу, в котором для определенности первое кресло является мужским, случаи различного выбора направления оказываются не вполне симметричными. Если $2n$ мест пронумеровать символами $1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \ldots, n, \bar{n}$, то после рассаживания дам, для определенности, на местах $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}$ автоматически каждому мужчине присваивается номер кресла, занятого его супругой. При выборе направления от первого кресла в отличие от циклического случая оказывается возможным, чтобы: $(n-1)$-й мужчина мог занять 1-е кресло, а n-й мужчина — 1-е и 2-е кресла. Это соответствует в матрице инцидентности уменьшению числа запрещенных (нулевых) позиций на 3 и переходу от матрицы $J_n-I-P-P^2$ к матрице $J_n-I-P^{(1)}-P^{(2)}$, а число размещений мужчин в этом случае равно $v_n^{(3,0)}$ (см. (8.2)). При выборе же направления к первому креслу в отличие от циклического случая оказывается возможным, чтобы: 1-й мужчина мог занять n-е кресло, а n-й мужчина мог занять 1-е кресло. Это соответствует в матрице инцидентности уменьшению числа запрещенных позиций только на 2 и переходу от матрицы $J_n-I-P^{-1}-P$ к матрице $J_n-P^{(-1)}-$

$-I-P^{(1)}$, а число размещений мужчин в этом случае оказывается равным $v_n^{(3,1)}$.

Следуя Ямамото [161], задачу о перечислении перестановок σ из элементов $1, 2, \ldots, n$ с ограничениями вида $\sigma(x) \neq x \oplus \oplus i (\mathrm{mod}\, n)$, $i=0, 1, \ldots, k-1$, или, что то же, задачу вычисления чисел $u_n^{(k)}$ будем называть циклической проблемой Тушара индекса $k \geqslant 1$. Эта проблема известна также под названиями: «задача о k-противоречивых (диссонирующих, несогласующихся) перестановках» [141], [159], [11], [41], «задача о числе сильно редуцированных латинских прямоугольников» [135]. Последнее название связано с тем, что если рассмотреть $(k+1)$-строчные латинские прямоугольники из элементов $1, 2, \ldots, n$ с фиксированными первыми k строками вида

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ k & k+1 & k+2 & \ldots & k-2 & k-1, \end{array}$$

то их число совпадает с числом выбора $(k+1)$-й строки или с числом k-противоречивых перестановок.

Из свойств перманента (или просто из соображений симметрии) следует, что для $\forall l \geqslant 0$ из (8.1) вытекает также

$$u_n^{(k)} = \mathrm{per}\left(J_n - \sum_{i=1}^{k} P^{i-l-1}\right). \qquad (8.1')$$

Отметим, что $u_n^{(1)} = D_n$ — субфакториал, называемый также числом инверсий (беспорядков) и решающий «задачу о встречах».

В случае аналогичных обобщений «линейной» задачи о супружеских парах, когда сумма $\sum_{i=1}^{k} P^{(i-l-1)}$ содержит слагаемые I_n, $P^{(1)}$ (в силу симметрии достаточно рассматривать случаи $0 \leqslant l \leqslant \frac{k-1}{2}$), последовательность чисел $v_n^{(k,l)}$ (8.2) зависит не только от k, но, вообще говоря, и от l. Задачу вычисления чисел $v_n^{(k,l)}$ будем называть линейной проблемой Тушара индексов k, l.

Обобщенной циклической проблемой Тушара индекса k, поставленной автором в [66], [78], называется проблема вычисления $\mathrm{per}\left(J_n + \sum_{i=1}^{k} (t_i - 1) P^{i-1}\right)$, $n \geqslant k+1$, $t_i \in \mathrm{R}$. Естественность рассмотрения этой проблемы состоит не только в возможности устранения позиций некоторых внутренних диагоналей $\{P^i\}$ из системы ограничений на позиции перестановок, но главным образом в том, что обобщенная проблема обладает важным свойством «преемственности». Например, неясно, как извлечь из решения проблемы Тушара, скажем, порядка 3 решение той же проблемы порядка 2. Из решения же обобщенной проблемы порядка k немедленно вытекает решение той же проблемы для любого порядка $\leqslant k-1$. В частности, для того чтобы получить решение проблемы порядка $k-1$, достаточно положить $t_k=1$. Аналогичное обобщение допускает и линейная проблема Тушара индексов k, l.

Решение обобщенной проблемы Тушара полезно и с точки зрения перечисления перестановок с заданным числом точек d-сдвига по модулю n $(d\leqslant n-1)$. Легко видеть, что число перестановок σ, имеющих i_j точек $(j-1)$-сдвига по модулю, n, $j=1, 2, \ldots, k$, равно

$$\operatorname*{coeff}_{t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_k^{i_k}} \operatorname{per}\left(J_n+\sum_{i=1}^{k}(t_i-1)P^{i-1}\right).$$

§ 9. Ладейная техника

Основная идея применения ладейной техники в проблеме Тушара состоит в том, что вместо вычисления перманента $(n-k)$-диагонального циркулянта $J_n-\sum_{i=1}^{k} P^{i-1}$ вычисляют более общую структуру — ладейный многочлен, но конечно-диагонального циркулянта $\sum_{i=1}^{k} P^{i-1}$.

Определение 9.1. Ладейным многочленом (0,1)-матрицы M называется многочлен вида

$$R_M(x)=\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}x^k,\quad r_{n,0}=1, \tag{9.1}$$

где $r_{n,k}$ при $k\geqslant 1$ означает число способов выбора в M k неколлинеарных (т. е. находящихся в разных строках и разных столбцах) единиц. В частности, $r_{n,n}=\operatorname{per} M$.

Определение 9.2. Многочленом попаданий (0,1)-матрицы M называется многочлен

$$N_M(t)=\sum_{k=0}^{n} N_{n,k}t^k, \tag{9.2}$$

где $N_{n,k}$ — число способов выбора n неколлинеарных элементов матрицы M, среди которых точно k ненулевых.

Непосредственно из определений перманента и многочлена попаданий вытекает равенство

$$N_M(t) = \mathrm{per}\,(J_n + (t-1)M). \tag{9.3}$$

В частности,

$$N_{n,0} = N_M(0) = \mathrm{per}\,(J_n - M). \tag{9.4}$$

Основным общим результатом ладейной теории является формула, позволяющая находить многочлен попаданий $N_M(t)$ (9.2) и, в частности, $\mathrm{per}\,(J_n - M)$ (9.4), если известен ладейный многочлен (9.1).

Теорема 9.1 ([36, с. 196]). Справедлива формула

$$N_M(t) = \sum_{j=0}^{n} r_{n,j}(n-j)!\,(t-1)^j. \tag{9.5}$$

Известны несколько доказательств этой классической формулы (см. [36]; [41, с. 113]). Мы приведем доказательство, основанное на принципе включения-исключения, которое ниже будет распространено на более общий случай. Выберем $r_{n,k}$ способами в M k неколлинеарных единиц. Занимаемые ими позиции можно продолжить до диагонали M $(n-k)!$ способами. Таким образом, можно получить $r_{n,k}(n-k)!$ диагоналей. Однако некоторые из них содержат $>k$ единиц матрицы M. Далее, в каждой диагонали, в которой имеется $j \geqslant k$ единиц матрицы M, $\binom{j}{k}$ способами фиксируются k единиц, и по принципу включения-исключения получим

$$N_{n,k} = \sum_{j=k}^{n} r_{n,j}(n-j)!\binom{j}{k}(-1)^{j-k}.$$

Следовательно,

$$N_M(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{j=k}^{n} r_{n,j}(n-j)!\binom{j}{k}(-1)^{j-k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} r_{n,j}(n-j)! \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}t^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} r_{n,j}(n-j)!\,(t-1)^j.$$

Хронологически, используя ладейную технику, рекуррентные алгоритмы решения частных случаев циклической проблемы Тушара дали: Кэли ($k=2$; см. [36, с. 237]), Риордан ($k=3$; [142]); Ямамото ($k=3$; 161), Уайтхед ($k=4$; [159]). Явные решения были получены: Тушаром ($k=2$; [152]) (в более общей форме [153]), Капланским ($k=2$; [122]), Шёбе ($k=2$; [146]), Мозером ($k=3$; [135]), Нечвейтэлом ($k=4$; диссертация, Университет

Южной Калифорнии, США, 1979, см. [129]). Решения линейной задачи ($k=2$) — явное и рекуррентное — имеются в [36, с. 233, 238]; существование линейного рекуррентного соотношения высокого порядка (67) для $v_n^{(3,0)}$ доказали Кэнфилд и Уормэлд [104].

Развитым автором методом индекса размещений [51] (см. ниже § 11) в работах [47], [50], [67], [69] были получены новые явные решения проблемы Тушара в случаях $k=2,3$, причем в последнем случае — два различных решения; кроме того, были указаны явные решения линейной задачи Тушара: новое решение в случае $k=2$ и — впервые — в случаях $k=3$, $l=0$ и $k=3$, $l=1$. Особенностью этих решений является то, что они были получены с единых позиций и явились реализацией следующего общего утверждения.

Теорема 9.2. Пусть M — квадратная (0,1)-матрица порядка n с условием $\operatorname{tr} M=n$; $L_{M-I}(i, s)$ — число расстановок i неатакующих друг друга ладей на позициях единиц матрицы $M-I$, вместе атакующих $i+s$ позиций главной диагонали. Тогда имеет место формула

$$\operatorname{per}(J-M)=D_n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\sum_{s=0}^{[n/2]} L_{M-I}(i, s)\, D_{n-i}^{(s)}, \tag{9.6}$$

где

$$D_n^{(s)}=\sum_{i=0}^{n-s}(-1)^i\binom{n-s}{i}(n-i)!,\quad s=0, 1, \ldots, n, \tag{9.7}$$

— обобщенные субфакториалы.

Для чисел $D_n^{(s)}$ имеет место рекуррентное соотношение, указанное нами в [67]:

$$D_n^{(n)}=n!,\quad D_n^{(s-1)}=D_n^{(s)}-D_{n-1}^{(s-1)},\quad s=n,\ n-1, \ldots, 1,$$

из которого следует, что значения $D_n^{(s)}$ легко воспроизводятся путем построения треугольной таблицы с диагональю из факториалов. Об этих и других результатах см. также [66], [78]. Отметим еще, что асимптотическое решение циклической проблемы Тушара индекса k получено недавно Годзилом и Мак-Кеем [116, с. 42].

§ 10. Полиладейная техника

Уже в случае обобщенной циклической проблемы Тушара индекса 2 традиционная ладейная техника недостаточна. Рассмотрим полихроматическое обобщение ладейного многочлена, по-видимому, впервые указанное автором в работе [63].

Пусть дана квадратная (0, 1)-матрица M порядка n, единицы которой некоторым образом разбиты на k групп, причем единицы i-й группы окрашены в цвет χ_i, $i=1, 2, \ldots, k$. Через $r_{j_1,\ldots,j_k}$ обозначим число способов выбора j неколлинеарных единиц матрицы M, $j_i (\geqslant 0)$ из которых окрашены в цвет χ_i. Положим по определению $r_{0,\ldots,0}=1$.

Определение 10.1. Полином

$$R_M(\overline{t})=R(t_1, \ldots, t_k)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_k=j} r_{j_1,\ldots,j_k} t_1^{j_1}\ldots t_k^{j_k}\right) \quad (10.1)$$

назовем полихроматическим ладейным многочленом матрицы M (при фиксированной окраске ее единиц).

Через $M^{(t_1,\ldots,t_k)}$ обозначим матрицу, получаемую из M путем замены единиц цвета χ_i на элементы t_i, $i=1, 2, \ldots, k$; через $\sigma_j(M^{(t_1,\ldots,t_k)})$ — сумму подперманентов порядка j (или функцию Тверберга [154]) этой матрицы. Каждому выбору j неколлинеарных единиц матрицы M взаимно однозначно соответствует диагональ некоторой подматрицы порядка j. Следовательно, имеет место формула

$$R(t_1, \ldots, t_k)=\sum_{j=0}^{n} \sigma_j(M^{(t_1,\ldots,t_k)}) \; (\sigma_0=1). \quad (10.2)$$

Далее, через $\overline{M}^{(t_1,\ldots,t_k)}$ обозначим матрицу, получаемую из $M^{(t_1,\ldots,t_k)}$ путем замены ее нулей на единицы.

Определение 10.2. Полином

$$N_M(\overline{t})=N(t_1, \ldots, t_k)=\mathrm{per}\,\overline{M}^{(t_1,\ldots,t_k)}=$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{j_1+\ldots+j_k=j} N_{j_1,\ldots,j_k} t_1^{j_1}\ldots t_k^{j_k}\right) \; (j_i \geqslant 0) \quad (10.3)$$

назовем полихроматическим полиномом попаданий матрицы M (при фиксированной окраске ее единиц).

Следующая теорема является полихроматическим обобщением теоремы 9.1.

Теорема 10.1 ([63]). Справедлива формула

$$N_M(\overline{t})=\sum_{j=0}^{n}(n-j)!\sum_{j_1+\ldots+j_k=j} r_{j_1,\ldots,j_k}(t_1-1)^{j_1}\ldots$$
$$\ldots(t_k-1)^{j_k}. \quad (10.4)$$

Доказательство. Коэффициент $N_{j_1,\ldots,j_k}$ $(j_1+\ldots+j_k=j)$ полихроматического полинома попаданий перечисляет диагонали матрицы M, содержащие j единиц, из которых j_i единиц имеют цвет χ_i. Выберем j неколлинеарных единиц матрицы M, среди которых $j_i (\geqslant 0)$ цвета χ_i, $i=1, 2, \ldots, k$.

