L. A. Takhtadzhyan, Hamiltonian systems connected with the Dirac equation, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1973, Volume 37, 66–76

Л.А.Тахтаджян

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ ДИРАКА

Настоящая работа посвящена изучению некоторых нелинейных эволюционных уравнений с помощью гамильтонова формализма классической механики и формализма обратной задачи рассеяния для системы Дирака.

Рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{1}{i} u_t = u_{xx} - 2u|u|^2; \qquad u(x,t)\Big|_{t=0} = u(x); \qquad -\infty < x < \infty, \quad u(x) \in \mathfrak{S} \tag{I}$$

($\mathfrak{S}$ - пространство Шварца быстро убывающих функций), имеющее приложения к теории распостранения волн в нелинейных средах.

Заметим, что уравнение (I) легко записывается в гамильтоновом виде. Действительно, роль фазового пространства играет пространство $\mathfrak{S}$, а соответствующая симплектическая форма

$$\Omega(\delta_1 u, \delta_2 u) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_1 u(x)\delta_2 \bar{u}(x) - \delta_1 \bar{u}(x)\delta_2 u(x))\,dx \tag{2}$$

имеет постоянные коэффициенты в переменных u и потому замкнута. Осталось указать гамильтониан H. Положим

$$H(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (|u_x|^2 + |u|^4)\,dx. \tag{3}$$

Легко проверить, что уравнение (I) порождается механической системой $(\mathfrak{S}, \Omega, H)$ по правилам гамильтоновой механики.

В настоящей работе мы укажем канонические координаты, в которых гамильтоновы уравнения легко интегрируются. Поясним вкратце, как это делается.

Рассматривается система Дирака - система двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathfrak{I}\frac{d\psi}{dx} + Q(x)\psi = k\psi, \qquad \text{где} \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} -p(x) & -q(x)\\ -q(x) & p(x)\end{pmatrix}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad k \in \mathbb{C}^1$$

и $p(x)$, $q(x)$ - вещественнозначные функции. С любой функцией $u(x) \in \mathfrak{S}$ свяжем матрицу $Q(x)$ по следующей формуле

$$Q(x) = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} u(x) & -\operatorname{Re} u(x)\\ -\operatorname{Re} u(x) & \operatorname{Im} u(x)\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для системы Дирака можно поставить задачу рассеяния.

Пусть $r(k)$ – коэффициент отражения направо, то есть функция, участвующая в асимптотике при $x\to\infty$ решения системы (4), однозначно определенного условиями

$$\begin{aligned} \psi(x,k) &= e^{-ikx}\binom{-i}{1} + r(k)e^{ikx}\binom{i}{1} + o(1), \quad x\to\infty \\ \psi(x,k) &= t(k)e^{-ikx}\binom{-i}{1} + o(1), \quad x\to-\infty. \end{aligned} \tag{6}$$

Отображение $Q(x)\to r(k)$ однозначно обратимо. Соответствующая процедура восстановления $Q(x)$, а, следовательно и $u(x)$, по коэффициенту отражения $r(k)$ дается обратной задачей рассеяния, исследованной в [1]. По аналогии с уравнением Шредингера мы будем иногда называть коэффициент $r(k)$ данным рассеяния системы Дирака. Основной результат настоящей работы состоит в следующем:

рассмотрим движение на множестве данных рассеяния

$$r(k)\to r(k)e^{4ik^2t}, \quad -\infty<t<\infty. \tag{7}$$

Оказывается, что соответствующее движение на многообразии $\mathfrak{S}$ $u(x)\to u(x,t)$ определяет решение $u(x,t)$ уравнения (1). Другой результат работы состоит в том, что уравнение (1) обладает счетным набором коммутирующих интегралов движения. Эти интегралы имеют локальные плотности, то есть интегралы I_n имеют вид

$$I_n(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_n(u,u_x,\dots)\,dx.$$

Описанная выше программа уже проводилась для уравнения Кортевега-де-Фриса, т.е. для уравнения

$$\begin{aligned} &u_t-6uu_x+u_{xxx}=0, \quad -\infty<x<\infty, \\ &u(x,t)\big|_{t=0}=u(x), \quad u(x)\in\mathfrak{S} \end{aligned} \tag{8}$$

