ГРУППЫ ЛИ И ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Э. Б. Винберг

В настоящий обзор включены главным образом работы, прореферированные в 1961—1962 г., т. е. появившиеся в печати в 1959 г. — начале 1962 г. Однако в отдельных случаях излагаются результаты более ранних или более поздних работ, а также работ, не прореферированных в журнале. В связи с тем, что имеются обзоры М. А. Наймарка по теории представлений и С. П. Новикова и М. М. Постникова по топологии, вопросы представлений и топологии групп Ли в настоящем обзоре почти не затронуты. Совершенно не упоминаются работы по алгебрам Ли и алгебраическим группам над полем конечной характеристики.

Как правило, в обзоре рассматриваются только оригинальные работы. Поэтому необходимо хотя бы указать здесь на монографии Н. Бурбаки [21] и Н. Джекобсона [45] по теории алгебр Ли, монографию С. Хелгасона [114] и лекции Ж. Л. Козюля [59] по симметрическим пространствам, лекции Ф. Брюа [20] по основам теории групп Ли, обзоры Ж. Титса [107] и Вана [22] по геометрии однородных пространств и многочисленные сообщения по теории групп Ли на семинаре Бурбаки, изданные в Париже вторым изданием в 1959—60 г. и прореферированные в 1961—62 г.* Отметим также, что в 1962 г. вышел русский перевод трудов семинара «Софус Ли» 1954—55 г. под названием «Теория алгебр Ли. Топология групп Ли».

Группы Ли, встречающиеся в обзоре, мы будем предполагать, как правило, связными и обозначать готическими буквами; алгебры Ли будут обозначаться соответствующими (прописными) латинскими буквами. Так, если $\mathfrak{G}$ — группа Ли, то под символом G без специальных оговорок будет подразумеваться ее алгебра Ли.

* Эти сообщения не включены в список литературы.

§ 1. ПОЛУПРОСТЫЕ ГРУППЫ ЛИ

1. Значительная часть работ по полупростым группам Ли была посвящена вещественным группам. Благодаря усилиям различных математиков, структура вещественных полупростых групп Ли изучена теперь почти так же досконально, как и структура комплексных (или компактных) полупростых групп Ли.

А. И. Сирота изучал вещественные полупростые группы Ли в целом. Он нашел центры и ядра конечномерных линейных представлений всех таких групп [100], [101]. В частности, линеаризующий нормальный делитель (пересечение ядер всех конечномерных линейных представлений) вещественной полупростой группы Ли $\mathfrak{G}$ находится, согласно Сироте, следующим образом. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ и K — компактная алгебра Ли той же комплексной структуры, что и G. Тогда существует такой инволютивный автоморфизм τ алгебры K, что $G \simeq K_+ + iK_-$, где $K_+ = \{x \in K : \tau x = x\}$, $K_- = \{x \in K : \tau x = -x\}$. Выберем в K картановскую подалгебру вида $H = H_+ + H_-$, где H_+ — картановская подалгебра в K_+, а $H_- \subset K_-$. Условимся обозначать через $\Gamma_0(A)$ для всякой компактной алгебры Ли A решетку в ее картановской подалгебре, являющуюся полным прообразом единицы при экспоненциальном отображении алгебры A в соответствующую ей односвязную группу. В этих обозначениях линеаризующий нормальный делитель $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$ является образом решетки $\Gamma_0(K) \cap H_+$ при экспоненциальном отображении. Если группа $\mathfrak{G}$ односвязна, то $\mathfrak{N} \simeq (\Gamma_0(K) \cap H_+)/\Gamma_0(K_+)$.

В работе [102] А. И. Сирота привел метод нахождения центров простых подгрупп односвязных вещественных простых групп Ли.

М. Сугиура [103] классифицировал с точностью до сопряженности подалгебры Картана вещественных полупростых алгебр Ли. Пусть G — такая алгебра Ли, K, K_+ и K_- — те же, что и выше. Выберем в iK_- максимальную коммутативную подалгебру M. Тогда всякая картановская подалгебра в G сопряжена «стандартной» подалгебре вида $H = H_+ + H_-$, где $H_+ \subset K_+$, $H_- \subset M$. Пусть H_0 — картановская подалгебра комплексной оболочки G_c алгебры G, содержащая M, и W — группа Вейля алгебры G_c относительно H_0. Б. Костант (B. Kostant, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, 967—970) опубликовал без доказательства следующий результат: стандартные картановские подалгебры $H^{(i)} = H_+^{(i)} + H_-^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ сопряжены тогда и только тогда, когда ортогональные дополнения к $H_-^{(1)}$ и $H_-^{(2)}$ в M сопряжены относительно группы W. В [103] доказано это утверждение и найдено условие того, чтобы подпространство $P \subset M$ играло роль H_- для некоторой стандартной картановской подалгебры H. Это условие, по-видимому, более эффективное, чем аналогичное условие Костанта, состоит в том, что ортогональное дополнение к P в M должно быть натянуто

на систему S корней алгебры G_c относительно H_0, лежащую в M и обладающую следующим свойством: если α, $\beta \in S$, то $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ — не корни. Наряду с этими общими результатами, имеется перечисление всех типов картановских подалгебр для каждой из простых вещественных алгебр Ли. Близкие результаты получил Чен Чунь-ху [117], [118].

Г. Д. Мостов [75] выяснил структуру максимальных аналитических подгрупп полупростых вещественных групп Ли. Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая вещественная группа Ли с конечным центром, $\mathfrak{G}_1$ — максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Если группа $\mathfrak{G}_1$ унимодулярна, то ее радикал компактен. В противном случае факторпространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ компактно, и алгебра Ли G_1 может быть описана следующим образом:

Для всякого элемента $h \in G$ и действительного числа a обозначим через $G_a(h)$ собственное подпространство оператора $\operatorname{ad} h$, отвечающее собственному значению a. Тогда $G_1 = \sum\limits_{a \geqslant 0} G_a(h)$, где h — такой элемент из G, для которого оператор $\operatorname{ad} h$ полупрост и имеет действительные собственные значения.

В той же работе [75] Г. Д. Мостов описал максимальные разрешимые подалгебры вещественной полупростой алгебры Ли G. Пусть H — картановская подалгебра алгебры G и H_- — подпространство, образованное теми элементами $h \in H$, для которых оператор $\operatorname{ad} h$ имеет действительные собственные значения. Пусть, далее, $h \in H_-$ — такой элемент, что всякий корень алгебры G, обращающийся в 0 на h, обращается в 0 на всем пространстве H_-. Тогда подалгебра $H + \sum\limits_{a>0} G_a(h)$ является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры G. Все максимальные разрешимые подалгебры могут быть получены таким путем. В работе указаны условия, при которых две такие подалгебры сопряжены относительно внутреннего автоморфизма алгебры G. Оказывается, что для этого недостаточно, чтобы они содержали одну и ту же картановскую подалгебру H.