Это можно сделать $r_{j_1,\ldots,j_k}$ способами ($j_1+\ldots+j_k=j$). Занимаемые ими позиции можно $(n-j)!$ способами продолжить до диагонали M. Таким образом, можно получить $r_{j_1,\ldots,j_k}(n-j)!$ диагоналей. Однако некоторые из них содержат $>j$ единиц матрицы M. Далее, в каждой диагонали, в которой имеется $q\geqslant j$ единиц матрицы M, q_l из которых цвета χ_l ($q_1+\ldots+q_k=$ $=q$), $\prod_{l=1}^{k}\binom{q_l}{j_l}$ способами фиксируется j единиц, из которых j_l — цвета χ_l, и по принципу включения-исключения получим

$$N_{j_1,\ldots,j_k}=\sum_{q=j}^{n}(-1)^{q-j}(n-q)!\sum_{q_1+\ldots+q_k=q}r_{q_1,\ldots,q_k}\prod_{l=1}^{k}\binom{q_l}{j_l}.$$

Подставляя это в (10.3) и меняя порядок суммирования $\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{q=j}^{n}=\sum_{q=0}^{n}\sum_{j=0}^{q}\right)$, получим

$$N_M(\bar{t})=\sum_{q=0}^{n}(n-q)!\sum_{q_1+\ldots+q_k=q}r_{q_1,\ldots,q_k}\sum_{j=0}^{q}\sum_{j_1+\ldots+j_k=j}\prod_{l=1}^{k}(-1)^{q_l-j_l}\times$$
$$\times\binom{q_l}{j_l}t_l^{j_l}.$$

Замечая еще, что

$$\sum_{j=0}^{q}\sum_{j_1+\ldots+j_k=j}\prod_{l=1}^{k}(-1)^{q_l-j_l}\binom{q_l}{j_l}t_l^{j_l}=$$
$$=\sum_{j_l\leqslant q_l,\, l=1,\ldots,k}\prod_{l=1}^{k}(-1)^{q_l-j_l}\binom{q_l}{j_l}t_l^{j_l}=\prod_{l=1}^{k}(t_l-1)^{q_l},$$

получим доказываемую формулу.

Выясним теперь роль функции Тверберга в решении обобщенной проблемы Тушара. Рассмотрим матрицу $M=\sum_{l=0}^{k-1}P^l$, в которой единицы диагонали P^l окрашены в цвет χ_{l+1}, $l=0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$. Тогда

$$M^{(t_1,\ldots,t_k)}=\sum_{l=1}^{k}t_lP^{l-1},\quad \overline{M}^{(t_1,\ldots,t_k)}=J_n+\sum_{l=1}^{k}(t_l-1)P^{l-1}. \quad (10.5)$$

Следствие. Если

$$\sigma_j\left(\sum_{l=1}^{k}t_lP^{l-1}\right)=\sum_{j_1+\ldots+j_k=j}r_{j_1,\ldots,j_k}t_1^{j_1}\ldots t_k^{j_k},$$

то

$$\operatorname{per}\left(J_n+\sum_{l=1}^{k}(t_l-1)P^{l-1}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{j_1+\dots+j_k=j} r_{j_1,\dots,j_k}(n-j)!\prod_{l=1}^{k}(t_l-1)^{j_l}\right).$$

Следствие непосредственно вытекает из теоремы 10.1 с учетом формул (10.1)—(10.2) и (10.5). Как ладейная, так и полиладейная техника получают дальнейшее развитие в излагаемом ниже методе индекса размещений [51], [67].

§ 11. Метод индекса размещений

Пусть M — квадратная (0,1)-матрица порядка n. Множество позиций (размещение) r ее неколлинеарных единиц

$$(i_1,\ j_1),\ (i_2,\ j_2),\ \dots,\ (i_r,\ j_r)$$

назовем циклическим, если числа $j_1, \dots, j_r$ являются некоторой перестановкой чисел $i_1, \dots, i_r$.

Пусть E — некоторое размещение неколлинеарных единиц матрицы M. Рассмотрим множество его максимальных подмножеств вида $\{(i_1,\ i_2),\ (i_2, i_3), \dots, (i_{t-1},\ i_t),\ (i_t,\ i_{t+1})\}$. Число тех из них, которые не являются циклическими, назовем индексом E ($\operatorname{ind} E$). Из определения следует, что размещение тогда и только тогда имеет нулевой индекс, когда оно является циклическим.

Проекцией E ($\operatorname{pr} E$) на главную диагональ назовем множество позиций вида (i, i), коллинеарных по крайней мере одной из позиций E. В основе метода индекса размещений лежит следующая формула.

Лемма 11.1. $\operatorname{ind} E=|\operatorname{pr} E|-|E|$.

Из леммы 11.1 следует, что $\operatorname{ind} E\leqslant n-|E|$ и, поскольку $\operatorname{ind} E\leqslant|E|$, то $0\leqslant\operatorname{ind} E\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$. Пусть $\operatorname{tr} M=n$. Обозначим через $L_{M-I}(k,\varkappa)$ число размещений k неколлинеарных единиц матрицы $M-I$ с индексом $\varkappa$, принимая естественные соглашения $L_{M-I}(k,\varkappa)=0$ при $\varkappa>k$; $L_{M-I}(0,0)=1$. Функцию L_{M-I} назовем индикаторной функцией матрицы M. Роль индикаторной функции определяется следующей теоремой, из которой вытекает сформулированная выше теорема 9.2.

Теорема 11.1 ([67], [71]). Если $\operatorname{tr} M=n$, то

$$R_M(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\varkappa=0}^{[n/2]}\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i-\varkappa}{k-i}L_{M-I}(i,\varkappa)\,x^k.$$

В случаях $M=I+P$, $I+P^{(1)}$ лемма 11.1 сводит вычисление $L_{M-I}(k, \varkappa)$ к перечислению (0,1)-конфигураций в n циклически или линейно расположенных точках с заданным числом (k) единиц и заданным числом ($\varkappa$) их серий [40, с. 215—217], а в более сложных случаях при различных дополнительных ограничениях на (0,1)-конфигурации, что делает необходимым привлечение более тонкой композиционной техники [96]. Так, в случаях $E\subset P(P^{(1)})$ $\operatorname{ind} E$ равен числу содержащихся в E серий, и мы получаем

$$L_P(k, \varkappa)=\frac{n}{k}\binom{k}{\varkappa}\binom{n-k-1}{\varkappa-1}, \quad L_{P^{(1)}}(k, \varkappa)=\binom{k-1}{\varkappa-1}\binom{n-k}{\varkappa}. \quad (11.1)$$

Из теоремы 9.2 при этом вытекают новые представления чисел $u_n^{(2)}$ и $v_n^{(2,0)}$, решающих циклическую и линейную проблемы Тушара индексов 2 и (2,0). Однако можно получить существенно более общую информацию: полученные результаты позволяют вычислить функцию Тверберга линейных оболочек $\alpha I_n+\beta P$, $\alpha I_n+\beta P^{(1)}$ [69]

$$\sigma_{t,n}(\alpha I+\beta P)=\frac{n}{n-t}\sum_{k=0}^{t}\binom{n-k-1}{t-k}\binom{n-t+k-1}{k}\alpha^{t-k}\beta^k, \quad t<n,$$

$$\sigma_{t,n}(\alpha I+\beta P^{(1)})=\sum_{k=0}^{t}\binom{n-k}{t-k}\binom{n-t+k-1}{k}\alpha^{t-k}\beta^k, \quad t<n,$$

(очевидно, при $t=n$ $\sigma_{n,n}(\alpha I+\beta P)=\alpha^n+\beta^n$, $\sigma_{n,n}(\alpha I+\beta P^{(1)})=\alpha^n$), и тем самым на основании следствия из теоремы 10.1 позволяют указать решения обобщенной проблемы Тушара соответствующих индексов.

Тем же путем, но с привлечением более тонкой композиционной техники автором вычислена функция Тверберга на линейных оболочках $\alpha I_n+\beta P+\gamma P^2$, $\alpha I_n+\beta P^{(1)}+\gamma P^{(2)}$, $\alpha P^{(-1)}+$ $+\beta I_n+\gamma P^{(1)}$ и тем самым решена обобщенная циклическая проблема Тушара индекса 3 и линейная — индексов 3,0 и 3,1. Первые две формулы опубликованы в [69] (третья имеет близкую структуру). Приведем формулы для $L_{M-I}(k, \varkappa)$ для матриц $M_1=I_n+P^{(1)}+P^{(2)}$, $M_2=P^{(-1)}+I_n+P^{(1)}$:

$$L_{M_1-I}(k, \varkappa)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=k}^{n-1}\sum_{m=1}^{r}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l}{m}\binom{l-i}{l-k}\binom{l-k}{\varkappa-m}\times$$

$$\times\binom{i-l+k-1}{\varkappa-m-1}, \quad (11.2)$$

$$L_{M_2-I}(k, \varkappa)=2^{\varkappa}\sum_{p=0}^{\left[\frac{k-\varkappa}{2}\right]}\binom{\varkappa+p}{\varkappa}\binom{n-k+p}{\varkappa+p}\binom{k-2p-1}{\varkappa-1}. \quad (11.3)$$

§ 12. Перечисление перестановок с ограниченными позициями и фиксированным числом циклов

Хорошо известно [36], что число перестановок σ из элементов $1, 2, \ldots, n$, имеющих k циклов, равно абсолютной величине числа Стирлинга 1 рода $s(n, k)$; при ограничении $\sigma(i) \neq i$ это число оказывается равным присоединенному числу Стирлинга 1 рода $d(n, k)$ [36, с. 88]. Насколько нам известно, других фактов относительно перечисления перестановок с ограниченными позициями и заданным числом циклов до сих пор (включая новейшие монографии [11], [41]) не было известно. В статьях [72], [84] для решения задачи в общем виде автором даны основы комбинаторно-алгебраической теории циклических многочленов, или цикломентов, квадратных матриц.

Определение 12.1. Цикломентом квадратной матрицы $A = \{a_{ij}\}$ порядка n называется следующий многочлен n-й степени от z:

$$\operatorname{Cycl}(A; z) = \sum_{\sigma \in S_n} z^{|\sigma|} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{k=1}^{n} z^k \left(\sum_{\sigma \in S_n : |\sigma| = k} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right), \quad (12.1)$$

где S_n — симметрическая группа подстановок степени n, $|\sigma|$ — число циклов подстановки σ.

Коэффициент $\operatorname{coeff}_{z^k} \operatorname{Cycl}(A; z)$ будем называть частичным перманентом матрицы A индекса k, обозначая его $\operatorname{pper}_k A$ (в соответствии с английским partial permanent):

$$\operatorname{pper}_k A = \sum_{\sigma \in S_n : |\sigma| = k} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}, \quad k \geqslant 1. \quad (12.2)$$

В случае (0,1)-матрицы A $\operatorname{pper}_k A$ перечисляет ее диагонали, состоящие из единиц и имеющие k циклов. Последнее означает, что каждая из подстановок $\sigma \in S_n$, соответствующих перечисляемым диагоналям, разлагается в произведение k циклов. Вопрос о числе перестановок класса $\mathfrak{B}_n(A)$ с заданным числом циклов сводится, следовательно, к вычислению $\operatorname{Cycl}(A; z)$. Сведéние задачи размера $n \times n$ к задаче $(n-1) \times (n-1)$ связано с возможностью разложения цикломента по элементам строк (столбцов) матрицы. В частности, формула разложения цикломента по первой строке устанавливается с помощью следующей леммы о подстановках.

Лемма 12.1. Пусть $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Числа циклов подстановок

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \ldots n \\ \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} \in S_{n-1},$$

$$\gamma^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots j-1 & j & j+1 \ldots n \\ \alpha_j & \alpha_2 \ldots \alpha_{j-1} & 1 & \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n \end{pmatrix} \in S_n$$

связаны равенством $|\gamma^{(j)}|=|\alpha|+\delta_{1,j}$, где $\delta_{1,j}$ — символ Кронекера.

Доказательство леммы проводится индукцией по числу циклов подстановки α. Из леммы вытекает следующая формула разложения цикломента по первой строке:

$$\begin{gathered}\operatorname{Cycl}(A;z)=a_{11}z\operatorname{Cycl}(A_{11};z)+a_{12}\operatorname{Cycl}(A_{12};z)+\\+a_{13}\operatorname{Cycl}(A_{13}I_{n-1}^{(1,2)};z)+a_{14}\operatorname{Cycl}(A_{14}I_{n-1}^{(1,2)}I_{n-1}^{(2,3)};z)+\ldots\\\ldots+a_{1n}\operatorname{Cycl}\left(A_{1n}\prod_{i=1}^{n-2}I_{n-1}^{(i,i+1)};z\right),\end{gathered}\tag{12.3}$$

где A_{ij} — матрица, получаемая из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца; $I_n^{(i,j)}$ — матрица, получаемая из I_n перестановкой i-го и j-го столбцов.

Отметим, что $\operatorname{Cycl}(A;1)=\operatorname{per}A$, $\operatorname{Cycl}(A;-1)=(-1)^n\det A$. Другие свойства цикломента и частичных перманентов рассмотрены в цитированных выше работах.

В ряде случаев можно указать достаточно простые формулы вычисления цикломентов матриц порядка n.

1) Если Π — подстановочная матрица подстановки $\pi\in S_n$, имеющая γ_j циклов длины j $\left(\sum_{j=1}^{n}j\gamma_j=n\right)$, то

$$\operatorname{Cycl}(\alpha I_n+\beta\Pi;z)=\prod_{j=1}^{n}(\alpha^jz^j+\beta^jz)^{\gamma_j}.\tag{12.4}$$

Из (12.4) при $z=\mp1$ вытекают формулы

$$\det(\alpha I_n+\beta\Pi)=\prod_{j=1}^{n}(\alpha^j-(-\beta)^j)^{\gamma_j};\quad \operatorname{per}(\alpha I_n+\beta\Pi)=\prod_{j=1}^{n}(\alpha^j+\beta^j)^{\gamma_j},$$

первая из которых при $\alpha=1$, $\beta=-x$ имеется в работе Пойа [32, с. 61], вторая — в [38, с. 98].