Сначала группа ученых, включающая Гарднера, Грина, Крускала, Забусского и Миуру, нашла связь уравнения Кортевега-де-Фриса с задачей рассеяния для одномерного оператора Шредингера. Ими были получены формулы, аналогичные формуле (7), и найден способ вычисления интегралов движения для уравнения (8) (См. [2-4]). Затем Л.Д.Фаддеев и В.Е.Захаров предложили следующую интерпретацию метода американских ученых: уравнение $K_d\Phi$ – вполне интегрируемая гамильтонова система, причем отображение $u(x)\to r(k)$ играет роль перехода к переменным типа действие-угол в классической механике (см. [5]). Кроме того, В.Е.Захаровым и А.Б.Шабатом с помощью метода обратной задачи (см. [6]) были найдены явные решения уравнен

$$\frac{1}{i} u_t = u_{xx} + \varkappa u|u|^2, \quad \varkappa > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = u(x), \quad u(x) \in \mathfrak{S}$$

(см. [7]). Авторами было проведено подробное исследование так называемых солитонов, т.е. решений, отвечающих дискретному спектру.

Результаты настоящей работы возникли при применении метода авторов [5] к системе Дирака. В настоящей работе поэтому широко используется техника, развитая в работе [5] . Имеются некоторые упрощения, связанные с отсутствием дискретного спектра у системы (4).

(Таким образом, в нашем случае отсутствуют солитоны. О солитонах см. [6 - 7]).

Теперь наметим план изложения. В § I будут даны необходимые сведения из теории рассеяния для системы Дирака. Затем в § 2 мы пересчитаем форму Ω в терминах данных рассеяния. В § 3 с помощью тождеств следов для системы Дирака мы выразим гамильтониан через данные рассеяния и покажем, что формула (7) дает решение гамильтоновых уравнений. И, наконец, мы охарактеризуем связь между уравнением (I) и уравнением (8).

§ I. Сведения из теории рассеяния

Система (4) при условии, что

$$|p(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{2+2\varepsilon}}, \quad |q(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}},$$
$$|p'(x)| + |q'(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}}; \qquad \varepsilon > 0 \tag{A}$$

имеет решения $f(x,k)$ и $g(x,k)$, однозначно определенные при вещественных k требованиями

$$f(x,k) = e^{ikx}\binom{i}{1} + o(1), \qquad x \to \infty$$
$$g(x,k) = e^{-ikx}\binom{-i}{1} + o(1), \qquad x \to -\infty \tag{9}$$

Решения $f(x,k)$ и $g(x,k)$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной k , и при этом имеют место следующие оценки

$$f(x,k)e^{-ikx} = \binom{i}{1} + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \qquad |k| \to \infty$$
$$g(x,k)e^{ikx} = \binom{-i}{1} + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{10}$$

При вещественных k пары $f(x,k)$, $\bar{f}(x,k)$ и $g(x,k)$, $\bar{g}(x,k)$ образуют две фундаментальные системы решений уравнения Дирака. Имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
g(x,k) &= a(k)\bar{f}(x,k) + b(k) f(x,k) \\
f(x,k) &= -\bar{b}(k) g(x,k) + a(k) \bar{g}(x,k),
\end{aligned} \tag{II}
$$

где коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ удовлетворяют тождеству

$$
|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2 \tag{I2}
$$

при этом

$$
a(k) = \frac{1}{2i}\{ f(x,k), g(x,k) \}, \tag{I3}
$$

где

$$
\{f, g\} = f_1 g_2 - f_2 g_1 .
$$

Из (I3) следует, что $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной k, причем справедлива оценка

$$
a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad \Im m\, k \geqslant 0, \quad |k| \to \infty . \tag{I4}
$$

Ясно, что $a(k)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости, так как из (I3) следует, что нули отвечали бы невещественным собственным значениям системы Дирака. Из (I2) следует, что $a(k)$ не имеет нулей и на вещественной оси.