Линейная группа Ли $\mathfrak{T}$ называется треугольной, если в некоторой базе все операторы из $\mathfrak{T}$ записываются верхними треугольными матрицами. Г. Д. Мостов [75] и Э. Б. Винберг [31] доказали, что все максимальные связные треугольные подгруппы вещественной линейной группы сопряжены относительно внутренних автоморфизмов. Доказательство Мостова алгебраическое; доказательство Винберга основано на идее неподвижной точки. Впрочем, этот результат можно вывести из аналогичной теоремы А. Бореля и Р. Годмана (R. Godement, Sém. Bourbaki, no. 206, 1960) для алгебраических групп над произвольным совершенным полем.

Отметим, наконец, работу Ивахори [49], в которой в модернизированной форме излагается метод Э. Картана отыскания всех неприводимых вещественных линейных представлений групп Ли путем сведения к комплексному случаю.

2. Пусть G — полупростая комплексная алгебра Ли. Для всякой линейной формы μ на картановской подалгебре алгебры G обозначим через $P(\mu)$ число ее разбиений в сумму положительных корней. Б. Костант [63] вывел следующую формулу для кратности $m_\lambda(\mu)$ веса μ в неприводимом представлении алгебры G со старшим весом λ:

$$m_\lambda(\mu)=\sum_{s\in W}\det s\cdot P(s(\rho+\lambda)-(\rho+\mu)),$$

где ρ — полусумма положительных корней, W — группа Вейля. Доказательство Костанта было чрезвычайно громоздким. Позднее П. Картье [55] дал очень простое и короткое доказательство этой формулы. Р. Штейнберг [120] заметил, что с помощью формулы Костанта можно получить следующее выражение для кратности $n_{\lambda,\mu}(\nu)$, с которой неприводимое представление алгебры G со старшим весом ν входит в тензорное произведение ее неприводимых представлений со старшими весами λ и μ:

$$n_{\lambda,\mu}(\nu)=\sum_{r,s\in W}\det rs\cdot P(r(\rho+\lambda)+s(\rho+\mu)-(2\rho+\nu)).$$

К теории конечномерных линейных представлений полупростых групп Ли следует отнести классификацию Э. Б. Винбергом [29] всех «транзитивных» линейных представлений простых комплексных групп Ли, т. е. представлений, не имеющих непрерывных инвариантов. Отметим, что для всех полупростых комплексных групп Ли эта задача пока не решена.

В. Т. Симония [99] нашел базисные инварианты простейшего — 7-мерного — представления особой простой комплексной группы Ли типа G_2.

3. Замечательным достижением последних лет является открытие общего метода вычисления чисел Бетти компактной группы Ли по системе ее корней. Этот метод был открыт эмпирически Р. Штейнбергом [119] и А. Шапиро и обоснован априорно Б. Костантом [64]. Состоит он в следующем. Как известно, многочлен Пуанкаре компактной группы Ли $\mathfrak{K}$ имеет вид

$$\prod_{i=1}^{r}(1+t^{2m_i+1}),$$

где m_i — целые неотрицательные числа, r — ранг группы $\mathfrak{K}$. Для вычисления чисел Бетти группы $\mathfrak{K}$ достаточно найти систему чисел $M=\{m_1,\ldots,m_r\}$. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ $(n\leqslant r)$ — простые корни

группы $\mathfrak{K}$. Всякий положительный корень α записывается единственным образом в виде

$$\alpha = \sum k_i \alpha_i,$$

где k_i — целые неотрицательные числа. Положим

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

и обозначим через b_m число положительных корней α, для которых $|\alpha| = m$. Кроме того, будем считать $b_0 = r$. Тогда кратность, с которой данное число m входит в систему M, равна $b_m - b_{m+1}$.

Общее доказательство пригодности этого способа, данное Костантом, основывается на некоторых свойствах группы Вейля и главной трехмерной подалгебры комплексной алгебры Ли G, соответствующей группе $\mathfrak{K}$. Фундаментальную роль играет элемент R группы Вейля, являющийся произведением отражений, связанных со всеми простыми корнями. Обозначим через h порядок этого элемента. Еще раньше Колман установил (A. J. Coleman, Canadian J. Math., 1958, 10, 349—356), что собственные значения элемента R равны ε^{m_i} где ε — первообразный корень h-той степени из единицы. Поэтому задача Костанта сводилась к вычислению собственных значений оператора R.

Некоторые соотношения для группы Вейля и системы корней полупростой группы Ли, связанные с рассмотренной выше задачей и найденные ранее эмпирическим путем Кокстером (H. S. M. Coxeter, Regular polytopes, New York, 1949) доказал непосредственно Р. Штейнберг [119]. Главные из этих соотношений в предыдущих обозначениях могут быть записаны так:

1) число корней алгебры G равно nh,

2) $h = 1 + |\psi|$, где ψ — старший корень.

Хотя мы и не даем здесь полного обзора работ по топологии групп Ли, хочется в связи с работами по вычислению чисел Бетти отметить работы А. Л. Онищика [81], А. Бореля [16], [17], С. Араки [1], [2], С. Араки и Й. Сикаты [3], в которых исследуется кручение в когомологиях особых групп Ли. А. Борель, С. Араки и Й. Сиката вычислили алгебры когомологий по модулю p для всех особых групп Ли и всех простых p. А. Борель сделал следующее интересное наблюдение: компактная связная группа Ли не имеет p-кручения тогда и только тогда, когда всякая конечная абелева подгруппа типа $(p,..., p)$ содержится в некотором торе.

4. Цикл работ А. Л. Онищика посвящен решению следующих двух задач:

1) найти все подгруппы компактной группы Ли $\mathfrak{K}$, транзитивно действующие на однородном многообразии $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'$, где $\mathfrak{K}'$ — замкнутая подгруппа группы $\mathfrak{K}$;

2) найти все компактные группы Ли, транзитивно действующие на данном компактном многообразии.

Очевидно, что вторая задача включает в себя первую. Для n-мерной сферы она была решена Монтгомери и Самельсоном (D. Montgomery, H. Samelson, Ann. Math., 1943, 44, 454—470) и Борелем (A. Borel, C. R. Acad. Sci. Paris, 1950, 230, 1378—1380).

Первая задача полностью решена в работах Онищика [78], [79], [83]. Она сводится к отысканию всех троек $\{\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}''\}$, где $\mathfrak{K}$ — компактная группа Ли, $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ — ее подгруппы, обладающие тем свойством, что $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}''=\mathfrak{K}$. Такие тройки названы Онищиком разложениями. В указанных работах найдены все разложения. При этом основную роль играли открытые Онищиком топологические свойства разложений. Так, если $\{\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}''\}$ — разложение и $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}''$, то многочлены Пуанкаре групп $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ и $\mathfrak{L}$ связаны следующим равенством:

$$P(\mathfrak{K}')\,P(\mathfrak{K}'') = P(\mathfrak{K})\,P(\mathfrak{L}).$$

Решение второй задачи, очевидно, равносильно выявлению всех гомеоморфизмов между однородными пространствами компактных групп Ли. Онищику [82], [84] удалось построить некоторые топологические инварианты многообразия $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'$, эффективно вычисляемые по группе $\mathfrak{K}$ и подгруппе $\mathfrak{K}'$. В частности, оказалось, что таким инвариантом является отношение $\frac{P(\mathfrak{K})}{P(\mathfrak{K}')}$. С помощью подобных соображений в [82], [84] для некоторых классов компактных многообразий найдены все транзитивно действующие на них компактные группы Ли.