2) Путем разложения по первой строке $\operatorname{Cycl}(J_n;z)$ последовательно получим $(z+n-1)(z+n-2)\ldots z\overset{\text{def}}{=}(z)_n$, откуда следует ожидаемый результат: $\operatorname{pper}_kJ_n=(-1)^{n+k}s(n,k)=|s(n,k)|$, где $s(n,k)$ — числа Стирлинга 1 рода.

3) $\operatorname{Cycl}(J_n-I;z)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(z)_{n-i}z^i$, $n\geqslant2$ $((z)_0\overset{\text{def}}{=}1)$ и т. д.

Однако, как и в случае перманентов (и, пожалуй, в ещё большей степени), возможность вычисления цикломента матрицы порядка n является скорее исключением, чем правилом. В связи с этим в следующих двух параграфах укажем основные идеи, реализация которых в ряде случаев позволяет получить явные формулы для цикломентов матриц n-го порядка.

§ 13. Метод коэффициентов вычисления цикломентов теплицевых и циклических матриц

Кратко изложим метод, развитый в [72], [95] (а для перманентов ранее в [56]).

Рассмотрим бесконечную в обе стороны последовательность $\{a_r\}_{-\infty}^{+\infty} \subset \mathbf{C}$, индуцирующую последовательность теплицевых матриц

$$M_n = \sum_{|r| \leqslant n-1} \alpha_r P_n^{(r)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13.1}$$

По последовательности $\{M_n\}$ будем строить последовательность «блоковых матриц». Матрицу $M_1 = (\alpha_0)$ назовем блоком $m_1^{(1)}$; блоки порядка i составят все те подстановочные матрицы порядка i, которые соответствуют диагоналям M_i, не являющихся прямой суммой блоков предыдущих порядков (напомним, что прямой суммой матриц A_1 и A_2 [35, с. 113] называется матрица вида $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$). Согласно этому рекурсивному построению, мы имеем блоки:

$$m_1^{(1)} = (\alpha_0); \quad m_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{-1} & 0 \end{pmatrix}; \quad m_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad m_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Пусть ν_i — число блоков i-го порядка. Через $c_i(z)$ обозначим сумму мономов — цикломентов блоков порядка i:

$$c_i(z) = \sum_{j=1}^{\nu_i} \operatorname{Cycl}(m_i^{(j)}; z). \tag{13.2}$$

Таким образом, имеем последовательность полиномов $\{c_i(z)\}$: $c_1(z) = \alpha_0 z$, $c_2(z) = \alpha_{-1}\alpha_1 z$, $c_3(z) = \alpha_{-2}\alpha_0\alpha_2 z^2 + (\alpha_{-2}\alpha_1^2 + \alpha_{-1}^2\alpha_2) z, \ldots$. Теперь из самого построения следует, что

$$\operatorname{Cycl}(M_n; z) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{coeff}_{x^n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i(z) x^i \right)^k. \tag{13.3}$$

Из (13.3) при $z=1$, $\alpha_i = 1$, учитывая, что $\operatorname{Cycl}(M_n, 1) = n!$, получим рекуррентную формулу, определяющую последовательность $\{\nu_n\}$:

$$\nu_n = n! - \sum_{k=2}^{n} \sum_{i_1 + \ldots + i_k = n, i_j \geqslant 1} \nu_{i_1} \nu_{i_2} \ldots \nu_{i_k}, \quad \nu_1 = 1.$$

Так, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 3$, $\nu_4 = 13, \ldots$.

В ряде случаев формула (13.3) позволяет записать явную формулу для $\operatorname{Cycl}(M_n; z)$. Пусть, например, последовательность $\{\alpha_i\}$ имеет лишь 3 ненулевых элемента: α_{-1}, α_0 и α_t. Тогда

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l(z)\, x^l = \alpha_0 z x + \alpha_{-1}^t \alpha_t z x^{t+1}$$

и, следовательно, согласно (13.3)

$$\operatorname{Cycl}(\alpha_{-1} P^{(-1)} + \alpha_0 I_n + \alpha_t P^{(t)}; z) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{t}\right]} \binom{n-tl}{l} \alpha_{-1}^{tl} \alpha_0^{n-(t+1)l} \alpha_t^l z^{n-tl}.$$

Положим $f_n(w; z) = \sum_{l=1}^{n} c_l(z)\, w^l$. Тогда (13.3) можно переписать в виде

$$\operatorname{Cycl}(M_n; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{coeff}_{w^n} (f_n(w; z))^k.$$

Применение теоремы Коши в достаточно малой окрестности $w=0$ ($|w| \leqslant \rho$) при $|z| \leqslant 1$ приводит к интегральному представлению

$$\operatorname{Cycl}(M_n; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{dw}{(1 - f_n(w; z))\, w^{n+1}}. \tag{13.4}$$

Представление (13.4) позволяет в ряде случаев, используя теорему о вычетах, получить рекуррентные формулы для цикломентов теплицевых матриц. Например, в случае $M_n = \sum_{r=-1}^{t} \alpha_r P_n^{(r)}$

$$\operatorname{Cycl}(M_n; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{dw}{\left(1 - z \sum_{k=0}^{t} \alpha_{-1}^k \alpha_k w^{k+1}\right) w^{n+1}}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Cycl}(M_n; z) = z \sum_{k=0}^{t} \alpha_{-1}^k \alpha_k \operatorname{Cycl}(M_{n-k-1}; z).$$

Можно показать, что для цикломента отсутствует аналог формулы Лапласа разложения перманента или детерминанта по нескольким строкам (столбцам) матрицы (такого разложения, вообще говоря, нет уже по первым двум строкам матрицы размера 5×5). Отсутствие этого аналога, к сожалению, не позволяет для цикломентов k-диагональных циркулянтов построить столь же завершенную теорию, которая построена для перманентов. Однако для малых k метод коэффициентов может быть эффективно использован и для вычисления цикломентов циркулянтов (ср. [66]). Так, в случае 5-диагонального циркулянта $M_n=\alpha P^{-2}+\beta P^{-1}+\gamma I_n+\delta P+\varepsilon P^2$, устанавливается формула

$$\begin{aligned}\operatorname{Cycl}(M_n; z) &= (\alpha^n+\varepsilon^n)\, z^{(n,2)} + (1+(-1)^n)(\alpha\varepsilon)^{\frac{n}{2}} z^2 + \\ &+ z\sum_{k\geq 1}\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}(\beta x+\alpha\gamma z x^2+\alpha^2\delta x^3+\alpha^3\varepsilon z x^4)^k + \\ &+ z\sum_{k\geq 1}\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}(\delta x+\varepsilon\gamma z x^2+\varepsilon^2\beta x^3+\varepsilon^3\alpha z x^4)^k + \\ &+ \sum_{k\geq 1} z^k\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}(\gamma x-\beta\delta x^2+\alpha\gamma\varepsilon z x^3+\alpha^2\varepsilon^2 z x^4 + \\ &+ (1-\alpha\varepsilon x^2)^{-1}((\alpha\delta^2+\varepsilon\beta^2)\, x^3+2\beta\delta x^2))^k. \qquad (13.5)\end{aligned}$$

Заметим, что в подобных выражениях можно достаточно просто освобождаться от дробей под знаком coeff с помощью следующей леммы, которая представляет и самостоятельный интерес (являясь, например, источником многочисленных тождеств комбинаторного характера).

Лемма 13.1. Для аналитических в окрестности точки $x=0$ функций $l(x)$ и $m(x)$ при условии $l(0)=m(0)=0$ справедлива формула

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}(l(x)+m(x)-l(x)\,m(x))^k &= \\ = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}((l(x))^k+(m(x))^k). \qquad (13.6)\end{aligned}$$

Доказательство леммы 13.1 наиболее просто следует из сравнения интегральных представлений обеих частей (13.6) (этот метод доказательств тождеств систематически развит в [12]).

Следствие. Если $p(x)$ и $q(x)$ — аналитические в окрестности нуля функции, то при условии $p(0)=0$, $q(0)=1$ имеет место формула

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^k = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\operatorname*{coeff}_{x^n}((1-q(x)+p(x))^k-(1-q(x))^k)$$

таточно в (13.6) положить $l(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, $m(x)=1-q(x)\Big)$.

Теперь последняя сумма в (13.5) записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \operatorname{coeff}_{x^n} (\gamma xz + (\alpha\varepsilon + \beta\delta z) x^2 - (\alpha\gamma\varepsilon(1-z) - (\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2)) x^3 z +$$
$$+ \alpha\varepsilon(\alpha\varepsilon z^2 + \beta\delta z) x^4 - (\alpha\varepsilon)^2 \gamma z^2 x^5 - (\alpha\varepsilon)^3 z^2 x^6)^k -$$
$$- (1 + (-1)^n)(\alpha\varepsilon)^{\frac{n}{2}}. \qquad (13.7)$$

Если теперь от формулы (13.5) с учетом (13.7) перейти, как обычно, к интегральному представлению, а затем использовать теорему о вычетах, то мы получим обобщение канонического представления перманента (4.5) в случае $k=5$, $x_1=\alpha, \ldots, x_5=\varepsilon$, практическая роль которого, как и для перманента, — в возможности организации рекуррентного процесса вычисления $\operatorname{Cycl}(M_n; z)$ за время $O(n)$ без прямого вычисления начальных значений.

Теорема 13.1. Для величины

$$\sigma_n = \operatorname{Cycl}(M_n; z) - (\alpha^n + \varepsilon^n) z^{(n,2)} - (1 + (-1)^n)(\alpha\varepsilon)^{\frac{n}{2}} (z^2 - 1)$$

справедлива формула

$$\sigma_n = z \sum_{i=1}^{8} \lambda_i^n(z) + \sum_{i=9}^{14} \lambda_i^n(z),$$

в которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ — корни уравнения $\lambda^4 - \beta\lambda^3 - \alpha\gamma z\lambda^2 - \alpha^2\delta\lambda - \alpha^3\varepsilon z = 0$; $\lambda_5, \ldots, \lambda_8$ — корни уравнения $\lambda^4 - \delta\lambda^3 - \varepsilon\gamma z\lambda^2 - \varepsilon^2\beta\lambda - \varepsilon^2\alpha z = 0$; $\lambda_9, \ldots, \lambda_{14}$ — корни уравнения $\lambda^6 - \gamma z\lambda^5 - (\alpha\varepsilon + \beta\delta z)\lambda^4 + (\alpha\gamma\varepsilon(1-z) - (\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2)) z\lambda^3 - \alpha\varepsilon(\alpha\varepsilon z^2 + \beta\delta z)\lambda^2 + (\alpha\varepsilon)^2\gamma z^2\lambda + (\alpha\varepsilon)^3 z^2 = 0$.

Теорема 13.1 может служить источником различных явных формул для цикломентов в форме конечных сумм. Например, каждая из следующих формул является обобщением формулы Кинга и Паркера [123] для $\operatorname{per}(I_n + P + P^2)$:

$$\operatorname{Cycl}(I_n + P + P^2; z) = z^n + z^{(n,2)} + \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-i}{i} z^{i+1} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \binom{n-i-2}{i} z^{i+2}, \qquad (13.8)$$

$$\operatorname{Cycl}(P^{-1} + I_n + P; z) = 2z + \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-i}{i} z^{n-i} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \binom{n-i-2}{i} z^{n-i-1}. \qquad (13.9)$$

§ 14. Применение метода индекса размещений для вычисления цикломентов (0, 1)-матриц

В основе применения метода индекса размещений к вычислению цикломента (0,1)-матриц лежит обобщение для частичных перманентов формулы (9.6). В [67] показано, что формулу (9.6) можно получить не только как следствие теоремы 11.1, но и независимо, используя комбинаторную интерпретацию обобщенных субфакториалов и технику включения-исключения. В этом последнем доказательстве важную роль играет формула разложения перманента матрицы $A=\{a_{ij}\}$ по фиксированному элементу [38, с. 88]. Главным препятствием к обобщению формулы (9.6) на частичные перманенты является разветвление в соответствующей формуле разложения частичного перманента по фиксированному элементу матрицы A. А именно, если A_{ij} имеет тот же смысл, что и выше (§ 12), а A_{ij}' получена из A заменой элемента a_{ij} нулем, то [84]

$$\operatorname{pper}_k A=\begin{cases}\operatorname{pper}_k A_{ij}'+a_{ij}\operatorname{pper}_{k-1} A_{ij}, & \text{если } i=j,\\ \operatorname{pper}_k A_{ij}'+a_{ij}\operatorname{pper}_k(A_{ij}\Pi_{ij}), & \text{если } i\neq j,\end{cases} \tag{14.1}$$

где

$$\Pi_{ij}=\begin{cases}\prod\limits_{h=1}^{i-j-1} I_{n-1}^{(i-h,i-h-1)}, & \text{если } j<i,\\ \prod\limits_{h=i}^{j-2} I_{n-1}^{(h,h+1)}, & \text{если } j>i.\end{cases} \tag{14.2}$$

Положим $L_{(i,j)}(A)=A_{ij}\Pi_{ij}$. Назовем множество F ($|F|=s$) неколлинеарных позиций, расположенных вне главной диагонали матрицы A, T-множеством, если при любой нумерации позиций $F=\{(i_k, j_k)\}_{k=1}^{s}$ для последовательности итераций оператора $L_{(i,j)}$, в которой (i, j) последовательно пробегает позиции (i_1, j_1), $(i_2, j_2)^{(1)}$, $(i_3, j_3)^{(2)}, \ldots, (i_s, j_s)^{(s-1)}$ (здесь $(i_2, j_2)^{(1)}$ — образ позиции (i_2, j_2) при действии оператора $L_{(i_1,j_1)}$; $(i_3, j_3)^{(2)}$ — образ позиции (i_3, j_3) при действии оператора $L_{(i_1,j_1)}\circ L_{(i_2,j_2)^{(1)}}$ и т. д.), ни один элемент F не окажется в какой-либо момент на главной диагонали.

Лемма 14.1. Любое множество F, все позиции которого лежат выше (или ниже) главной диагонали матрицы A, является T-множеством.