Рассмотрим следующее решение системы (4)

$$
\psi(x,k) = \frac{1}{a(k)} g(x,k).
$$

Из (II) получаем, что $\psi(x,k)$ удовлетворяет условию (6), где

$$
r(k) = b(k)/a(k).
$$

Заметим, что $a(k)$ и $b(k)$ полностью восстанавливаются по коэффициенту отражения. Действительно, справедливы формулы

$$
1 - |r|^2 = \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2} = \frac{1}{|a|^2},
$$

$$
a(k) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(q)|^2)}{k - q} dq \right\}, \quad \Im m\, k > 0, \tag{I5}
$$

$$
a(k) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} a(k + i\varepsilon), \quad \Im m\, k = 0, \quad b(k) = r(k) a(k).
$$

Скажем теперь несколько слов об обратной задаче. Ее решение основывается на интегральном уравнении, являющимся аналогом уравнения Гельфанда – Левитана.

Пусть $r_2(k)$, $r_1(k)$ – данные рассеяния для матриц $Q_2(x)$ и $Q_1(x)$ и $f^1(x,k)$ – решение, удовлетворяющее условию (9) для уравнения (4) с матрицей $Q_1(x)$.

Построим ядро $\mathcal{F}(x,y)$

$$\mathcal{F}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\{(r_2(k)-r_1(k))f^1(x,k)^T f^1(y,k)\}dk, \tag{16}$$

где ${}^T f$ – вектор-строка, транспонированный к вектору-столбцу f.

Рассмотрим уравнение для ядра $\mathcal{K}(x,y)$

$$\mathcal{K}(x,y)+\mathcal{F}(x,y)+\int_x^{\infty}\mathcal{K}(x,u)\,\mathcal{F}(u,y)\,du=0 \tag{17}$$

и $\mathcal{K}(x,y)=0$ при $x>y$.

Это уравнение однозначно разрешимо, и

$$Q_2(x)-Q_1(x)=\mathcal{K}(x,x)\mathcal{J}-\mathcal{J}\mathcal{K}(x,x). \tag{18}$$

При $r_1(k)=0$, $Q_1(x)=0$ уравнение (17) позволяет восстановить матрицу $Q_2(x)$ по ее коэффициенту отражения.

На функцию $r(k)$ накладываем условия:

1) $|r(k)|<1$, $-\infty<k<\infty$

2) $r(k)=O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ при $|k|\to\infty$

3) матрица $\mathcal{F}(t)$, построенная по формуле (16) для функции $r(k)$ ($r_2(k)=r(k)$, $r_1(k)=0$, $f^1(x,k)=e^{ikx}\binom{i}{1}$), удовлетворяет условию (А) при $-\infty<\delta\leqslant x<\infty$, то есть не исключается случай $c(\delta)\to\infty$ при $\delta\to-\infty$, где $c(\delta)$ – константа в правой части условия (А),

4) для матрицы $\tilde{\mathcal{F}}(t)$, построенной по формуле (16) для функции $\tilde{r}(k)=-\frac{\bar{b}(k)}{a(k)}$, выполняется условие (А) при $-\infty<x\leqslant\delta<\infty$.

Тогда для того, чтобы матрица $Q(x)$ удовлетворяла условию (А), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент отражения $r(k)$ удовлетворял условиям 1)–4). (См. [1]).

Отметим, что для того, чтобы $u(x)\in\mathfrak{S}$, необходимо и достаточно, чтобы $r(k)\in\mathfrak{S}$ и $|r(k)|<1$ при любом k.

Заметим, наконец, что для представимости $Q(x)$ в виде

$$Q(x)=\begin{pmatrix}0 & q(x)\\ q(x) & 0\end{pmatrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы $r(k)=\bar{r}(-k)$.

§ 2. Выражение формы Ω через данные рассеяния

В настоящем параграфе мы пересчитаем форму Ω в новых координатах, используя формулы преобразования дифференциальных форм при замене координат.