В работе Онищика [80] рассмотрен комплексный аналог задачи 1), в котором роль компактных групп играют редуктивные комплексные группы Ли*. Эта задача сводится к компактному случаю.

§ 2. РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ ЛИ

1. На первом месте здесь следовало бы поставить работы Ж. Диксмье и А. А. Кириллова, создавших изящную теорию унитарных представлений нильпотентных и вполне разрешимых групп Ли. Однако по этому поводу мы отошлем читателя к статье М. А. Наймарка.

О работах по дискретным подгруппам разрешимых групп Ли см. § 5 настоящей статьи.

---

* Комплексная группа Ли $\mathfrak{G}$ называется редуктивной, если она является универсальной комплексной оболочкой своей максимальной компактной подгруппы. Всякая полупростая комплексная группа Ли редуктивна.

Об одном классе разрешимых групп Ли, введенном И. И. Пятецким-Шапиро и связанном с однородными ограниченными областями в n-мерном комплексном пространстве, см. § 4 настоящей статьи.

2. Ж. Титс [108], [109] изучал свойство «продолжаемости» подгрупп связной вещественной группы Ли $\mathfrak{G}$. Замкнутую подгруппу $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$ он назвал продолжаемой, если существует такая замкнутая подгруппа $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{G}$, содержащая $\mathfrak{H}$, что $\dim \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}=1$. Основная теорема Титса гласит, что связная компонента единицы пересечения всех непродолжаемых замкнутых подгрупп, имеющих конечное число связных компонент, совпадает с наибольшим связным нормальным делителем $\mathfrak{N}$, обладающим такой последовательностью замкнутых подгрупп

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_m\supset\mathfrak{N}_{m-1}\supset\ldots\supset\mathfrak{N}_1\supset\mathfrak{N}_0=\{e\},$$

каждая из которых является нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$, что $\dim \mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i-1}=1$. В частности, для того чтобы всякая замкнутая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, имеющая конечное число связных компонент, была продолжаема, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathfrak{G}$ была вполне разрешима. Эти результаты остаются справедливыми, если рассматривать только связные подгруппы или перейти к алгебрам Ли. Для комплексных алгебр Ли основная теорема имеет одно исключение: когда максимальная полупростая подалгебра данной алгебры Ли трехмерна.

3. Г. Б. Гуревич [42] и М. М. Каменская [53], [54] продолжали исследования по стандартным линейным алгебрам. Напомним, что стандартной линейной алгеброй называется подалгебра полной линейной алгебры Ли $L(n)$, нормализатор которой содержит максимальную треугольную подалгебру алгебры $L(n)$. Это понятие было введено Гуревичем (Мат. сб., 1954, 35, 437—460).

Стандартная линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов, называется стандартной нуль-алгеброй. В работе [42] Г. Б. Гуревич нашел все полухарактеристические (инвариантные относительно всех дифференцирований) и характеристические (инвариантные относительно всех автоморфизмов) идеалы стандартных нуль-алгебр.

М. М. Каменская [53], [54] изучала разрешимые стандартные линейные алгебры Ли. Она определила структуру алгебры дифференцирований произвольной разрешимой стандартной алгебры и нашла необходимые и достаточные условия изоморфизма двух разрешимых стандартных алгебр.

З. И. Залманович [47] рассматривала линейные алгебры Ли более общего вида, чем стандартные: алгебры Ли, нормализатор которых в $L(n)$ не имеет кратных весов. Полученные результаты она применила к изучению так называемых ортогонально дополняемых линейных алгебр Ли — таких линейных алгебр Ли, для ко-

торых их сумма с ортогональным дополнением в $L(n)$ есть также алгебра Ли.

4. В работе С. Того [110] исследуется алгебра $D(G)$ дифференцирований конечномерной алгебры Ли G над полем характеристики 0. Устанавливаются различные общие свойства алгебры $D(G)$ и их связь со свойствами алгебры G. Так, доказывается, что алгебра $D(G)$ абелева только тогда, когда G одномерна; если алгебра $D(G)$ нильпотентна, но не абелева, то она состоит из нильпотентных элементов и т. п. Приводится пример неизоморфных алгебр Ли, обладающих изоморфными алгебрами дифференцирований.

Г. Ф. Леджер [68] построил пример такой алгебры Ли G с радикалом R, что алгебра $D(G)$ расщепляема над идеалом внутренних дифференцирований, а алгебра $D(R)$ этим свойством не обладает.

Г. Б. Гуревич в работах [43], [44] рассмотрел один класс метабелевых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем. При посредстве алгебры дифференцирований ему удалось построить полную систему инвариантов для этих алгебр Ли.

5. Укажем еще на две работы, посвященные универсальной обертывающей алгебре $U(G)$ разрешимой алгебры Ли G.

Р. Берна [13] доказал, что если алгебра G вполне разрешима (т. е. обладает инвариантным рядом с одномерными факторами), то центр тела частных кольца $U(G)$ является чисто трансцендентным расширением основного поля. Степень этого расширения не превосходит размерности алгебры G.

Обозначим через $S(G)$ симметрическую алгебру над G и через φ — канонический изоморфизм векторного пространства $U(G)$ на $S(G)$. Известно, что образ центра C алгебры $U(G)$ при отображении φ совпадает с множеством I инвариантов алгебры $S(G)$. Ж. Диксмье [46] доказал, что если алгебра G нильпотентна, то отображение φ индуцирует изоморфизм алгебры C на алгебру I. Он же доказал, что в этом случае C является кольцом с однозначным разложением на простые множители.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

1. Следующие две работы посвящены римановым пространствам в целом.

Нагасава [76] доказал, что если в однородном римановом пространстве $\mathfrak{M}$ не существует замкнутых геодезических и через любые две точки проходит не более одной геодезической, то группа изотропии многообразия $\mathfrak{M}$ в какой-либо его точке состоит из всех ортогональных преобразований касательного пространства

в этой точке, сохраняющих тензор кривизны и все его ковариантные производные.

Риманово многообразие $\mathfrak{M}$ называется инфинитезимально однородным, если для любых двух точек из $\mathfrak{M}$ существует изометрия касательных пространств в этих точках, сохраняющая тензор кривизны и все его ковариантные производные. Зингер [48] доказал, что всякое полное односвязное инфинитезимально однородное риманово многообразие однородно в обычном смысле.

2. В этом пункте $\mathfrak{K}$ будет обозначать связную компактную группу Ли, $\mathfrak{U}$—ее замкнутую подгруппу. На многообразии $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ можно, вообще говоря, различными способами вводить инвариантную риманову метрику. Если инвариантная метрика на $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ индуцирована инвариантным скалярным умножением в алгебре Ли группы $\mathfrak{K}$, то мы будем называть ее канонической.

Г. Самельсон [97] установил, что в канонической метрике кривизна многообразия $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ по всем двумерным направлениям неотрицательна. Отсюда, получается новое доказательство того, что эйлерова характеристика $\chi(\mathfrak{K}/\mathfrak{U})$ многообразия $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ неотрицательна; если же $\mathfrak{U}$—подгруппа максимального ранга в $\mathfrak{K}$, то $\chi(\mathfrak{K}/\mathfrak{U})>0$.