Однако условие $i_k<j_k$ (или $j_k<i_k$), $k=1, \ldots, s$, не является необходимым. Так, можно показать, что множество позиций единиц матрицы $P=P_n$ (и, следовательно, любое его подмножество) является T-множеством. Между тем, в нем $i_1<j_1$, но $i_n>j_n$.

Теперь решающую роль на пути к обобщению формулы (9.6) в случае, когда множество позиций единиц матрицы $M-I$ является T-множеством, играет следующая лемма.

Лемма 14.2. Если F — фиксированное T-множество позиций единиц матрицы J_n-I, то число ее диагоналей из единиц, содержащих F и имеющих k циклов, равно $D^{(\operatorname{Ind} F)}_{n-|F|,k}$, где

$$D^{(i)}_{m,k}=\sum_{j=0}^{m-i}(-1)^j\binom{m-i}{j}|s(m-j,\,k-j)|,\quad i\geqslant 0. \tag{14.3}$$

Из леммы 14.2 и принципа включения-исключения вытекает основная теорема, обосновывающая возможность применения метода индекса размещений к вычислению цикломента на некотором классе (0,1)-матриц.

Теорема 14.1. Если M — (0,1)-матрица с единичной главной диагональю, то при условии, что множество позиций единиц матрицы $M-I$ является T-множеством, справедливы формулы

$$\operatorname{pper}_k(J_n-M)=D^{(0)}_{n,k}+(-1)^n\delta_{k,1}L_{M-I}(n,\,0)+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r D^{(\varkappa)}_{n-r,k}L_{M-I}(r,\,\varkappa), \tag{14.4}$$

$$\operatorname{Cycl}(J_n-M;\,z)=D^{(0)}_n(z)+(-1)^n L_{M-I}(n,\,0)z+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r D^{(\varkappa)}_{n-r}(z)\,L_{M-I}(r,\,\varkappa), \tag{14.5}$$

где

$$D^{(i)}_m(z)=\sum_{j=0}^{m-i}(-1)^j\binom{m-i}{j}(z)_{m-j}z^j,\quad i\geqslant 0. \tag{14.6}$$

Отметим, что требование, чтобы единицы матрицы $M-I$ составляли T-множество, существенно. Так, для матрицы

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

оно не выполнено, т. к., например, $\operatorname{tr} L_{1,2}(M-I)=1$. При этом $\operatorname{Cycl}(J-M;\,z)=2z^2+2z$, в то время как формальный подсчет по формулам (14.5)—(14.6) приводит к многочлену $3z^2+z$.

§ 15. Некоторые примеры

1. Мы уже отмечали, что множество единиц матрицы $P = P_n$ является T-множеством. Следовательно, из (11.1), (14.5)—(14.6) вытекают формулы

$$\operatorname{Cycl}(J_n - I - P;\, z) = (-1)^n z + \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} (z)_{n-l} z^l +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\varkappa=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{k} \binom{k}{\varkappa} \binom{n-k-1}{\varkappa-1} \sum_{l=0}^{n-k-\varkappa} (-1)^l \times$$

$$\times \binom{n-k-\varkappa}{l} (z)_{n-k-l} z^l, \tag{15.1}$$

$$\operatorname{Cycl}(J_n - I - P^{(1)};\, z) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} (z)_{n-l} z^l +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\varkappa=1}^{[n/2]} (-1)^k \binom{k-1}{\varkappa-1} \binom{n-k}{\varkappa} \sum_{l=0}^{n-k-\varkappa} (-1)^l \times$$

$$\times \binom{n-k-\varkappa}{l} (z)_{n-k-l} z^l. \tag{15.2}$$

В связи с «Probléme des menáge» $\operatorname{pper}_k(J_n - I - P)$, $\operatorname{pper}_k(J_n - I - P^{(1)})$ приобретают следующий комбинаторный смысл. Согласно этикету, в гостях за каждой дамой ухаживает мужчина, сидящий справа от нее. Если муж A_i ухаживает при этом за женой A_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, l-1$, а муж A_l — за женой A_1, то естественно говорить о «цикле ухаживания» длины l. Если дамы заняли свои места, то $\operatorname{pper}_k(J_n - I - P)$ ($\operatorname{pper}_k(J_n - I - P^{(1)})$) равен числу способов размещений мужчин за круглым (прямоугольным) столом таким образом, чтобы компания распадалась на k «циклов ухаживания». Эта комбинаторная интерпретация является отражением следующего общего положения: в то время как $\operatorname{per} A$ перечисляет системы различных представителей (с. р. п.) семейства L множеств с заданной матрицей инцидентности A, то $\operatorname{pper}_k A$ перечисляет лишь те с. р. п., для которых k — максимальное число, такое, что при разбиении L на k непересекающихся подсемейств L_i, $i = 1, \ldots, k$, с. р. п. распадается на k соответствующих подсистем, так что каждое из подсемейств L_i обладает своей с. р. п.

Интересно, что из недавнего результата Гессел [114] о перечислении 3-строчных редуцированных латинских прямоугольников, 2-я и 3-я строки которых имеют заданные числа циклов, и легко устанавливаемого равенства [72] $\operatorname{Cycl}(J_n - I - \Pi;\, z) = \operatorname{Cycl}(J_n - I - P;\, z)$, где Π — подстановочная матрица какого-либо полного цикла, вытекает несколько более компактная формула для $\mathrm{Cycl}(J_n—I—P; z)$:

$$\mathrm{Cycl}(J_n - I - P; z) = (-1)^n (z^n + z) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \frac{n}{i} (z_i) \sum_{j=0}^{n-i} z^j \binom{i+j-1}{i-1} \binom{n-j-1}{i-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{15.3}$$

Первые значения цикломентов матриц $J_n—I—P$, $J_n—I—P^{(1)}$ при $n \geqslant 3$ соответственно таковы:

$$z,\ z^2+z,\ 5z^2+8z,\ 4z^3+40z^2+36z,\ 63z^3+287z^2+229z,\\ 31z^4+744z^3+2338z^2+1625z, \ldots$$

$$z,\ z^2+2z,\ 7z^2+9z,\ 5z^3+47z^2+44z,\ 74z^3+336z^2+265z,\\ 36z^4+854z^3+2669z^2+1854z, \ldots .$$

2. Множество позиций единиц матрицы $P^{(1)}+P^{(2)}$, очевидно, является T-множеством. Следовательно, из (11.2), (14.5)—(14.6) вытекает формула

$$\mathrm{Cycl}(J_n - I - P^{(1)} - P^{(2)}; z) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (z)_{n-i} z^i + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=k}^{n-1} \sum_{m=1}^{t} \binom{l-i-1}{m-1} \binom{n-l}{m} \binom{l-i}{l-k} \binom{l-k}{\varkappa-m} \times \\ \times \binom{i-l+k-1}{\varkappa-m-1} \sum_{j=0}^{n-k-\varkappa} (-1)^j \binom{n-k-\varkappa}{j} (z)_{n-k-j} z^j, \tag{15.4}$$

где $t = \min(\varkappa, l-i, n-l)$.

Первые значения $\mathrm{Cycl}(J_n—I—P^{(1)}—P^{(2)}; z)$ при $n \geqslant 4$ таковы:

$$z,\ 2z^2+3z,\ z^3+16z^2+16z,\ 23z^3+117z^2+96z,\\ 10z^4+285z^3+948z^2+675z, \ldots .$$

3. Единицы матрицы $P^{(-1)}+P^{(1)}$, очевидно, не образуют T-множество. Поэтому для вычисления $\mathrm{Cycl}(J_n—P^{(-1)}—I—P^{(1)}; z)$ метод индекса размещений впрямую применять нельзя. Однако можно установить следующую модификацию леммы 14.2.

Лемма 15.1. *Если F — фиксированное множество позиций единиц матрицы $J_n — I$, расположенное на конфигурации позиций $P^{(-1)} \cup P^{(1)}$ и имеющее h циклов длины 2, то число диагоналей из единиц матрицы $J_n — I$, содержащих F и имеющих k циклов, равно $D^{(\mathrm{ind}\,F)}_{n-|F|, k-h}$.*

Пусть $L_{P^{(-1)}+P^{(1)}}(k, \varkappa; h)$ — число размещений k неколлинеарных единиц матрицы $P^{(-1)}+P^{(1)}$, имеющих индекс $\varkappa$ и содержащих h циклов длины 2. Методом статьи [67] можно получить

$$L_{P(-1)+P(1)}(k, \varkappa; h)=2^{\varkappa}\binom{\varkappa+h}{\varkappa}\binom{n-k+h}{\varkappa+h}\times$$
$$\times\binom{k-2h-1}{\varkappa-1}\quad(k\leqslant n-1). \qquad (15.5)$$

Теперь отличие от вывода формулы (14.4) на основе принципа включения-исключения будет состоять в том, что слагаемому

$$(-1)^r\sum_{\varkappa=0}^{]n/2[} D_{n-r,k}^{(\varkappa)} L_{M-I}^{(k,\varkappa)}$$

будет соответствовать слагаемое

$$(-1)^r\sum_{\varkappa=0}^{[n/2]}\left(\sum_{h=0}^{[r/2]} D_{n-r,k-h}^{(\varkappa)} L_{M-I}(r, \varkappa; h)\right),$$

где $M=P^{(-1)}+I_n+P^{(1)}$.

В итоге получим формулу

$$\operatorname{pper}_k(J_n-P^{(-1)}-I-P^{(1)})=D_{n,k}^{(0)}+$$
$$+\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r\sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{h=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} D_{n-r,k-h}^{(\varkappa)} L_{P(-1)+P(1)}(r, \varkappa; h),$$

где $D_{m,k}^{(i)}$, $L_{P(-1)+P(1)}(r, \varkappa; h)$ определяются формулами (14.3), (15.5). Первые значения $\operatorname{Cycl}(J_n-P^{(-1)}-I-P^{(1)}; z)$ при $n\geqslant 4$ таковы:

$$z^2,\ 2z^2+2z,\ 5z^3+14z^2+10z,\ 38z^3+102z^2+66z,$$
$$36z^4+364z^3+818z^2+490z, \ldots .$$

4. Аналогично устанавливается формула

$$\operatorname{pper}_k(J_n-P^{-1}-I-P)=D_{n,k}^{(0)}+2(-1)^n\delta_{k,1}+(1+(-1)^n)\delta_{k,\frac{n}{2}}+$$
$$+\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r\sum_{\varkappa=0}^{[n/2]}\sum_{h=0}^{[r/2]} D_{n-r,k-h}^{(\varkappa)} L_{P^{-1}+P}(r, \varkappa; h),$$

где

$$L_{P^{-1}+P}(r, \varkappa; n)=\frac{2^{\varkappa}h}{n-r+h}\binom{\varkappa+h}{\varkappa}\binom{n-r+h}{\varkappa+h}\binom{r-2h-1}{\varkappa-1}$$
$$r\leqslant n-1).$$

Выражение $2(-1)^n\delta_{k,1}+(1+(-1)^n)\delta_{k,\frac{n}{2}}$ соответствует последнему слагаемому в формуле включения-исключения и вычисляется непосредственно. Первые многочлены $\mathrm{Cycl}(J_n-P^{-1}-I-P;\ z)$ при $n\geqslant 4$ имеют вид:

$$z^2,\ 2z,\ 4z^3+10z^2+6z,\ 28z^3+70z^2+46z,$$
$$31z^4+276z^3+604z^2+354z,\ \ldots .$$

§ 16. Об оценках частичных перманентов

Каждый из частичных перманентов даже в классе перестановочно-эквивалентных матриц, порождаемом некоторой $(0,1)$-матрицей с положительным перманентом, ведет себя достаточно хаотично, что затрудняет оценку его величины. Покажем, например, что для частичного перманента любого индекса не имеет места не только нижняя оценка для перманентов Ван дер Вардена—Егорычева—Фаликмана, но и более слабая оценка перманента, связанная с доказанной гипотезой Эрдёша—Реньи: если k — фиксированное целое число $\geqslant 3$, то

$$\lim\inf (\operatorname{per} A)^{\frac{1}{n}} > 1 \text{ для } A\in\Lambda_n^k.$$

Пусть $k=3$. Из формулы (13.9) следует, что при нечетном $n\geqslant 5$ для матрицы $M_1=P^{-1}+I_n+P\in\Lambda_n^3$ $\operatorname{pper}_1 M_1=2$, $\operatorname{pper}_i M_1=0$, если $2\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$. В то же время, длины всех циклов любой диагонали из единиц матрицы $M_2=P_n+P^2+P^3\in\Lambda_n^3$, очевидно, $\geqslant 2$ и, следовательно, ни одна диагональ не может иметь $>\frac{n-1}{2}$ циклов. Таким образом, $\operatorname{pper}_i M_2=0$ при $i>\frac{n-1}{2}$. Сопоставляя эти результаты, заключаем, что при каждом нечетном $n\geqslant 5$ частичный перманент любого индекса на некоторой матрице из класса Λ_n^3 принимает значение $\leqslant 2$, откуда и следует наше утверждение. С другой стороны, разумеется, любая оценка сверху для $\operatorname{per} A$ при $A\geqslant 0$ является оценкой сверху и для каждого частичного перманента A. Более точные оценки для $\operatorname{pper}_i A$ $(A\geqslant 0)$ неизвестны. Выскажем одну гипотезу в духе доказанной Л. М. Брэгманом гипотезы Райзера для перманентов [144].

Гипотеза 4. В классе Λ_{vk}^k, $v\geqslant 2$, частичный перманент индекса i при $i\geqslant v$ достигает максимума на прямой сумме матриц порядка k, составленных из единиц.

Таким образом, если $A\in\Lambda_{vk}^k$ и $i\geqslant v$, то мы предполагаем, что имеет место оценка

$$\operatorname{pper}_i A\leqslant \sum_{l_j\geqslant 1:\, l_1+\ldots+l_v=i} |s(k,l_1)\, s(k,l_2)\ldots s(k,l_v)|,$$

где $s(k,l_i)$ — числа Стирлинга 1 рода.