Займемся непосредственно вычислениями. Из (5),(16),(17) и (18) получаем следующее выражение для вариации

$$\delta u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(f_2(x,k)+if_1(x,k)\right)^2\delta\tau(k)+\left(\bar{f}_2(x,k)+i\bar{f}_1(x,k)\right)^2\delta\bar{\tau}(k)\right]dk. \qquad (19)$$

Для $\delta\bar{u}(x)$ имеем формулу, комплексно сопряженную с (19). Подстановка выражений для $\delta u(x)$, $\delta\bar{u}(x)$ в определение (2) формы Ω приводит к следующей формуле

$$\begin{aligned}\Omega_\tau(\delta_1\tau,\delta_2\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(k,q)\left(\delta_1\tau(k)\delta_2\bar{\tau}(q)-\delta_1\bar{\tau}(q)\delta_2\tau(k)\right)dk\,dq+\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B(k,q)\left(\delta_1\tau(k)\delta_2\tau(q)-\delta_1\tau(q)\delta_2\tau(k)\right)dk\,dq+\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C(k,q)\left(\delta_1\bar{\tau}(k)\delta_2\bar{\tau}(q)-\delta_1\bar{\tau}(q)\delta_2\bar{\tau}(k)\right)dk\,dq,\end{aligned} \qquad (20)$$

где

$$\begin{aligned}A(k,q)&=\frac{1}{32\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\left(f_2(x,k)+if_1(x,k)\right)^2\left(\bar{f}_2(x,q)-i\bar{f}_1(x,q)\right)^2-\\&-\left(\bar{f}_2(x,k)-i\bar{f}_1(x,k)\right)^2\left(f_2(x,q)+if_1(x,q)\right)^2\Big]dx,\\B(k,q)&=\frac{1}{64\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\left(f_2(x,k)+if_1(x,k)\right)^2\left(f_2(x,q)-if_1(x,q)\right)^2-\\&-\left(f_2(x,k)-if_1(x,k)\right)^2\left(f_2(x,q)+if_1(x,q)\right)^2\Big]dx\end{aligned} \qquad (21)$$

и, наконец,

$$C(k,q)=\overline{B(x,q)}.$$

Выписанные интегралы следует понимать в смысле теории обобщенных функций. Оказывается, что все эти интегралы можно выразить только через данные рассеяния. Поясним это подробнее на примере $A(k,q)$.

Из системы (4) нетрудно получить, что

$$f_1(x,k)f_1(x,q)+f_2(x,k)f_2(x,q)=\frac{1}{q-k}\frac{d}{dx}\left\{f(x,k),f(x,q)\right\}. \qquad (22)$$

Благодаря (22) мы можем записать $A(k,q)$ в следующем виде:

$$A(k,q)=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q-k}\frac{d}{dx}\left\{f(x,k),\bar{f}(x,q)\right\}^2dx,$$

т.е. мы имеем:

$$A(k,q)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{16\pi^2(q-k)}\left[-4e^{2i(k-q)N}+4(a(k)\bar a(q)\cdot e^{-i(k-q)N}-\bar b(k)b(q)e^{i(k-q)N})^2\right],$$

используя известную формулу из теории обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{P}\frac{e^{ixN}}{x}=i\pi\delta(x),$$

где $\mathcal{P}$ - главное значение в смысле Коши и вытекающее из (I2) тождество $1+|a|^4-|b|^4=2|a|^2$, получаем для $A(k,q)$ окончательное выражение

$$A(k,q)=\frac{i|a(k)|}{2\pi}\delta(k-q)+\frac{1}{2\pi^2}\mathcal{P}\frac{a(k)\bar a(q)\bar b(k)b(q)}{k-q}. \tag{23}$$

Для $B(k,q)$ имеем, аналогично

$$B(k,q)=\frac{1}{32\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q-k}\frac{d}{dx}\{f(x,k),f(x,q)\}^2dx$$

и, окончательно,

$$B(k,q)=\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{P}\frac{a(k)a(q)\bar b(k)\bar b(q)}{k-q}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) теперь непосредственно следует выражение для формы Ω :

$$\Omega_\tau(\delta_1\tau,\delta_2\tau)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|a(k)|^2(\delta_1\tau(k)\delta_2\bar\tau(k)-\delta_1\bar\tau(k)\delta_2\tau(k))\,dk+$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(k)\bar a(q)\bar b(k)b(q)}{k-q}\left(\delta_1\tau(k)\delta_2\bar\tau(q)-\delta_1\bar\tau(q)\delta_2\tau(k)\right)dkdq+ \tag{25}$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{Re}\left\{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(k)a(q)\bar b(k)\bar b(q)}{k-q}(\delta_1\tau(k)\delta_2\tau(q)-\delta_1\tau(q)\delta_2\tau(k))\,dkdq\right\}.$$