М. Берже [12] нашел все односвязные однородные многообразия $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$, которые в канонической метрике имеют строго положительную кривизну по всем двумерным направлениям.

Б. Костант [62] изучал группу голономии многообразия $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ и выяснил, что ее приводимость зависит, вообще говоря, от выбора инвариантной метрики. Однако в том случае, когда естественное линейное представление группы $\mathfrak{U}$ в касательном пространстве к многообразию $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ разлагается в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений, выбор инвариантной метрики не влияет на приводимость группы голономии. Если $\chi(\mathfrak{K}/\mathfrak{U})>0$, то группа голономии неприводима тогда и только тогда, когда группа $\mathfrak{K}$ простая.

О. В. Мантуров [69], [70] перечислил все односвязные однородные многообразия $\mathfrak{K}/\mathfrak{U}$ с неприводимой группой изотропии для случаев, когда $\mathfrak{K}$—простая компактная группа классического типа.

3. Пусть $\mathfrak{U}$—некоторая группа движений риманова многообразия $\mathfrak{M}$. Говорят, что $\mathfrak{U}$ действует на $\mathfrak{M}$ вариационно полным образом, если всякое непрерывное семейство геодезических, проходящих через одну точку и ортогональных к какой-либо орбите группы $\mathfrak{U}$, получается из одной геодезической движениями из группы $\mathfrak{U}$. Р. Герман [39] доказал, что всякая симметрическая* подгруппа группы движений компактного симметрического про-

---

* Подгруппа $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{K}$ называется симметрической, если она является множеством неподвижных точек некоторого инволютивного автоморфизма группы $\mathfrak{K}$.

странства $\mathfrak{M}$ действует на $\mathfrak{M}$ вариационно полным образом. Раньше это было известно для стационарной подгруппы (R. Bott, H. Samelson, Amer. J. Math., 1958, **80**, 964—1029).

А. С. Феденко [112] классифицировал симметрические псевдоримановы пространства с простыми группами движений классических серий.

Л. В. Сабинин [93] изучал римановы пространства, с каждой точкой которых связаны три перестановочных инволютивных движения, являющихся отражениями в трех ортогональных вполне геодезических «зеркалах». Такие пространства он назвал трисимметрическими. Отыскание всех трисимметрических римановых пространств с полупростой группой движений $\mathfrak{G}$ сводится к отысканию троек $\{S_1, S_2, S_3\}$ перестановочных инволютивных автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$, для которых $S_1S_2=S_3$ и подгруппа элементов, неподвижных при действии S_1, S_2 и S_3, компактна. Группа $\mathfrak{G}$ разлагается в прямое произведение минимальных нормальных делителей, инвариантных относительно S_1, S_2 и S_3. Как показал Л. В. Сабинин, каждый из этих нормальных делителей является прямым произведением k изоморфных простых групп, где $k=1$, 2 или 4. Во всех этих случаях в [93] указано строение соответствующих трисимметрических пространств.

4. Интересный класс однородных римановых пространств представляют собой однородные выпуклые конусы в n-мерном действительном линейном пространстве R^n. Мы будем понимать под выпуклым конусом в R^n открытое выпуклое множество, инвариантное относительно умножений на положительные числа. В каждом выпуклом конусе можно каноническим образом ввести риманову метрику. Линейные преобразования пространства R^n, сохраняющие конус V, называются его автоморфизмами. Если группа $\mathfrak{G}(V)$ автоморфизмов конуса V действует на нем транзитивно, то этот конус называется однородным.

В работах М. Кехера [56], [57], Э. Б. Винберга [30], О. С. Ротхауса [91], Ш. Хертнек [115] изучались однородные самосопряженные выпуклые конусы, т. е. такие однородные выпуклые конусы, которые совпадают со своими сопряженными конусами относительно некоторой евклидовой метрики в пространстве R^n. М. Кехер и Э. Б. Винберг независимо и разными путями пришли к общей конструкции однородных самосопряженных конусов, которая неожиданно оказалась связанной с йордановыми алгебрами. Пусть A — йорданова алгебра, обладающая евклидовой метрикой, в которой операторы умножения симметричны. Тогда открытое ядро множества $A^2=\{a^2 : a \in A\}$ является однородным самосопряженным конусом. Тот же конус может быть описан иначе как совокупность элементов вида $\exp a$, $a \in A$, а также многими другими способами. Группа его автоморфизмов удобно описывается в терминах алгебры A. Однако наиболее интересно то, что всякий одно-

родный самосопряженный конус может быть получен указанным выше способом.

Из классификации полупростых йордановых алгебр вытекает, что всякий однородный самосопряженный конус, неразложимый в прямую сумму двух конусов того же типа, изоморфен либо конусу положительно определенных эрмитовых матриц над полем действительных или комплексных чисел или телом кватернионов, либо шаровому конусу, либо 27-мерному конусу, связанному с особой йордановой алгеброй. Все однородные самосопряженные конусы являются симметрическими римановыми пространствами.

Для элементов a, x йордановой алгебры A положим

$$P(a)x = 2a(ax) - a^2x.$$

Пусть $V(A)$ — самосопряженный конус, связанный с алгеброй A. М. Кехер показал, что при $a \in V(A)$ преобразование $P(a)$ входит в группу автоморфизмов конуса $V(A)$. Ш. Хертнек доказала формулу

$$P(a)P(b)P(a) = P(P(a)b).$$

Как нетрудно извлечь из [30], всякий автоморфизм конуса $V(A)$ однозначно представляется в виде $\sigma \cdot P(a)$, где $a \in V(A)$, а σ — некоторый автоморфизм алгебры A.

Работы Э. Б. Винберга [32], [33], [34], Ж. Л. Козюля [60], [61], О. С. Ротхауса [92] посвящены произвольным однородным выпуклым конусам. Эти конусы не поддаются классификации в полном смысле слова, но допускают далеко идущую теорию. Приведем здесь индуктивный способ построения всех однородных выпуклых конусов, содержащийся в работах Э. Б. Винберга [32], [34] и Ж. Л. Козюля [61].

Пусть V — однородный выпуклый конус в R^n и F — билинейная функция на $R^m \times R^m$ со значениями в R^n, обладающая следующими свойствами:

1) $F(u, v) = F(v, u)$ при $u, v \in R^m$;

2) $F(u, u) \in \overline{V}$ (замыкание конуса V) при всех $u \in R^m$;

3) автоморфизмы A конуса V, для которых существует такое линейное преобразование B пространства R^m, что

$$AF(u, v) = F(Bu, Bv) \text{ при } u, v \in R^m,$$

транзитивно действуют на V.

Множество троек $(t, x, u) \in R^1 \times R^n \times R^m$, для которых

$$t > 0, \quad tx - F(u, u) \in V,$$

является однородным выпуклым конусом в $(m+n+1)$-мерном пространстве $R^1 \times R^n \times R^m$. Таким способом может быть получен любой однородный выпуклый конус. О. С. Ротхаус [92] предложил дуальную конструкцию.