§ 17. Перечисление перестановок с ограниченными позициями и заданным вычетом декремента по произвольному модулю

Напомним, что конструкции $\frac{1}{2}(\mathrm{per}\,A \pm \det A)$ используются для перечисления четных и нечетных перестановок класса $\mathfrak{B}_n(A)$ или, что то же, перестановок $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$ с заданным вычетом декремента, т. е. величины $n-|\sigma|$, по модулю 2. Известно [34, с. 20], что величина $n-|\sigma|$ равна наименьшему числу транспозиций, переводящих тождественную перестановку $(1, 2, \ldots, n)$ в σ.

Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Рассмотрим многочлен $\omega^n \mathrm{Cycl}\left(A; \frac{z}{\omega}\right)$, в котором показатели ω заменим их наименьшими неотрицательными вычетами по модулю m. Полученный многочлен обозначим $\Delta(A; z, \omega)$. Тогда, как нетрудно заметить, $\operatorname{coeff}_{\omega^i} \Delta(A; 1, \omega)$ перечисляет перестановки $\sigma \in \mathfrak{B}_n(A)$ с заданным вычетом (i) декремента по модулю m. Формально задача решена. Отметим лишь, что многочлен $\Delta(A; 1, \omega)$ непосредственно связан со следующим обобщением детерминанта:

$$\det_m A = \sum_{\sigma \in S_n} \omega^{n-|\sigma|} \prod_{l=1}^{n} a_{l,\sigma(l)}, \quad m \geqslant 2.$$

Очевидно, $\det_2 A = \det A$. Можно показать, что разложение $\det_m A$ по первой строке A имеет вид

$$\det_m A = a_{11} \det_m A_{11} + \omega\,(a_{12} \det_m \tilde{A}_{12} + \ldots + a_{1n} \det_m \tilde{A}_{1n}), \quad (17.1)$$

где

$$\tilde{A}_{1j} = A_{1j}\Pi_{1j} = A_{1j} \prod_{h=1}^{j-2} I_{n-1}^{(h,h+1)}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

причем

$$\det_m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} + \omega a_{12}a_{21}.$$

После проведения вычислений по формуле (17.1) с заменой показателей ω их наименьшими неотрицательными вычетами по модулю m мы, очевидно, получим $\Delta(A; 1, \omega)$. Разумеется, в рассмотренных выкладках следует «забыть» о линейной зависимости чисел $1, \omega, \ldots, \omega^{m-1}$.

§ 18. Перечисление комплексов попарно-противоречивых перестановок с ограниченными позициями

Начнем с упорядоченных пар (σ_1, σ_2) противоречивых перестановок без единичных циклов, т. е. для $\forall i$

$$\sigma_1(i) \neq \sigma_2(i), \ \sigma_1(i) \neq i, \ \sigma_2(i) \neq i.$$

Перечисление пар (σ_1, σ_2) ввиду очевидной биекции сводится к перечислению 3-строчных редуцированных латинских прямоугольников. Таким образом, перечисление пар (σ_1, σ_2) осуществляется классической формулой Риордана [141] для числа K_n 3-строчных редуцированных латинских прямоугольников:

$$K_n = \sum_{n=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} D_k D_{n-k} u_{n-2k},$$

где D_n — число беспорядков, u_n — чило Люка́ из задачи о супружеских парах, $u_1 = -1$, $u_0 = 1$.

Мозер [136] получил обобщение формулы Риордана на случай, когда для второй строки латинских прямоугольников некоторые длины циклов запрещены. Это соответствует перечислению пар (σ_1, σ_2), для которых первая перестановка σ_1 не имеет циклов некоторых фиксированных длин.

Две пары противоречивых перестановок назовем эквивалентными, если сумма матриц инцидентности перестановок, составляющих каждую из пар, суть одна и та же Λ_n^2-матрица.

В статьях [83], [94] мы показали, что существует обширное семейство формул, имеющих одинаковую (или близкую) структуру с формулой Риордана и перечисляющих пары противоречивых перестановок с различными ограничениями на цикловую структуру, порядок элементов в циклах и т. д., а также классы их эквивалентности. Это семейство включает собственно формулу Риордана, формулу Мозера и целый ряд новых формул.

Добавим, что Ира Гессел [114] получила сложную формулу, не являющуюся прямым обобщением формулы Риордана, для числа $K_n[q, r]$ 3-строчных редуцированных латинских прямоугольников, 2-я строка которых имеет q циклов, а третья — r циклов, что соответствует перечислению пар (σ_1, σ_2) с условием $|\sigma_1| = q$, $|\sigma_2| = r$.

Пример несколько иного рода представляет перечисление пар перестановок (σ_1, σ_2) без единичных циклов, относительная цикловая структура которых содержит q равномощных циклов (при этом q делит n). Решение [94] связано с вычислением $\operatorname{per}(J_n - I - P^r)$, осуществленном нами в [49].

Пусть $A \in \Lambda_n^k$. Кёниг (см. [30, с. 49]) впервые показал, что $A = \sum_{j=1}^{k} P_j$, где P_j суть матрицы перестановки.

В [93] поставлен вопрос о числе различных (т. е. не связанных лишь с перенумерацией $\{P_j\}$) представлений Кёнига для матрицы A. Очевидно, после умножения на $k!$ это число совпадает с мощностью класса эквивалентности k-строчных латинских прямоугольников, порожденного матрицей A, или, что то же, с числом комплексов $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ попарно-противоречивых перестановок, ограничения на позиции которых задаются нулями матрицы A. Отметим, что числа таких комплексов перестановок для перестановочно-эквивалентных матриц A, A' равны. В [93] установлено, что числа комплексов перестановок $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ в случае последовательности матриц I_n+P+P^2 (или перестановочно-эквивалентных матриц) образуют последовательность $\{2^n+6+2(-1)^n\}_{n\geq 3}$. Следовательно, последовательность чисел представлений Кёнига для матриц I_n+P+P^2 имеет вид $\left\{1+\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}\right\}$, т. е. 2, 4, 6, 12, 22, 44, 86, ... Попутно в [93] решена одна из проблем из [80].

Другой проблемой является перечисление различных классов эквивалентности комплексов перестановок $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$, или матриц классов $\Lambda_n{}^k$.

В [60] автором указан рекуррентный процесс вычисления чисел $|\Lambda_n^k|$. Явные формулы для $|\Lambda_n^k|$ известны по существу лишь в случае $k=2$ ([119], [42]) и $k=3$ ([119], [41, с. 14]). Асимптотическая формула для $|\Lambda_n^k|$ вытекает из результатов О'Нейла [139], [39, с. 84]:

$$|\Lambda_n^k|=\frac{(kn)!}{k!^n}\, e^{-\frac{(k-1)^2}{2}}\,(1+O(n^{-1+\delta})), \quad k\geqslant 2,$$

где $\delta>0$ произвольно мало при достаточно большом n.

В заключение этого параграфа отметим, что совсем недавно (1990) Годзил и Мак-Кей [116] указали асимптотическую формулу для числа k-строчных латинских прямоугольников из элементов $1, 2, \ldots, n$ при условии $k=O(n^{1-\delta})$, $\delta>0$; при этом классический результат Эрдёша и Капланского [109] непосредственно обобщен для $k=O(n^{6/7})$ (напомним, что в [109] предполагалось, что $k<(\ln n)^{3/2}$, а Ямамото [161] показал, что формула Эрдёша—Капланского справедлива для $k<n^{1/3}$). Несколько ранее Гессел [115] установила P-рекурсивность последовательности чисел $k\times n$-латинских прямоугольников при фиксированном k, а автор в [60] указал рекуррентный процесс для вычисления этих чисел.

§ 19. Спектр чисел перестановок с ограниченными позициями

Пусть $\mathfrak{A}_n$ — некоторый класс квадратных (0,1)-матриц порядка n. Рассматривая матрицы класса $\mathfrak{A}_n$ как характеристические матрицы классов перестановок с ограниченными позициями, поставим задачу описания множества $\{|\mathfrak{B}_n(A)|/A\in\mathfrak{A}_n\}$. Это множество совпадает с множеством значений перманента, принимаемых им на матрицах класса $\mathfrak{A}_n$, или (по В. И. Большакову [5]) — со спектром перманента на $\mathfrak{A}_n$. Ввиду равенства $|\mathfrak{B}_n(A)|=\operatorname{per} A$ мы будем говорить также о спектре чисел перестановок с ограниченными позициями (или просто о спектре чисел перестановок) на $\mathfrak{A}_n$. Заметим прежде всего, что если $\mathfrak{A}_n$ совпадает с множеством всех (0,1)-матриц порядка n, то из результатов Гордона, Моцкина и Уэлча [118] следует, что при $n \geqslant [\log_2(k-1)]+2$ спектр чисел перестановок на $\mathfrak{A}_n$ содержит, по крайней мере, все целые числа из отрезка $[0, k]$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_n = \Lambda_n^k$. Через $C(n, k)$ обозначим спектр перманента на Λ_n^k. В статье [5] В. И. Большаковым найден спектр $C(n, 2)$, а также спектры $C(5,3)$; $C(6,4)$; $C(7,5)$; $C(8,6)$; $C(9,7)$; $C(6,3)$; $C(7,3)$; $C(8,3)$; $C(7,4)$; $C(8,5)$. При этом для максимальных элементов спектров $M(n, k)$ подтверждены гипотетические значения Мерриэлла [124] $M(7,5)=580$; $M(8,6)=4752$; $M(8,5)=1313$; но полученное значение $M(9,7)=43\,424$ опровергает гипотезу Мерриэлла. Заметим, что при исследовании $C(6,3)$, $C(7,3)$ и $C(8,3)$ в [5] использованы полные списки представителей классов изоморфизма связных кубических графов соответственно порядков 12, 14 и 16, найденные в работе [1].

Гринштейном [30, проблема № 3, с. 161] поставлена проблема вычисления спектра $C(n,3)$. Таким образом, В. И. Большаковым получено решение проблемы Гринштейна для $n \leqslant 8$. Кроме того, в [5] в ряде случаев подтверждена до сих пор недоказанная гипотеза Райзера [30, гипотеза № 5, с. 158] о том, что минимум перманента на Λ_n^k достигается на одной из матриц инцидентности (n, k, λ) конфигураций (это означает, что скалярное произведние любых двух строк равно λ), если таковые имеются в Λ_n^k. В [66, с. 18] показано, что спектр перманента на классе $\Lambda_n\{2\}$ квадратных (0, 1)-матриц порядка n, все строчные суммы которых равны 2 (без ограничения на столбцовые суммы), совпадает с множеством $\left\{0, 2, 2^2, \ldots, 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$; если же допускаются и суммы, равные 1, то спектр пополняется элементом 1. Кроме того, в той же работе показано, что спектр перманента циклических матриц класса Λ_n^{n-2} содержит не более чем $\tau(n)$ различных элементов, где $\tau(n)$ — число собственных делителей n. Ранее Хендерсон [120] доказал, что минимум перманента на Λ_n^{n-2} равен $u_n^{(2)}$, если n четно, и $u_n^{(2)}-1$, если n нечетно.

Вернемся к проблеме Гринштейна. Пусть $\mu(n, k)$ означает максимум перманента на подклассе вполне неразложимых матриц из Λ_n^k (т. е. не содержащих Λ_m^k-подматриц). В недавней статье автора [85] получен эффективный условный алгоритм вычисления последовательности верхних значений перманента на Λ_n^k, основанный на весьма правдоподобном предположении о логарифмической выпуклости $\mu(n, k)$.

Гипотеза 5. При $k \geqslant 3$ для $\forall n_1, n_2 \geqslant k$ справедливо неравенство

$$\mu(n_1+n_2, k)\leqslant\mu(n_1, k)\,\mu(n_2, k). \qquad (19.1)$$

Предположение пока доказано лишь на множестве симметрических Λ_n^3-матриц с единичной главной диагональю. Несколько раньше автором [53], [67] был полностью решен вопрос о спектре перманента на этом множестве в следующей форме. Пусть $\mathfrak{R}_{\geqslant 3}(n)$ — множество всех разбиений n с частями $\geqslant 3$. Каждому разбиению $r\in\mathfrak{R}_{\geqslant 3}(n): n=n_1+\ldots+n_m$ поставим в соответствие число $\pi(r)=\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\ldots\alpha_{n_m}$, где α_n — числа, определяемые рекуррентной формулой $\alpha_n=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2-2}$, $n\geqslant 5$, с начальными условиями $\alpha_3=6$, $\alpha_4=9$.

Теорема 19.1. Множеством значений перманента в классе симметрических Λ_n^3-матриц с единичной главной диагональю является множество $\{\pi(r)/r\in\mathfrak{R}_{\geqslant 3}(n)\}$.

В [59] этот результат обобщен на более широкий класс матриц с решением ряда экстремальных задач распределения значений перманента на нем.

Приведем ряд условных утверждений, вытекающих из (19.1), на которых базируется алгоритм работы [85].

Лемма 19.1. Если гипотеза 5 справедлива, то при $n\geqslant k+1$, $3\leqslant k\leqslant 8$, справедлива оценка $\mu(n, k)\leqslant D_{k+1}^{\frac{n}{k+1}}$, где D_n — субфакториал.

Лемма 19.1 устанавливается с помощью непосредственно проверяемой оценки $\mu(k+2, k)\leqslant D_{k+1}^{\frac{k+2}{k+1}}$ $(3\leqslant k\leqslant 8)$, базирующейся на известных значениях максимума перманента на Λ_{k+2}^k при $k=3,\ldots,8$ [5], [6]. Мы предполагаем, что эта оценка имеет место и при $k\geqslant 9$. В таком случае как лемма 19.1, так и следующие условные результаты распространяются на произвольные значения $k\geqslant 3$.

Следующее утверждение вытекает из леммы 19.1 с использованием неравенства Минка—Брэгмана.