Покажем теперь, что набор переменных

$$P(k)=-\frac{1}{\pi}\ln(1-|\tau(k)|^2),$$

$$Q(k)=\frac{1}{2}\arg b(k)$$

является каноническим, то есть, что форма Ω в этих переменных имеет вид

$$\Omega_\tau(\delta_1\tau,\delta_2\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta_1P(k)\delta_2Q(k)-\delta_2P(k)\delta_1Q(k))\,dk. \tag{26}$$

Действительно, заметим, что

$$\arg b(k) = \arg r(k) + \arg a(k)$$

и, используя (I5), получим

$$\delta Q(k) = \frac{1}{4i}\,\frac{\delta r(k)\bar{r}(k) - \delta\bar{r}(k) r(k)}{|r(k)|^2} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\,\mathcal{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|a(q)|^2}{k-q}\left(r(q)\delta\bar{r}(q) + \bar{r}(q)\delta r(q)\right)dq,$$

далее, имеем

$$\delta P(k) = \frac{1}{\pi}\,\frac{r(k)\delta\bar{r}(k) + \bar{r}(k)\,\delta r(k)}{1-|r(k)|^2}.$$

Подставив эти выражения для $\delta P(k)$, $\delta Q(k)$ в (26), получим (25). Итак, мы выразили через данные рассеяния некоторый набор канонических переменных. В § 3 мы убедимся, что эти переменные играют роль переменных типа действие - угол в классической механике, т.е., что гамильтониан H будет зависеть лишь от переменных $P(k)$ (переменных типа действие).

§ 3. Тождества следов и окончательные результаты

Напомним, что $u(x)\in\mathfrak{S}$. Тогда для $\ln a(k)$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{k^n}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad |k| \to \infty \tag{27}$$

при этом коэффициенты c_n вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q^{n-1}\ln\left(1-|r(q)|^2\right)dq. \tag{28}$$

Это легко получить, используя (I5). Можно, с другой стороны, находить коэффициенты разложения $\ln a(k)$ по обратным степеням k, используя систему Дирака. Получающиеся при этом формулы называются тождествами следов. Для вывода этих тождеств воспользуемся приемом, описанным в [7]. Заметим сначала, что из (I3) следует, что для функции $\theta(x,k) = \frac{1}{2}\left(g_2(x,k) + i g_1(x,k)\right)e^{ikx}$ справедливо следующее

$$\lim_{x\to\infty}\theta(x,k) = a(k), \quad \operatorname{Im} k \geq 0 \tag{29}$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\ln\theta(x,k)\,dx = \ln a(k).$$

Но из системы (4) следует, что $\theta(x,k)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\theta}{dx} = -2ik\theta + u(x)\tilde{\theta} \qquad \text{где } \tilde{\theta}(x,k) = \frac{1}{2}(q_2(x,k) - iq_1(x,k))e^{ikx}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \bar{u}(x)\theta . \tag{30}$$

Обозначая $\ln\theta$ через Φ и исключая $\tilde{\theta}$ из системы (30), получим дифференциальное уравнение для Φ_x :

$$2ik\,\Phi_x = \Phi_x^2 + u(x)\left(\frac{1}{u(x)}\Phi_x\right)_x - |u(x)|^2. \tag{31}$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения работы [7] лишь знаком перед $|u(x)|^2$. Используя дифференциальное уравнение (31), убеждаемся, что Φ_x допускает следующее асимптотическое разложение

$$\Phi_x(x,k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{(2ik)^n}, \tag{32}$$

где коэффициенты $f_n(x)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$f_{n+1}(x) = u(x)\left(\frac{f_n(x)}{u(x)}\right)_x + \sum_{\substack{j+m=n \\ j,m>0}} f_j(x) f_m(x) \tag{33}$$

$$f_1(x) = -|u(x)|^2$$

Несколько первых коэффициентов имеют вид

$$f_2 = -u\bar{u}_x \ , \quad f_3 = -u\bar{u}_{xx} + |u|^4,$$

$$f_4 = -u\bar{u}_{xxx} + uu_x\bar{u}^2 + 4u^2\bar{u}\bar{u}_x .$$

Объединяя формулы (27),(29),(32), получаем набор тождеств

$$(2i)^n c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \ , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

где c_n и $f_n(x)$ вычисляются по формулам (28) и (33) соответственно. Формулы (34) называются тождествами следов. Через канонические переменные тождества следов записываются следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = -(2i)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} k^{n-1} P(k)\,dk$$

и, в частности, для гамильтониана H мы имеем

$$H(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} k^2 P(k)\,dk , \tag{35}$$

т.е. гамильтониан зависит лишь от импульсов.