Э. Б. Винберг [33], [34] построил обобщенное матричное исчисление, в терминах которого каждый однородный выпуклый

конус является конусом положительно определенных эрмитовых матриц. Это исчисление является удобным универсальным аппаратом для описания и изучения однородных выпуклых конусов и их групп автоморфизмов.

Теория однородных выпуклых конусов возникла и развивалась в тесной связи с теорией однородных ограниченных областей в комплексном пространстве (см. § 4).

5. Й. Вольф [36]—[38] классифицировал в целом однородные римановы и псевдоримановы многообразия постоянной кривизны.

Однородное риманово многообразие постоянной отрицательной кривизны односвязно и изоморфно пространству Лобачевского. Однородное риманово многообразие постоянной положительной кривизны не обязательно односвязно. Оно получается из сферы факторизацией по конечной группе, состоящей из «движений Клиффорда», для которых расстояние от точки до ее образа постоянно.

Конечные группы Г движений Клиффорда $(n-1)$-мерной сферы в n-мерном евклидовом пространстве R^n описываются, согласно Вольфу, следующим образом.

Если n нечетно, то группа Г либо тривиальна, либо состоит из тождественного преобразования и отражения в центре сферы (последнему случаю соответствует проективное пространство).

Если n четно, то пространство R^n можно снабдить комплексной структурой, согласованной с имеющейся евклидовой метрикой, и рассматривать его как $n/2$-мерное унитарное пространство $C^{n/2}$. Группа Г может тогда состоять из движений сферы, индуцированных умножениями на корни k-той степени из единицы в пространстве $C^{n/2}$ (k — любое натуральное число). Если n не делится на 4, то этим исчерпываются все возможности.

Если n делится на 4, то пространство R^n можно снабдить структурой $n/4$-мерного унитарного кватернионного пространства $Q^{n/4}$. Группа кватернионов, равных по модулю единице, как известно, является универсальной накрывающей для группы $SO(3)$. В рассматриваемом случае группа Г либо имеет строение, указанное выше, либо состоит из движений сферы, индуцированных умножениями на кватернионы, равные по модулю единице, образ которых в группе $SO(3)$ принадлежит соответственно тетраэдральной, октаэдральной или икосаэдральной группе.

Псевдоримановы пространства постоянной кривизны описываются аналогичным образом, но более сложно.

6. Инвариантным линейным связностям в однородных пространствах посвящены работы А. М. Васильева [23], [24], [26] и Э. Б. Винберга [29].

Пусть $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — однородное пространство связной группы Ли $\mathfrak{G}$. Пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ называется редуктивным, если алгебра Ли G допускает разложение

$$G = H + P$$

где P — подпространство, инвариантное относительно присоединенного представления группы $\mathfrak{H}$ в алгебре G. Хорошо известно, что в редуктивном однородном пространстве всегда существует инвариантная линейная связность. А. М. Васильев рассмотрел специальный класс инвариантных линейных связностей без кручения в редуктивном пространстве, возникающий, если задано разложение

$$G = H + P^{(1)} + \ldots + P^{(m)}$$

где $H_k = H + P^{(1)} + \ldots + P^{(k)}$ — подалгебра, а $P_k = P^{(k+1)} + \ldots + P^{(m)}$ — подпространство, инвариантное относительно H_k. Для этих связностей в [23], [24] и [26] изучены геометрические свойства геодезических линий и указаны различные способы получения вполне геодезических подмногообразий.

Работа А. М. Васильева [25] посвящена определению пар взаимно ортогональных подгрупп специального вида в группе $SO(n)$, что связано с задачей нахождения вполне геодезических подмногообразий в однородных пространствах группы $SO(n)$.

В работе Э. Б. Винберга [29] рассматривались инвариантные линейные связности в произвольных однородных пространствах. Получено описание всех таких связностей в терминах алгебры Ли G и подалгебры H, что, впрочем, является частным случаем теоремы Вана (H. C. Wang, Nagoya Math. J., 1958, 13, 1—19) для инвариантных связностей в произвольных расслоенных пространствах. Приведены некоторые достаточные условия существования инвариантной линейной связности; одним из этих условий является одномерность стационарной подгруппы $\mathfrak{H}$.

Б. Костант [65] нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы данное многообразие $\mathfrak{M}$ с линейной связностью A допускало транзитивную группу автоморфизмов, относительно которой оно было бы редуктивным пространством. Это условие состоит в том, что на $\mathfrak{M}$ должна существовать такая полная линейная связность B, что тензоры кручения и кривизны связности A, а также тензор $A - B$ ковариантно постоянны относительно связности B. Аналогичное условие однородности риманова многообразия было выведено раньше Амброзом и Зингером (W. Ambrose, I. M. Singer, Duke Math. J., 1950, 25, 647—669).

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Пусть $\mathfrak{G}$—комплексная группа Ли, $\mathfrak{H}$—ее связная замкнутая комплексная подгруппа. При каком условии комплексное многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ является многообразием Штейна? Ответ на этот вопрос при различных дополнительных предположениях можно

найти в работах Й. Мацусимы и А. Моримото [74], Й. Мацусимы [71], [72] и А. Л. Онищика [80].

Обозначим через $\mathfrak{L}$ максимальную компактную подгруппу группы $\mathfrak{H}$ и через $\mathfrak{K}$—максимальную компактную подгруппу группы $\mathfrak{G}$, содержащую $\mathfrak{L}$. Далее, пусть $\tilde{\mathfrak{K}}$ и $\tilde{\mathfrak{L}}$—комплексные оболочки групп $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$. В [72] доказано, что если $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$—многообразие Штейна, то $\tilde{\mathfrak{L}}$ совпадает со связной компонентой группы $\tilde{\mathfrak{K}}\cap\mathfrak{H}$. Там же доказано, что если группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна и $\tilde{\mathfrak{K}}\cap\mathfrak{H}=\{e\}$, то $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$—многообразие Штейна.

Сама группа $\mathfrak{G}$ как комплексное многообразие изоморфна прямому произведению $\tilde{\mathfrak{K}}\times C^m$, где C^m—комплексное аффинное пространство [71]. Она является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда $K\cap iK=0$ [74]. В этом случае она представляет собой аффинное алгебраическое многообразие. Интересно сопоставить этот результат с результатом Г. Хохшильда и Г. Д. Мостова [116], согласно которому группа $\mathfrak{G}$ может быть отождествлена с алгебраической линейной группой так, чтобы ее комплексно-аналитические представления совпали с рациональными тогда и только тогда, когда она разлагается в полупрямое произведение нильпотентного радикала* и редуктивной группы.

Если группа $\mathfrak{G}$ редуктивна, т. е. $\mathfrak{G}=\tilde{\mathfrak{K}}$, то для того, чтобы многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ было многообразием Штейна, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathfrak{H}$ была редуктивна [71], [80]. Доказательство достаточности этого условия, данное А. Л. Онищиком [80], основывается на следующих рассуждениях, представляющих самостоятельный интерес. Пусть группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ редуктивны. Рассмотрим компактное однородное пространство $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ (см. обозначения выше). Гомоморфизмы алгебры сферических функций на $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ в поле комплексных чисел находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с точками многообразия $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Поэтому всякое эквивариантное вложение пространства $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ в комплексное линейное пространство C^n, осуществляемое с помощью сферических функций, продолжается до эквивариантного вложения многообразия $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в C^n. При этом многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ оказывается реализованным в виде алгебраического многообразия в C^n.