Лемма 19.2. Пусть $3\leqslant k\leqslant 8$ и $n=k\lambda_k+(k+1)\lambda_{k+1}+\ldots+n\lambda_n$ — некоторое разбиение числа n с частями $\geqslant k$. Если $\lambda_k\leqslant l$, $kl+(k-1)m=n$ и $A_i\in\Lambda_i^k$, $i=k,\ldots,n$, — вполне неразложимые матрицы, то при условии справедливости гипотезы 5 $\prod\limits_{i=k}^{n}(\operatorname{per}A_i)^{\lambda_i}\leqslant k!^l D_{k+1}^m$.

Пусть $n\equiv j \pmod k$, $j=0, 1,\ldots,k-1$, и $t\in N$. Обозначим через $\mathfrak{R}_{\geqslant k}(m)$, $m\geqslant k$, множество всех разбиений $r=(r_1, r_2,\ldots)$ числа m с частями $\geqslant k$. Разбиениям $r\in\mathfrak{R}_{\geqslant k}(m)$ и $\rho\in\mathfrak{R}_{k+1}(m)$ сопоставим соответственно множества

$$\Pi_{m,k}(r)=\Big\{\prod_{r_i\in r} x_{r_i}\Big\};\quad \Pi_{m,k+1}(\rho)=\Big\{\prod_{\rho_i\in\rho} x_{\rho_i}\Big\},$$

в которых x_s пробегает все значения перманента на множестве вполне неразложимых матриц класса Λ_s^k; при этом в случае $m=k$, когда $\rho=\varnothing$, условимся, что $\Pi_{k,\,k+1}(\rho)$ есть одноэлементное множество $\{k!\}$. Рассмотрим теперь множество

$$E_{k,t}^{(j)}=\bigcup_{i=1}^{(k+1)t+j}\left\{y\cdot(k!)^{\frac{n-j}{k}-i}\,\middle|\,y\in\Pi_{kt+j,k+1}(\rho):y\geqslant D_{k+1}^{kt+j}(k!)^{i-(k+1)t-j}\right\}.$$

Теорема 19.2 ([85]) (алгоритм вычисления верхних значений перманента на Λ_n^k). Если справедлива гипотеза 5, то упорядоченное по убыванию элементов множество $E_{k,t}^{(j)}$ определяет $|E_{k,t}^{(j)}|$ верхних значений перманента на Λ_n^k при $n\geqslant(k+1)\times\times(kt+j)$, $3\leqslant k\leqslant 8$.

Пусть $M_i(n,3)$ означает i-й элемент спектра $C(n,3)$ при упорядочении его элементов по убыванию.

Следствие 1. Если $n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,k)$, то при $3\leqslant k\leqslant 8$

$$M_1(n,k)=D_{k+1}(k!)^{\frac{n-k-1}{k}},\quad n\geqslant k+1. \qquad (19.2)$$

В случае $k=3$ (19.2) согласуется с результатом Мэрриэлла [124], а в случае $k=4$ — с результатом В. И. Большакова [6].

Следствие 2. Если $n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,k)$, то при $k=3$, 5, 6, 7, 8

$$M_1(n,k)=D_{k+1}^2(k!)^{\frac{n-2k-2}{k}},\quad n\geqslant 2(k+1), \qquad (19.3)$$

а в случае $k=4$

$$M_1(n,4)=82\cdot 24^{\frac{n-6}{4}},\quad M_2(n,4)=44^2\cdot 24^{\frac{n-10}{4}},\quad n\geqslant 10.$$

В случае $k=3$, (19.3) согласуется с результатом Мэрриэлла [124].

Следствие 3. Если $n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$, то при $n\geqslant 15$

$$M_1(n,4)=3608\cdot 24^{(n-11)/4},$$

если $n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,5)$, то при $n\geqslant 18$

$$M_1(n,5)=1313\cdot 120^{\frac{n-8}{5}},\quad M_2=265^3\cdot 120^{\frac{n-18}{5}}.$$

В качестве примера непосредственных расчетов по теореме 19.2 с использованием известных спектров $C(i,3)$, $i\leqslant 8$, приведем первые 11 верхних значений перманента на Λ_n^3 при $n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Значения величины $6^{-\frac{n-2}{3}}M_i(n,3)$, $i\leqslant 11$, $n\geqslant 32$, таковы [85]: $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{6}$, 2, $\frac{13}{9}$, $\frac{49}{36}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{31}{24}$, $\frac{81}{64}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{39}{32}$. При этом M_1, M_2, M_5, M_7, M_8, M_9 достигаются на симметрическом сужении класса Λ_n^3. Есть, однако, основания предполагать, что справедлива

Гипотеза 6. Среди первых N верхних значений перманента на Λ_n^3 ($n > n(N)$) доля тех из них, которые достигаются на множестве симметрических матриц класса Λ_n^3, стремится к 0 при $N \to \infty$.

Пусть $m_i(n, 3)$ означает i-й элемент спектра $C(n, 3)$ при упорядочении его элементов по возрастанию. Обозначим $\operatorname{tail} C(n, 3) = \{m_i(n, 3) \mid m_i(n, 3) = m_1(n, 3) + i - 1\}_{i \geqslant 1}$, называя это множество хвостом спектра $C(n, 3)$.

Гипотеза 7 (о хвосте). $|\operatorname{tail} C(n, 3)| \uparrow \infty$ при $n \to \infty$.

Интересно оценить скорость роста $|\operatorname{tail} C(n, 3)|$ при $n \to \infty$. Первые значения длин хвостов при $n \geqslant 3$ таковы: 1, 1, 2, 2, 4, 10, ...

Ядром спектра $C(n, 3)$ назовем множество

$$\operatorname{kern} C(n, 3) = \{M_i(n, 3) \mid M_i \geqslant \sup \operatorname{tail} C(n, 3)\}.$$

Таким образом, $|\operatorname{kern} C(n, 3) \cap \operatorname{tail} C(n, 3)| = 1$. Первые значения мощностей ядер при $n \geqslant 3$ таковы: 1, 1, 1, 3, 5, 9, ... Продолжится ли эта «закономерность Трибоначчи» и далее? Положительный ответ на этот вопрос или получение иной закономерности имело бы важное значение для описания структуры спектра $C(n, 3)$ при произвольном n.

§ 20. Обратная задача перечисления перестановок с ограниченными позициями

Обратной задачей перечисления перестановок с ограниченными позициями будем называть задачу перечисления матриц $A \in \mathfrak{A}_n$, для которых

а) $\mathfrak{B}_n(A) \neq 0$ (слабая задача);

б) $|\mathfrak{B}_n(A)| = m$ $(\forall m \geqslant 0)$ (сильная задача).

В первом случае число матриц обозначим ν_n, во втором — $\mathcal{N}_n(m)$. Отметим, что сильная задача эквивалентна задаче распределения значений перманента на $\mathfrak{A}_n$.

Зададим на $\mathfrak{A}_n$ равномерное вероятностное распределение, приписывая каждой матрице $A \in \mathfrak{A}_n$ вероятность $|\mathfrak{A}_n|^{-1}$.

Тогда

$$\mathcal{N}_n(m) = |\mathfrak{A}_n| P(\operatorname{per} A = m).$$

Для характеризации распределения значений перманента на $\mathfrak{A}_n$ полезно также вычисление величин $M(\operatorname{per} A)$, $D(\operatorname{per} A)$.

В случае, когда $\mathfrak{A}_n$ совпадает с множеством $\mathfrak{M}_n$ всех квадратных (0,1)-матриц порядка n, Эверетт и Стейн [111] показали, что

$$2^{n^2} - \nu_n \sim n 2^{n^2 - n + 1}.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} P(\operatorname{per} A > 0 \mid A \in \mathfrak{M}_n) = 1$. Е. Е. Маренич [28] получил в этом случае ряд сравнений по простому модулю для чисел $2^{n^2} - \nu_n$ и $\mathcal{N}_n(m)$.

Автором [66], [83], [92] получены значения $\mathcal{N}_n(m)$ для классов а) $\mathfrak{A}_n=\Lambda_n^2$; б) $\mathfrak{A}_n=\{A\in\Lambda_n^2|\operatorname{tr} A=0\}$; в) $\mathfrak{A}_n=\Lambda_n\{2\}$ и др. Кроме того, в [60] нами указан рекуррентный процесс для вычисления $M(\operatorname{per} A)$ на Λ_n^k. Асимптотика $M(\operatorname{per} A)$ и $D(\operatorname{per} A)$ на Λ_n^k дана О'Нейлом ([139], [39, с. 84]). Отметим также, что в [66], [83] получена явная формула для $M(\operatorname{per} A)$ на Λ_n^3.

Пусть $\mathfrak{U}(L)$ — класс (0,1)-матриц, содержащих L единиц. Сачковым [39, с. 80—81] в случае $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{U}_n(L)$ указаны явные и асимптотические формулы для $M(\operatorname{per} A)$ и $D(\operatorname{per} A)$ и приводятся теоремы О'Нейла [140] об асимптотическом совпадении $\operatorname{per} A$ и $M(\operatorname{per} A)$ при $A\in\mathfrak{U}_n(L)$, $L>n^{3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, и Эрдёша и Реньи [110] об асимптотике ν_n в случае $L\sim n\ln n$. В классе матриц $\mathfrak{U}^*(L)$, в каждой строке которых содержится $\frac{L}{n}\sim\ln n$ единиц $(n|L)$, а также в классе $\Lambda_n\{2\}$ асимптотика ν_n получена автором [66], [48], [92]. В последнем случае для ν_n автором были найдены также эффективные рекуррентные и явные формулы. Отметим, что недавняя работа Л. А. Ляпкова и Б. А. Севастьянова [27] посвящена асимптотическому перечислению (0,1)-матриц, перманент которых имеет фиксированную четность. Используя алгоритм проверки перманента на четность, вытекающий из формулы Райзера [35, с. 34], автор [86] получил контрпример к следующему предположению Баласубраманиана [97]: если $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — перестановочные (0,1)-матрицы порядка n, сумма которых равна J_n, то для $r=2, 3, \ldots, n$

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_r\leqslant n} \operatorname{per}(P_{i_1}+P_{i_2}+\ldots+P_{i_r})\equiv 0 \pmod 2.$$

В [97] показано, что из справедливости этого предположения вытекало бы утверждение известной гипотезы Райзера [145] о том, что число трансверсалей любого латинского квадрата и его порядок имеют одинаковую четность.

§ 21. Некоторые арифметические свойства чисел перестановок с циркулянтными множествами допустимых позиций

В работе [54] автором был установлен следующий факт: если M — (0,1)-циркулянт из класса Λ_n^k и n — степень простого числа p, то $\operatorname{per} M\equiv k \pmod p$.

Этот результат был обобщен нами в работах [62], [78].

В 1956 году Ямамото [161] высказал предположение, что для $\forall k\geqslant 1$ справедливо сравнение

$$\operatorname{per}\sum_{l=1}^{k} P_n^{l-1}\equiv(-1)^n \operatorname{per}\left(J_n-\sum_{l=1}^{k} P_n^{l-1}\right) \pmod n,$$

доказав его для $k\leqslant 3$.

В работе [64] автором не только доказано это предположение Ямамото, но и установлено, что вообще для любых двух (0,1)-циркулянтов M_1, M_2, взаимно дополняющих друг друга до J_n (т. е. $M_1+M_2=J_n$), имеет место сравнение

$$\operatorname{per} M_1 \equiv (-1)^n \operatorname{per} M_2 \pmod n.$$

Историческая справка и анализ доказательства гипотезы Ямамото в духе Пойа [31], а также библиография даны нами в [87].

Отметим далее, что из результатов работы [73] вытекает следующее разложение по степеням $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$ перманента циркулянта I_n+P^k (этим подтверждается одно из наших предположений [79]):

$$\operatorname{per}(I_n+P^k) = 1 + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=1}^{k} \nu_{k,s}\left(r - \frac{s}{4}(1+(-1)^s)\right) \omega^{rn}, \qquad (21.1)$$

в котором арифметический смысл коэффициентов состоит в том, что $\nu_{k,s}(r)$ есть число решений сравнения

$$x_1 + \ldots + x_s \equiv r \pmod k,$$

где все x_i различны и пробегают полную систему вычетов $0, 1, \ldots, k-1$ по модулю $k>1$. Ранее Николь [138] дал явное представление для $\nu_{k,s}(r)$, которое, однако, по существу непригодно для вычислений. Из (21.1) в [73] автору удалось вывести весьма простую формулу

$$\nu_{k,s}(r) = \frac{1}{k} \sum_{d \mid (k,s)} (-1)^{s+\frac{s}{d}} \binom{k/d}{s/d} \varphi(d) \lambda\left(\frac{d}{(r,d)}\right), \qquad (21.2)$$

$$1 \leqslant s \leqslant k-1,$$

где $\lambda = \frac{\mu(n)}{\varphi(n)}$, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\varphi(n)$ — функция Эйлера, с помощью которой исследованы многочисленные свойства чисел $\nu_{k,s}(r)$. Кроме того, в [73] установлена связь чисел $\nu_{k,s}(r)$ с коэффициентами многочленов Гаусса $\left[{k \atop s}\right]$ из теории разбиений [96]. Сравнение (21.2) с формулой Стенли [41, с. 79] о числе подмножеств множества вычетов по модулю k, сумма элементов которых равна 0 по модулю k, приводит к тождеству

$$\sum_{s=0}^{k} \sum_{d \mid (k,s)} (-1)^{s+\frac{s}{d}} \binom{k/d}{s/d} \varphi(d) = \sum_{d_1 \mid k:\, d_1 \text{ нечетно}} \varphi(d_1)\, 2^{\frac{k}{d_1}}.$$