Осталось заметить теперь, что в координатах $P(k)$, $Q(k)$ гамильтоновы уравнения полностью интегрируются; действительно, уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dP(k)}{dt}=0$$

$$\frac{dQ(k)}{dt}=2k^2,$$

то есть их решение есть $r(k,t)=e^{4ik^2t}r(k)$. Из формул (28) и (34) ясно, что

$$I_n(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx, \quad n=1,2,\dots$$

являются счетным набором интегралов движения уравнения (I). Также ясно, что это набор взаимно коммутирующих интегралов. Тем самым мы установили все упоминавшиеся результаты, исключая связь уравнения (I) с уравнением $K_q\Phi$.

Теперь мы и займемся последним вопросом: для этого возьмем на нашем симплектическом многообразии $\mathfrak{S}$ в качестве гамильтониана

$$H_1(u)=\frac{1}{2i}\int^{\infty} f_4(x)dx=4\int_{-\infty}^{\infty} k^3P(k)dk.$$

Механическая система $(\mathfrak{S},\Omega,H_1)$ будет описывать уравнение

$$u_t-6u_x|u|^2+u_{xxx}=0. \tag{36}$$

В канонических координатах решение гамильтоновых уравнений есть

$$r(k,t)=e^{8ik^3t}r(k), \tag{37}$$

где $r(k)$ - коэффициент отражения, построенный по начальному данному для уравнения (36). Но уравнение (36) не есть уравнение $K_q\Phi$. Однако, если начальное данное для уравнения (36) было вещественным, то есть если $\bar{r}(k)=r(-k)$, то из (37) следует, что и $\bar{r}(k,t)=r(-k,t)$, то есть и решение $u(x,t)$ будет вещественным.

Итак, если ограничиться вещественными начальными данными, то будем иметь уравнение

$$u_t-6u_xu^2+u_{xxx}=0. \tag{38}$$

Далее, вещественной $u(x)$ отвечает матрица

$$Q(x)=\begin{pmatrix}0 & -u(x)\\ -u(x) & 0\end{pmatrix}.$$

Но, известно, что в этом случае система Дирака сводится к уравнению Шредингера с потенциалом $q(x)=-u'(x)+u^2(x)$.

И сделав такую замену переменных в уравнении (38), мы как раз и получим уравнение $\mathcal{K}_q\Phi$.

Заметим, что попутно мы установили полную интегрируемость следующих механических систем: $\left\{ \left(\mathfrak{S}, \Omega, H_n \right) \right\}_{n=1,\dots,\infty}$, где

$$H_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

То есть мы имеем счетный набор нелинейных эволюционных уравнений, явно решаемых методом обратной задачи.

В заключение автор выражает благодарность Л.Д.Фаддееву за постановку настоящей задачи и за внимание к работе.

Литература

I. Фролов И.С. Обратная задача для системы Дирака на всей оси, ДАН СССР, 207, № I (I972), 44-47.

2. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev.Lett. I9(I967), I095-I097.

3. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D., Korteweg-de Vries equation and generalizations, II. Existence of conservation laws and constants of motion. J.Math. Phys. 9, № 8 (I968), I204-I209.

4. Kruskal M.D., Miura R.M., Gardner C.S., Zabusky N.J., Korteweg-de Vries equation and generalizations, V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, J. Math. Phys., II, № 3 (I970), 952-960.

5. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д., Уравнение Кортевега-де Фриса - вполне интегрируемая гамильтонова система. Функц. анализ и его приложения, т.5, вып.4, I97I, I8-27.

6. Лэкс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны, Математика (сборник переводов ин. статей) I3:5 (I969) I28-I50.

7. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ, 6I (I97I), 118-125.