2. Хорошо известна теорема Вана (H. C. Wang, Amer. J.Math., 1954, 76, 1—32) о том, что всякое односвязное однородное компактное комплексное многообразие $\mathfrak{M}$ допускает голоморфное расслоение, базой которого является односвязное однородное компактное кэлерово многообразие $\mathfrak{M}_0$, а слоем—комплексный тор T^k.

В работе Дж. И. Хано и С. Кобаяси [113] приведено новое доказательство теоремы Вана, более геометричное и опирающееся на такие соображения, которые могут быть применены к более общему случаю.

* Нильпотентным радикалом группы Ли называется пересечение ее радикала с коммутантом.

Г. Н. Тюрина [111] указала способ вычисления d''-когомологий пространства $\mathfrak{M}$. Из ее результатов следует, в частности, что градуированное пространство когомологий многообразия $\mathfrak{M}$ со значениями в пучке ростков аналитических функций изоморфно внешней алгебре над k-мерным комплексным линейным пространством.

Й. Мацусима [73] доказал, что всякое компактное комплексное многообразие с мерой, допускающее полупростую транзитивную группу автоморфизмов, может быть голоморфно расслоено так, что базой будет односвязное однородное компактное кэлерово многообразие, а слоем — факторпространство комплексной редуктивной группы Ли по равномерной дискретной подгруппе. Эта теорема является в известном смысле обобщением теоремы Вана.

З. И. И. Пятецкий-Шапиро создал теорию однородных ограниченных областей в n-мерном комплексном пространстве R^n. До него был известен лишь узкий класс таких областей, а именно, симметрические области Э. Картана.

И. И. Пятецкий-Шапиро нашел общую конструкцию однородных областей в C^n, аналитически эквивалентных ограниченным, которая, как оказалось впоследствии, является универсальной. Речь идет о так называемых однородных областях Зигеля 1-го и 2-го рода [86].

Пусть V—однородный выпуклый конус в n-мерном действительном пространстве R^n (см. § 3). Рассмотрим область

$$\mathfrak{D}(V) = \{x + iy : x \in R^n,\ y \in V\} \subset C^n.$$

Она однородна и аналитически эквивалентна ограниченной области. Область $\mathfrak{D}(V)$ называется однородной областью Зигеля 1-го рода, связанной с конусом V.

Пусть теперь F—функция на $C^m \times C^m$ со значениями в C^n, линейная по первому аргументу, антилинейная по второму и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $F(u, v) = \overline{F(v, u)}$ при $u, v \in C^m$;

2) $F(u, u) \in \bar{V}$ (замыкание конуса V) для всякого $u \in C^m$, причем $F(u, u) = 0$ только при $u = 0$;

3) конус V обладает такой транзитивной группой $\mathfrak{H}$ автоморфизмов, что для всякого $A \in \mathfrak{H}$ существует линейное преобразование B пространства C^m, для которого

$$F(Bu, Bv) = AF(u, v) \quad \text{при всех} \quad u, v \in C^m.$$

Рассмотрим область

$$\mathfrak{D}(V, F) = \{(x + iy, u) : x, y \in R^n,\quad u \in C^m,\quad y - F(u, u) \in V\} \subset C^n \times C^m.$$

Она однородна и аналитически эквивалентна ограниченной области. Область $\mathfrak{D}(V, F)$ называется однородной областью Зигеля 2-го рода, связанной с конусом V и функцией F.

В работе И. И. Пятецкого-Шапиро, Э. Б. Винберга и С. Г. Гиндикина [35] доказано, что всякая однородная ограниченная область аналитически эквивалентна (единственной) однородной области Зигеля 1-го или 2-го рода. Отсюда, в частности, следует, что во всякой однородной ограниченной области $\mathfrak{D}$ просто транзитивно действует некоторая вполне разрешимая группа автоморфизмов, причем область $\mathfrak{D}$ может быть реализована в виде области Зигеля 1-го или 2-го рода так, что эта группа будет состоять из аффинных преобразований.

Еще раньше, в работах [87] и [88], И. И. Пятецкий-Шапиро установил взаимно однозначное соответствие между однородными ограниченными областями, допускающими транзитивную разрешимую группу автоморфизмов, и вполне разрешимыми алгебрами Ли, в которых существуют оператор j и линейная форма ω, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $j^2 = -1$;

2) $[jx, jy] = j[jx, y] + j[x, jy] + [x, y]$;

3) $\omega([jx, jy]) = \omega([x, y])$;

4) $\omega([jx, x]) > 0$, если $x \neq 0$.

Такие алгебры Ли были им названы нормальными j-алгебрами. Аксиомы 1)—4) нормальной j-алгебры возникли путем перевода на язык алгебр Ли свойств комплексной структуры и метрики Бергмана однородной ограниченной области.

В [88] и [89] изучено строение j-алгебр. В частности, установлено, что нормальная j-алгебра ранга 1 (связанная с комплексным шаром) вполне определяется своей размерностью. Для произвольной нормальной j-алгебры G ранга r получено разложение

$$G = \sum_{k=1}^{r} G_k,$$

в котором

1) $[G_k, G_l] \subset G_k$, если $k \leqslant l$;

2) G_k—нормальная j-алгебра ранга 1.

Аналогичный алгебраический аппарат использовался и в работе [35].

4. С. Кобаяси [58] доказал следующую теорему: если группа Ли $\mathfrak{G}$ транзитивно действует на n-мерном комплексном многообразии $\mathfrak{M}$, то ее естественное унитарное представление в пространстве голоморфных n-форм на $\mathfrak{M}$ с интегрируемым квадратом неприводимо.

§ 5. ДИСКРЕТНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ЛИ.

1. Общие свойства равномерных* дискретных подгрупп произвольных групп Ли изучал А. Вейль [27]. Пусть Γ — дискретная подгруппа группы Ли $\mathfrak{G}$. Непрерывной деформацией подгруппы Γ называется такое семейство $\{r_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, гомоморфизмов группы Γ в группу $\mathfrak{G}$, что $r_0(\gamma) = \gamma$ и $r_t(\gamma)$ непрерывно по t при каждом $\gamma \in \Gamma$. В цитированной работе А. Вейля доказано, что если Γ — равномерная дискретная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\{r_t\}$ — ее непрерывная деформация, то существует такое число $a > 0$, что для всех $t < a$ ядро гомоморфизма r_t тривиально, группа $r_t(\Gamma)$ дискретна в $\mathfrak{G}$ и факторпространство $\mathfrak{G}/r_t(\Gamma)$ компактно. Кроме того, для каждого $t < a$ существует такой аналитический гомеоморфизм F_t группы $\mathfrak{G}$ на себя, что

$$F_t(g \cdot \gamma) = F_t(g) \cdot r_t(\gamma) \text{ при всех } g \in \mathfrak{G},\ \gamma \in \Gamma.$$

Отображение F_t, очевидно, индуцирует аналитический гомеоморфизм многообразия $\mathfrak{G}/\Gamma$ на многообразие $\mathfrak{G}/r_t(\Gamma)$.