В заключение отметим, что целый ряд других тождеств, возникающих при различных подходах к вычислению перманентов (0,1)-матриц, представлен нами в [76].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бараев А. М., Фараджев И. А.* Построение и исследование на ЭВМ однородных и однородных двудольных графов.— В кн.: Алгоритмические исследования в комбинаторике.— М.: Наука, 1978.— С. 25—60 (РЖМат, 1979, 6В622)
2. *Бендер Э., Гольдман Дж.* О приложениях обращения Мёбиуса в комбинаторном анализе.— В кн.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа.— М.: Мир, 1979.— С. 311—335 (РЖМат, 1980, 3В545К)
3. *Большаков В. И.* $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$-перманенты и их приложения // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1985.— № 3.— С. 18—22 (РЖМат, 1985, 9А213)
4. — $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$-перманенты и системы ограниченных представителей // Успехи мат. наук.— 1985.— *40*, № 6.— С. 135—136 (РЖМат, 1986, 5В621)
5. — О спектре перманента на Λ_n^k // Мат. Всес. семин. по дискрет. мат. и ее прил.— М., 1986.— С. 65—73 (РЖМат, 1986, 8В704)
6. — О верхних значениях перманента на Λ_n^k // Комбинатор. анал. (Москва).—1986.— № 7.— С. 92—118 (РЖМат, 1987, 9В539)
7. *Брэгман Л. М.* Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов // Докл. АН СССР.— 1973.— *211*, № 1.— С. 27—30 (РЖМат, 1973, 10В310)
8. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика.— М.: Наука, 1975.— 208 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с. (РЖМат, 1968, 3А312К)
10. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.— 375 с. (РЖМат, 1967, 7Б5К)
11. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика.— М: Наука, 1990.— 503 с. (РЖМат, 1990, 10В470К)
12. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.— Новосиб.: Наука, 1977.— 286 с. (РЖМат, 1978, 3В444К)
13. — Полиномиальное тождество для перманента // Мат. заметки.— 1979. — *26*, № 6.— С. 961—964 (РЖМат, 1980, 4А372)
14. — Семейство тождеств для перманента // Докл. АН АрмССР.— 1979. — *69*, № 1.— С. 3—8 (РЖМат, 1980, 8В291)
15. — Новые формулы для перманента // Докл. АН СССР.— 1980.— *254*, № 4.— С. 784—787 (РЖМат, 1981, 2В450)
16. — Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов // Препр. / Ин-т физ. СО АН СССР.— 1980.— № 13М.— С. 1—11 (РЖМат, 1981, 4В398)
17. — Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов // Докл. АН СССР.— 1981.— *285*, № 5.— С. 1041—1044 (РЖМат, 1981, 11В261)
18. — Доказательство гипотезы Ван дер Вардена для перманентов // Сиб. мат. ж.— 1981.— *22*, № 6.— С. 65—71 (РЖМат, 1982, 3В537)
19. — История и доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманентах. — В кн.: Математика сегодня.— Киев: Вища школа, 1986.— С. 44—75 (РЖМат, 1986, 7А537)
20. — Смешанные дискриминанты и параллельное сложение // Докл. АН СССР.— 1990.— *312*, № 3.— С. 528—531 (РЖМат, 1990, 11А282)
21. — , *Кытманов А. М.* Полиномиальные тождества и представление перманента через сумму локальных вычетов // Препр. / Ин-т физ. СО АН СССР.— 1987.— № 37М.— С. 1—18 (РЖМат. 1987, 12А307)
22. *Коваленко С. П.* Некоторые свойства перманентов // Докл. АН УССР. А.— 1988.— № 1.— С. 16—18 (РЖМат, 1988, 6А333)
23. — Родство теоремы Лапласа и формулы Бине—Коши для определителей и перманентов // Докл. АН УССР. А.— 1989.— № 11.— С. 9—12 (РЖМат, 1990, 4В530)
24. *Коганов Л. М.* Интерпретация перманента как суммы весов инъекций m-элементного множества в n-элементное $(m \leqslant n)$ // Кибернетика (Киев).— 1985.— № 5.— С. 21—24 (РЖМат, 1986, 4В635)

25. — Использование одного комбинаторного тождества при перечислении комбинаций, инвариантных относительно подстановки // Čas. pěstov. mat.— 1987.— *112*, № 1.— С. 58—65 (РЖМат, 1987, 6В496)
26. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Физматгиз, 1963.— 432 с. (РЖМат, 1964, 1А196К)
27. *Ляпков А. А., Севастьянов Б. А.* Распределение вероятностей перманента случайной булевой матрицы // Дискрет. мат.— 1990.— *2*, № 2.— С. 138—144 (РЖМат, 1990, 10В461)
28. *Маренич Е. Е.* Сравнения по простому модулю для числа (0, 1)-матриц // Дискрет. мат.— 1990.— *2*, № 3.— С. 153—157 (РЖМат, 1991, 4В595)
29. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972.— 232 с. (РЖМат, 1973, 1А350К)
30. *Минк Х.* Перманенты.— М.: Мир, 1982.— 213 с. (РЖМат, 1983, 2А289К)
31. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание.— М.: Наука, 1976.— 448 с. (РЖМат, 1976, 12А27К)
32. — Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений.— В кн.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа.— М.: Мир, 1979.— С. 311—335 (РЖМат, 1980, 3В545К)
33. *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1947.— 144 с.
34. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре.— М.: Наука, 1967.— 384 с.
35. *Райзер Г. Дж.* Комбинаторная математика.— М.: Мир, 1966.— 156 с. (РЖМат, 1966, 9А125К)
36. *Риордан Дж.* Ввведение в комбинаторный анализ.— М.: Ин. лит., 1963. — 287 с. (РЖМат, 1963, 9А124К)
37. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ.— М.: МГУ, 1985.— 308 с. (РЖМат, 1985, 11В564К)
38. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.— 319 с. (РЖМат, 1978, 4В321К)
39. — Вероятностные методы в комбинаторном анализе.— М.: Наука, 1978. — 288 с. (РЖМат, 1979, 2В7К)
40. — Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1982.— 384 с.
41. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика.— М.: Мир, 1990.— 440 с. (РЖМат, 1991, 3В520К)
42. *Тараканов В. Е.* Комбинаторные задачи на бинарных матрицах // Комбинатор. анал. (Москва).— 1980.— № 5.— С. 4—15 (РЖМат, 1981, 4В397)
43. — Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы.— М.: Наука, 1985.— 192 с.
44. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.— М.: Наука, 1972.— 304 с.
45. *Фаликман Д. И.* Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы // Мат. заметки.— 1981.— *29*, № 6.— С. 931—938 (РЖМат, 1981, 12А364)
46. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ.— М.: Мир, 1989.— 655 с. (РЖМат, 1989, 9А297К)
47. *Шевелев В. С.* Новое решение задачи о гостях и вычисление per$(J_n$—$—I—P—P^2)$ / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1986.— 5 с. — Деп. в ВИНИТИ 28.02.86, № 1359—В (РЖМат, 1986, 6В634ДЕП)
48. — Исследование одной суммы по присоединенным числам Стирлинга I рода / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1986.— 3 с.— Деп. в ВИНИТИ 28.02.86, № 1360—В (РЖМат, 1986, 6В633ДЕП)
49. — Формула для per$(J_n—I—P^r)$ / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1986.— 4 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.10.86, № 6974—В (РЖМат, 1986, 12В762ДЕП)
50. — Замечание о формуле для per$(I^n—I—P—P^2)$ / Ростов. инж.-строит.

ин-т.— Ростов н/Д, 1986.— 3 с.— Деп в ВИНИТИ 02.10.86, № 6975—В (РЖМат, 1986, 12В763ДЕП)
51. — Об индексе размещения / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1986.— 4 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.10.86, № 6976—В (РЖМат, 1986, 12В761ДЕП)
52. — Число циклических подмножеств независимых единиц квадратной (0,1)-матрицы / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 4 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.02.87, № 743—В87 (РЖМат, 1987, 4В549ДЕП); Тр. II Всес. семин. по дискрет. мат. и прил.— М.: МГУ, 1989.— С. 276
53. — Теорема о множестве значений перманента симметрических матриц класса Λ_n^3 / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 7 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.02.87, № 749—В87 (РЖМат, 1987, 4В476ДЕП); Тр. II Всес. семин. по дискр. мат. и прил.— М.: МГУ, 1989.— С. 276
54. — Об арифметических свойствах последовательностей, связанных с перманентами циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 5 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.02.87, № 750—В87 (РЖМат, 1987, 4В475ДЕП)
55. — Смешанные циклы подстановок и оценка снизу для перманентов циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 6 с.— Деп. в ВИНИТИ 24.02.87, № 1299—В87 (РЖМат, 1987, 6В499ДЕП)
56. — Метод коэффициентов вычисления перманента теплицевых матриц и циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ 24.02.87, № 1300—В87 (РЖМат, 1987, 6В508ДЕП)
57. — Интегральные представления, оценки и рекуррентные формулы для перманентов теплицевых матриц и циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 15 с.— Деп. в ВИНИТИ 09.07.87, № 4876—В87 (РЖМат, 1987, 10В621ДЕП)
58. — Композиционный метод вычисления перманентов циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 10 с.— Деп. в ВИНИТИ 09.07.87, № 4877—В87 (РЖМат, 1987, 10В620ДЕП)
59. — О значениях перманента на множестве матриц класса $\Lambda_n(\alpha, \beta, \gamma)$ с симметрическим расположением ненулевых элементов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1987.— 7 с.— Деп. в ВИНИТИ 09.07.87, № 4878—В87 (РЖМат, 1987, 10В619ДЕП)
60. — Рекуррентный метод перечисления некоторых классов матриц / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1988.— 18 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.02.88, № 896—В88 (РЖМат, 1988, 5В608ДЕП)
61. — Рекуррентные формулы и интегральные представления для перманентов циклических матриц / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1988.— 6 с.— Деп. в ВИНИТИ 12.05.88, № 3651—В88 (РЖМат, 1988, 8В506ДЕП)
62. — О «перманентном» обобщении малой теоремы Ферма / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1988.— 3 с.— Деп. в ВИНИТИ 05.08.88, № 6305—В88 (РЖМат, 1988, 12А72ДЕП)
63. — Полихроматическая задача о ладьях / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1988.— 4 с.— Деп. в ВИНИТИ 05.08.88, № 6306—В8 (РЖМат, 1988, 11В479ДЕП)
64. — Об одном предположении Ямамото // Докл. АН УССР. А.— 1988.- № 11.— С. 32—35 (РЖМат, 1989, 7В531)
65. — К проблеме вычисления перманентов циклических матриц / Ростов инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1988.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ 29.12.88, № 9145—В88 (РЖМат, 1989, 4В476ДЕП)
66. — Некоторые новые результаты, гипотезы и проблемы в теории перманентов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1989.— 85 с.— Деп. в ВИНИТИ 14.11.89, № 6828—В89 (РЖМат, 1990, 3В393ДЕП)
67. — Об одном методе построения ладейных многочленов и некоторых его приложениях // Комбинатор. анал. (Москва).— 1989.— № 8.— С. 124—138 (РЖМат, 1990, 10В474)
68. — К представлению перманента циклической матрицы порядка n суммой n-х степеней не зависящих от n комплексных чисел / Ростов.

инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д. 1990.— 19 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.01.90, № 412—В90 (РЖМат, 1990, 5В474ДЕП)
69. — Суммы подперманентов линейных оболочек подстановочных матриц // Дискрет. мат.— 1990.— *2*, № 3.— С. 65—80 (РЖМат, 1991, 4В598)
70. — Рекуррентные формулы для перманентов и детерминантов циклических, теплицевых и некоторых классов ленточных матриц. Канонические представления перманента и детерминанта *г*-циркулянта / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— 25 с.— Деп. в ВИНИТИ 06.04.90, № 1902—В90 (РЖМат, 1990, 8А281ДЕП)
71. — Об одном представлении ладейных многочленов // Успехи мат. наук. — 1990.— *45*, № 4.— С. 171—172 (РЖМат, 1991, 6В522)
72. — Алгоритмы параллельного вычисления детерминантов, перманентов и сумм диагональных произведений квадратной матрицы с фиксированным числом циклов диагоналей / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— 37 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.05.90, № 2524—В90 (РЖМат, 1990, 8А280ДЕП)
73. — Перманенты и комбинаторная проблема вычетов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— 25 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.05.90, № 2525—В90 (РЖМат, 1990, 8В366ДЕП)
74. — Об определении номера k-сочетания в упорядоченном лексикографически множестве k-сочетаний из n элементов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.07.90, № 4065—В90 (РЖМат, 1990, 11В461ДЕП)
75. — Основная теорема о последовательностях перманентов циркулянтов, порождаемых k-мерными арифметическими векторами, и ее применения // Докл. АН УССР. А.— 1990.— № 9.— С. 28—32 (РЖМат, 1991, 4А399)
76. — Некоторые комбинаторные тождества, возникающие в теории перманентов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— 21 с.— Деп. в ВИНИТИ 18.10.90, № 5395—В90 (РЖМат, 1991, 2В472ДЕП)
77. — К теории перечисления перестановок с ограниченными позициями / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— 30 с.— Деп. в ВИНИТИ 25.12.90, № 6415—В90 (РЖМат, 1991, 6В521ДЕП)
78. — Некоторые вопросы теории перманентов циклических матриц // Перманенты: теория и прил. / Краснояр. политехн. ин-т.— Красноярск, 1990.— С. 109—126 (РЖМат, 1991, 12В292)
79. — Гипотезы №№ 5—7 [78.— С. 175—178].
80. — Проблемы №№ 10—12 [78.— С. 171—173].
81. — О характеристическом многочлене трансфер-матрицы, возникающей при перечислении перестановок с ограниченными позициями // Вопр. техн. диагност. / Рост. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1990.— С. 134—138 (РЖМат, 1991, 8В330)
82. — Некоторые тождества и оценки для обобщенных перманентов Г. П. Егорычева / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.— 7 с. — Деп. в ВИНИТИ 30.01.91, № 484—В91 (РЖМат, 1991, 6А356ДЕП)
83. — Обобщенная формула Риордана для трехстрочных латинских прямоугольников и ее приложения // Докл. АН УССР.— 1991.— № 2.— С. 8—12 (РЖМат, 1991, 11В423)
84. — О циклических многочленах квадратных матриц // Докл. АН УССР. — 1991.— № 3.— С. 27—31 (РЖМат, 1991, 9А328)
85. — Гипотеза о логарифмической выпуклости максимума перманента вполне неразложимых Λ_n^k-матриц и продвижение в решении проблемы Гринштейна / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.— 18 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.04.91, № 1691—В91 (РЖМат, 1991, 7В484ДЕП)
86. — Алгоритм проверки перманента (детерминанта) на четность и контрпримеры к гипотезе К. Баласубраманиана / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.— 8 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.04.91, № 1692—В91 (РЖМат, 1991, 7В485ДЕП)
87. — Еще раз о доказательстве гипотезы Ямамото для перманентов (0, 1)-циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.—