Деформация $\{r_t\}$ называется тривиальной, если существуют такие элементы $g_t \in \mathfrak{G}$, что

$$r_t(\gamma) = g_t \gamma g_t^{-1} \text{ при всех } \gamma \in \Gamma.$$

Будем называть полупростую группу Ли $\mathfrak{G}$ допустимой, если все ее простые компоненты некомпактны и имеют размерность > 3. А. Вейль [28] доказал «теорему жесткости» для равномерной дискретной подгруппы Γ допустимой полупростой группы Ли $\mathfrak{G}$: всякая непрерывная деформация подгруппы Γ тривиальна.**

Этот результат А. Вейля был подготовлен предшествующими результатами других авторов, доказавших теорему жесткости для различных частных случаев. Так, А. Сельберг [98] доказал теорему жесткости для группы унимодулярных действительных матриц порядка $n \geqslant 3$. Его метод состоит в доказательстве того, что группа Γ подобна группе, состоящей из матриц, все элементы которых — алгебраические числа. Как указывает А. Сельберг, этот метод применим и к некоторым другим простым группам, но не к группам движений симметрических пространств ранга 1. Однако он интересен сам по себе.

Совершенно иным методом — методом деформации структуры — пользовались Е. Калаби и Э. Везентини. В общих чертах этот метод состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{K}$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ является римановым симметрическим пространством отрицательной кривизны. Рассмотрим факторпространства $\mathfrak{M}/r_t(\Gamma)$. С помощью отображений

---

* Дискретная подгруппа Γ группы Ли $\mathfrak{G}$ называется равномерной, если факторпространство $\mathfrak{G}/\Gamma$ компактно.

** Для трехмерной некомпактной простой группы Ли теорема жесткости неверна.

F_t (см. выше) они могут быть отождествлены с $\mathfrak{M}/\Gamma$. Перенося риманову структуру с $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}/r_t(\Gamma)$, а оттуда на $\mathfrak{M}/\Gamma$, мы получаем непрерывную деформацию римановой структуры на $\mathfrak{M}/\Gamma$.* В том случае, когда $\mathfrak{M}$ — комплексное многообразие, аналогичным образом определяется деформация комплексной структуры на $\mathfrak{M}/\Gamma$. Деформация структуры называется тривиальной, если она может быть получена деформацией самого многообразия. Легко видеть, что тривиальным деформациям подгруппы Γ соответствуют тривиальные деформации структуры на $\mathfrak{M}/\Gamma$, и обратно. Таким образом, для доказательства жесткости подгруппы Γ достаточно доказать жесткость римановой или комплексной структуры на $\mathfrak{M}/\Gamma$.

Наличие нетривиальных деформаций структуры связано, в свою очередь, с наличием гармонических тензорных полей того или иного вида. Отсутствие таких полей может быть доказано по способу Бохнера, путем интегрирования по всему многообразию некоторого заведомо неотрицательного выражения, содержащего тензор кривизны. Этот способ приводит к успеху, если тензор кривизны удовлетворяет некоторым неравенствам.

Метод деформации структуры позволил Е. Калаби [50]** доказать теорему жесткости для равномерных дискретных подгрупп группы движений пространства Лобачевского размерности $n \geqslant 3$. Е. Калаби и Э. Везентини [51], [52] доказали теорему жесткости для групп автоморфизмов неприводимых симметрических областей Картана классических серий размерности $n \geqslant 2$.

А. Борель [14] дополнил этот результат, произведя общим методом необходимые оценки для тензора кривизны любой симметрической области и доказав тем самым, в частности, теорему жесткости для особых областей.

Методом деформации структуры по существу пользовался и А. Вейль в упоминавшейся выше работе [28].

2. А. Борель [15] рассмотрел подгруппы Γ (не обязательно дискретные) группы Ли $\mathfrak{G}$, обладающие следующим свойством (S): для каждого элемента $g \in \mathfrak{G}$ и каждой окрестности U единицы группы $\mathfrak{G}$ найдется такое натуральное число n, что $g^n \in U\Gamma U$. Этим свойством заведомо обладают такие замкнутые подгруппы Γ, для которых однородное пространство $\mathfrak{G}/\Gamma$ имеет конечную инвариантную меру, и, тем самым, все равномерные дискретные подгруппы.

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая группа Ли, все простые компоненты которой некомпактны, и Γ — ее подгруппа со свойством (S). В [15] получен следующий результат: подгруппа Γ не содержится

---

* Эта деформация не может быть какой угодно. Она сохраняет локальные свойства структуры, такие, как, например, ковариантное постоянство тензора кривизны (локальную симметричность).

** Первая часть работы.

ни в какой собственной замкнутой подгруппе группы $\mathfrak{G}$, имеющей конечное число связных компонент. В частности, если $\mathfrak{G}$ — алгебраическая группа, то подгруппа Г плотна в ней в топологии Зариского.

А. Борель и Хариш-Чандра [18], [19] изучали так называемые «арифметически определенные» дискретные подгруппы алгебраических групп Ли, которые строятся следующим образом. Пусть группа Ли $\mathfrak{G}$ реализована как алгебраическая подгруппа группы действительных матриц, определенная над полем рациональных чисел. Подгруппа $\mathfrak{G}_Z$ группы $\mathfrak{G}$, состоящая из всех унимодулярных целочисленных матриц, принадлежащих $\mathfrak{G}$, называется арифметически определенной подгруппой. В цитированной работе, в частности, находятся условия, при которых факторпространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_Z$ компактно или имеет конечный объем. Если группа $\mathfrak{G}$ полупроста, то последнее условие всегда имеет место, а для компактности факторпространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_Z$ необходимо и достаточно, чтобы все матрицы с рациональными элементами, содержащиеся в $\mathfrak{G}$, приводились над полем комплексных чисел к диагональному виду.

Есть основания ожидать, что всякая дискретная подгруппа допустимой полупростой группы Ли (см. п. 1), факторпространство по которой имеет конечный объем, является арифметически определенной (ср. это предположение с результатом Сельберга, упоминавшимся в п. 1).

3. Как известно, А. И. Мальцев в своей работе, посвященной дискретным подгруппам нильпотентных групп Ли (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, 13, 9—32), получил следующие результаты:

1) для того, чтобы данная группа могла быть вложена в односвязную нильпотентную группу Ли в виде дискретной подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы она была нильпотентной группой без кручения с конечным числом образующих;

2) те же условия характеризуют группы, которые могут быть вложены в односвязную нильпотентную группу Ли в виде равномерной дискретной подгруппы;

3) две односвязные нильпотентные группы Ли, обладающие изоморфными равномерными дискретными подгруппами, сами изоморфны;

4) для того, чтобы данная односвязная нильпотентная группа Ли обладала равномерной дискретной подгруппой, необходимо и достаточно, чтобы в ее алгебре Ли существовала база, в которой структурные константы рациональны.

Ряд работ был посвящен распространению и обобщению результатов Мальцева на разрешимые группы.