8 с.— Деп. в ВИНИТИ 02.07.91, № 2803—В91 (РЖМат, 1991, 10В266ДЕП)
88. — Метод трансфер-матрицы и вычисление перманентов-циркулянтов / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.— 5 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.07.91, № 2943—В91 (РЖМат, 1991, 12В290ДЕП)
89. — Циклический инвариант подстановок и перманент z-циркулянта / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.— 20 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.07.91, № 2944—В91 (РЖМат, 1991, 11А473ДЕП)
90. — Задача и гипотеза, связанные с «Probléme des ménages» / Ростов. инж.-строит. ин-т.— Ростов н/Д, 1991.— 6 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.08.91, № 3480—В91 (РЖМат, 1991, 12В276ДЕП)
91. — Рекуррентные формулы для перманентов и детерминантов теплицевых матриц // Докл. АН УССР.— *1991*.— № 10.— С. 32—36
92. — Распределение значений перманента в классе дихотомических (0, 1)-матриц // Докл. АН УССР.— 1991.— № 2.— С. 16—19
93. — Расширение класса Мозера 4-строчных латинских прямоугольников // Докл. АН УССР.— 1992.— № 3
94. — Редуцированные латинские прямоугольники и квадратные матрицы с одинаковыми суммами в строках и столбцах // Дискрет. мат.— 1992.— *4*, № 1.— С. 91—110
95. — Перечисление перестановок с ограниченными позициями и фиксированным числом циклов // Дискрет. мат.— 1992.— *4*, № 2.— С. 3—22
96. *Эндрюс Г.* Теория разбиений.— М.: Наука, 1982.— 255 с. (РЖМат, 1983, 3А117К).
97. *Balasubramanian K.* On transversals in Latin squares // Linear Algebra and Appl.— 1990.— *131*.— С. 125—129 (РЖМат, 1991, 8В360)
98. *Bang T.* On matrix-function giving a good approximation to the v. d. Waerden permanent conjecture / Kobenhavns Univ. Mat. Inst. Prepr. Ser.— 1979.— № 30
99. *Bapat R.* Doubly stochastic matrices with equal subpermanents // Linear Algebra and Appl.— 1983.— *51*.— С. 1—8 (РЖМат, 1983, 12А414)
100. *Bebiano N.* On the evaluation of permanents // Pacif. J. Math.— 1982.— *101*, № 1.— С. 1—9 (РЖМат, 1983, 4А400)
101. *Bogart R. P., Doyle P. G.* Non-sexist solution of the ménage problem // Amer. Math. Mon.— 1986.— *93*, № 7.— С. 514—518 (РЖМат, 1987, 5В563)
102. *Brualdi R. A.* An interesting face of the polytope of doubly stochastic matrices // Linear and Multilinear Algebra.— 1985.— *15*.— С. 5—18
103. —, *Foregger T. H.* Matrices with constant permanental minors // Linear and Multilinear Algebra.— 1975.— *3*, № 3.— С. 227—243 (РЖМат, 1976, 10А219)
104. *Canfield E. R., Wormald N. C.* Ménage numbers, bijections and P-recursiveness // Discrete Math.— 1987.— *63*, № 2—3.— С. 117—129 (РЖМат, 1987, 9В525)
105. *Crapo H. H.* Permanents by Möbius inversion // J. Combin. Theory.— 1968.— *4*, № 2.— С. 198—200
106. *Cusick T. W.* Rercurrences for sums of powers of binomial coefficients // J. Combin. Theory. A.— 1989.— *52*, № 1.— С. 77—83 (РЖМат, 1990, 4В505)
107. *Dutka J.* On the problème des Ménages // Math. Intell.— 1986.— *8*, № 3.— С. 18—25 (РЖМат, 1987, 1В494)
108. *Eades P., Praeger C. E., Seberry J. R.* Some remarks on the permanents of circulant (0, 1)-matrices // Util. Math.— 1983.— *23*.— С. 145—159 (РЖМат, 1984, 2В463)
109. *Erdös P., Kaplansky I.* The asymptotic number of Latin rectangles // Amer. J. Math.— 1946.— *68*.— С. 230—236
110. —, *Rényi A.* On random matrices. II // St. sci. math. hung.— 1968.— *3*, № 4.— С. 459—464 (РЖМат, 1969, 11В30)

111. *Everett C. J., Stein P. R.* The asymptotic number of (0, 1)-matrices with zero permanent // Discrete Math.— 1973.— *6*, № 1.— С. 29—34 (РЖМат, 1974, 2В427)
112. *Foregger T., Sinkhorn R.* On matrices minimizing the permanent on faces of the polyhedron of the doubly stochastic matrices // Linear and Multilinear Algebra.— 1986.— *19*.— С. 395—397
113. *Friedland S.* A lower bound for the permanent of a doubly stochastic matrix // Ann. Math.— 1979.— *11*, № 1.— С. 167—176 (РЖМат, 1980, 5В83)
114. *Gessel I. M.* Counting three-line Latin restangles // Lect. Notes Math.— 1986.— *1234*.— С. 106—111 (РЖМат, 1987, 8В627)
115. — Counting Latin rectangles // Bull. Amer. Math. Soc.— 1987.— *16*, № 1.— С. 79—82
116. *Godsil C. D., McKay B. D.* Asymptotic enumeration of Latin rectangles // J. Combin. Theory. B.— 1990.— *48*, № 1.— С. 19—44 (РЖМат, 1990, 7В426)
117. *Goldschlager L. M.* An approximation algorithm for computing the permanent // Lect. Notes Math.— 1980.— *829*.— С. 141—147 (РЖМат, 1981, 6В604)
118. *Gordon B., Motzkin T. S., Welch L.* Permanents of (0, 1)-matrices // J. Combin. Theory. A.— 1974.— *17*, № 2.— С. 145—155 (РЖМат, 1975, 2В466)
119. *Good I. J., Crook J. F.* The enumeration of arrays and a generalization related to contingency tables // Discrete Math.— 1977.— *19*.— С. 23—45
120. *Henderson J.* Permanents of (0, 1)-matrices having at most two zeros per line // Can. Math. Bull.— 1975.— *18*.— С. 353—358
121. *Kallman R.* A method for finding permanents of (0, 1)-matrices // Math. Comput.— 1982.— *38*, № 157.— С. 167—170 (РЖМат, 1982, 8В520)
122. *Kaplansky I.* Solution of the «Problème des ménages» // Bull. Amer. Math. Soc.— 1943.— *49*.— С. 784—785
123. *King B. W., Parker F. D.* A Fibonacci matrix and permanent function // Fibonacci Quart.— 1969.— *7*, № 5.— С. 539—544 (РЖМат, 1970, 10В205)
124. *Merriell D.* The maximum permanent in Λ_n^k // Linear and Multilinear Algebra.— 1980.— *9*, № 2.— С. 81—91 (РЖМат, 1981, 3А365)
125. *Metropolis N., Stein M. L., Stein P. R.* Permanents of cyclic (0, 1)-matrices // J. Combin. Theory.— 1969.— *7*, № 4.— С. 291—321 (РЖМат, 1970, 8В234)
126. *Minc H.* Upper bounds for permanents of (0, 1)-matrices // Bull. Amer. Math. Soc.— 1963.— *69*, № 6.— С. 789—791 (РЖМат, 1964, 9А115)
127. — Permanents of (0, 1)-circulants // Can. Math. Bull.— 1964.— *7*, № 2.— С. 253—263 (РЖМат, 1965, 1А156)
128. — On permanents of circulants // Pacif. J. Math.— 1972.— *42*, № 2.— С. 477—484 (РЖМат, 1973, 5А377)
129. — Theory of permanents 1978—1981 // Linear and Multilinear Algebra. — 1983.— *12*.— С. 227—263
130. — Minimum permanents of doubly stochastic matrices with prescribed zero entries // Linear and Multilinear Algebra.— 1984.— *15*.— С. 225—243
131. — Recurrence formulas for permanents of (0, 1)-circulants // Linear Algebra and Appl.— 1985.— *71*.— С. 241—265 (РЖМат, 1986, 9В608)
132. — Theory of permanents 1982—1985 // Linear and Multilinear Algebra.— 1987.— *21*, № 2.— С. 109—148 (РЖМат, 1988, 4А314)
133. — Permanental compounds and permanents of (0, 1)-circulants // Linear Algebra and Appl.— 1987.— *86*.— С. 11—42 (РЖМат, 1987, 11В609)
134. — On a conjecture of R. A. Brualdi // Linear Algebra and Appl.— 1987.— *94*.— С. 61—66 (РЖМат, 1988, 5В613)
135. *Moser W. O. J.* The number of very reduced 4×*n* Latin rectangles // Can. J. Math.— 1967.— *19*, № 5.— С. 1011—1017 (РЖМат, 1968, 6В264)
136. — A generalization of Riordan's formula for 3×*n* Latin rectangles //

Discrete Math.— 1982.— *40*, № 2—3.— С. 311—313 (РЖМат, 1982, 11В574)

137. *Nemeth E., Seberry J., Shu M.* On the distribution of the permanent of cyclic (0, 1)-matrices // Util. Math.— 1979.— *16*.— С. 171—182 (РЖМат, 1980, 9В509)
138. *Nicol C. A.* Linear congruences and the Von Sterneck function // Duke Math. J.— 1959.— *26*, № 2.— С. 193—197 (РЖМат, 1960, 2736)
139. *O'Neil P. E.* Asymptotics and random matrices with row-sum and column-sum restrictions // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.— *75*, № 6.— С. 1276—1282 (РЖМат, 1970, 12В324)
140. — Asymptotics in random (0, 1)-matrices // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *25*, № 2.— С. 290—296 (РЖМат, 1971, 10В519)
141. *Riordan J.* Three-line Latin rectangles // Amer. Math. Mon.— 1946.— *53*, № 1.— С. 18—20
142. — Discordant permutations // Scripta math.— 1954.— *20*, № 1—2.— С. 14—23 (РЖМат, 1956, 1985)
143. *Rota G.-C.* Baxter algebras and combinatorial identities. II // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.—*75*, № 2.— С. 330—334 (РЖМат, 1970, 5В266)
144. *Ryser H. J.* Matrices of zeros and ones // Bull. Amer. Math. Soc.— 1960.— *66*, № 6.— С. 442—464 (РЖМат, 1961, 9А203)
145. — Neuere Probleme in der Kombinatorik. — В кн.: Vorträge über Komb.— Oberwolfach, 1967.— С. 69—91
146. *Schöbe W.* Das Lucassche Ehepaarprobleme // Math. Z.— 1943.— *48*.— С. 781—784
147. *Schrijver A.* A short proof of Minc's conjecture // J. Combin. Theory. A.— 1978.— *25*, № 1.— С. 80—83 (РЖМат, 1978, 12В870)
148. —, *Valiant W. G.* On lower bounds for permanents // Proc. Kon. ned. akad. wet.— 1980.— *A83*, № 4.— С. 425—427 (РЖМат, 1981, 4А318)
149. *Song Seok-Zun.* Minimum permanents on certain faces of matrices containing an identity submatrix // Linear Algebra and Appl.— 1988.— *108*. — С. 263—280 (РЖМат, 1989, 6В462)
150. — Minimum permanents on certain doubly stochastic matrices // Linear Algebra and Appl.— 1991.— *143*.— С. 49—56 (РЖМат, 1991, 10В265)
151. *Stanley R.* Binomial posets, Möbius inversion and permutation enumeration // J. Combin. Theory. A.— 1976.— *20*.— С. 336—356 (РЖМат, 1976, 11В410)
152. *Touchard J.* Sur un problème de permutations // C. r. Acad. sci.— 1934.— *198*.— С. 631—633
153. — Permutations discordant with two given permutations // Scripta math. — 1953.— *19*, № 3.— С. 109—119 (РЖМат, 1957, 6857)
154. *Tverberg H.* On the permanent of a bistochastic matrix // Math. Scand.— 1963.— *12*, № 1.— С. 25—35 (РЖМат, 1964, 9А134)
155. *Valiant L. G.* The complexity of computing the permanent // Theor. Comput. Sci.— 1979.— 8, № 2.— С. 189—201 (РЖМат, 1979, 9В1094)
156. *Van der Waerden B.* Aufgabe 45 // Jber. Deutsch. Math. Verein.— 1926. — *35*.— С. 117
157. *Voorhoeve M.* A lower bound for the permanents of certain (0, 1)-matrices // Proc. Kon. ned. akad. wet.— 1979.— *A82*, № 1.— С. 83—86 (РЖМат, 1979, 9В558)
158. *Vrba A.* An inversion formula, matrix functions, combinatorial identities and graphs // Čas. pěstov. mat.— 1973.— *98*, № 3.— С. 292—297 (РЖМат, 1974, 2В498)
159. *Whitehead E. G. (Jr)* Four-discordant permutations // J. Austral. Math. Soc.— 1979.— *A28*.— С. 369—377 (РЖМат, 1980, 9В502)
160. *Yamamoto K.* On the asymptotic number of Latin rectangles // Jap. J. Math.— 1951.— *21*.— С. 113—119
161. — Structure polynomial of Latin rectangles and its application to a combinatorial problem // Mem. Fac. sci. Kyushu Univ.— 1956.— *A10*, № 1.— С. 1—13 (РЖМат, 1957, 1133)