Дискретная группа называется строго свободной от кручения S-группой, если она является расширением свободной абелевой группы с конечным числом образующих посредством нильпотентной группы без кручения с конечным числом образующих.

Еще раньше Мостов (G. D. Mostow, Ann. of Math., 1954, 60, 1—27) и Ван (H. C. Wang, Ann. of Math., 1956, 64, 1—19) установили, что данная группа может быть вложена в односвязную разрешимую группу Ли в виде дискретной подгруппы тогда и только тогда, когда она является строго свободной от кручения S-группой.

Л. Ауслендер [9] нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная группа могла быть вложена в односвязную разрешимую группу Ли в виде равномерной дискретной подгруппы.

Пусть Г—свободная от кручения нильпотентная группа с конечным числом образующих и $\mathfrak{N}(\Gamma)$—та единственная односвязная нильпотентная группа Ли, которая содержит Г в качестве равномерной дискретной подгруппы. В работе [5] Л. Ауслендер изучал односвязные разрешимые группы Ли, содержащие Г в качестве равномерной дискретной подгруппы. Оказалось, что всякая такая группа содержится в полупрямом произведении группы $\mathfrak{N}(\Gamma)$ и некоторой компактной группы ее автоморфизмов. При некоторых условиях две односвязные разрешимые группы Ли, содержащие Г в качестве равномерной дискретной подгруппы, оказываются изоморфными.

М. Сайто [95] нашел условие для того, чтобы данная односвязная разрешимая группа Ли $\mathfrak{G}$ содержала равномерную дискретную подгруппу. Оно состоит в том, что наибольший нильпотентный идеал N алгебры Ли группы $\mathfrak{G}$ должен обладать такой базой B, что

1) структурные константы алгебры Ли N в базе B рациональны;

2) операторы из $\mathrm{Ad}_N\mathfrak{G}$, записывающиеся в базе B унимодулярными целочисленными матрицами, образуют равномерную дискретную подгруппу в $\mathrm{Ad}_N\mathfrak{G}$.

(Здесь $\mathrm{Ad}_N\mathfrak{G}$—ограничение присоединенной группы группы $\mathfrak{G}$ на идеале N).

Л. и М. Ауслендеры [11], а затем М. Сайто [94], [95] нашли все односвязные разрешимые группы Ли, допускающие коммутативную равномерную дискретную подгруппу. Оказалось, что группа $\mathfrak{G}$ обладает этим свойством тогда и только тогда, когда она разлагается в полупрямое произведение коммутативного нормального делителя $\mathfrak{N}$ и коммутативной подгруппы, причем группа $\mathrm{Ad}_N\mathfrak{G}$ компактна.

В работе [6] Л. Ауслендер доказал, что фундаментальная группа всякого однородного многообразия разрешимой группы Ли является в то же время фундаментальной группой некоторого компактного однородного многообразия разрешимой группы Ли. Этот результат также является обобщением одного результата Мальцева.

Наконец, работы Л. Ауслендера [7], [8] посвящены обобщению теорем Бибербаха. Если представить группу $\mathfrak{G}$ движений n-мерного евклидова пространства как полупрямое произведение коммутативного нормального делителя $\mathfrak{N}$, образованного параллельными сдвигами, и ортогональной группы $O(n)$, то теоремы Бибербаха можно сформулировать следующим образом:

1) для любой равномерной дискретной подгруппы Γ группы $\mathfrak{G}$ пересечение $\Gamma \cap \mathfrak{N}$ равномерно в $\mathfrak{N}$ и имеет конечный индекс в Γ;

2) любой изоморфизм $\psi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$, где Γ_1, Γ_2—равномерные дискретные подгруппы группы $\mathfrak{G}$, однозначно продолжается до автоморфизма группы $\mathfrak{G}$.

В работе [7] Л. Ауслендер показал, что теоремы Бибербаха остаются справедливыми для полупрямого произведения $\mathfrak{G}$ односвязной нильпотентной группы Ли $\mathfrak{N}$ и произвольной компактной группы ее автоморфизмов. В [8] доказано, что для любой (не обязательно равномерной) дискретной подгруппы Γ группы $\mathfrak{G}$ пересечение $\Gamma \cap \mathfrak{N}$ имеет конечный индекс в Γ.

Для разрешимых групп $\mathfrak{N}$ теоремы Бибербаха неверны [7].

4. Пусть $\mathfrak{G}$—группа всех невырожденных линейных преобразований n-мерного комплексного пространства. Л. Ауслендер [4] показал, что всякая разрешимая дискретная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих, не превосходящее некоторого числа $\rho(n)$. В работе [10] он нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная разрешимая группа допускала точное дискретное представление в группу $\mathfrak{G}$. Основную роль при этом играли понятия, введенные им в работе [9].

Интересно сопоставить эти результаты с результатами Д. А. Супруненко [104], [105], [106], который описал все максимальные разрешимые подгруппы группы $\mathfrak{G}$.

§ 6. ПРОЧИЕ ВОПРОСЫ

1. В последние годы появилось много работ, в которых уточняется, обобщается и развивается теория бесконечномерных групп Ли преобразований, созданная Э. Картаном. Основные определения и изложения результатов Э. Картана на современном языке можно найти в докладе Мацусимы на семинаре Бурбаки (Y. Matsushima, Sém. Bourbaki, 1954—55, no. 118, 1—14; РЖМат, 1961, 4А229).

Одна из главных трудностей в теории бесконечномерных групп преобразований связана с определением изоморфизма двух таких групп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, действующих на многообразиях $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. По Э. Картану, группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ считаются изоморфными, если существуют многообразие $\mathfrak{M}$, бесконечномерная группа Ли $\mathfrak{G}$ преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, проекции ρ_i: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_i$ и взаимно од-

нозначные отображения ψ_i: $\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}_i$, удовлетворяющие условию

$$\rho_i(gx)=\psi_i(g)\,\rho_i(x) \text{ при всех } x\in\mathfrak{M},\ i=1,2.$$

М. Кураниси [66], [67] сопоставил каждой бесконечномерной группе Ли преобразований некоторую формальную группу Ли таким образом, что локальный изоморфизм двух групп преобразований равносилен изоморфизму соответствующих формальных групп Ли. Он определил также формальную алгебру Ли для каждой бесконечномерной группы преобразований и исследовал ее связи с соответствующей формальной группой Ли.

А. М. Родригес [90] вывел аналоги первой и второй теорем Ли для бесконечномерных групп Ли преобразований. В первоначальном виде вторая теорема Ли для бесконечномерных групп принадлежит Э. Картану. Она гласит, что каждая такая группа изоморфна группе $\mathfrak{G}$ всех преобразований, сохраняющих некоторые функции $f_1,\ldots,f_h$ и линейные формы $\omega^1,\ldots,\omega^n$, причем выполняются структурные уравнения

$$d\omega^i=c^i_{jk}\,\omega^j\wedge\omega^k+a^i_{j\alpha}\,\omega^j\wedge\pi^\alpha,$$

где $\pi^1,\ldots,\pi^\nu$ — линейные формы, образующие вместе с $\omega^1,\ldots,\omega^n$ базис в пространстве линейных форм в каждой точке многообразия, а функции c^i_{jk}, $a^i_{j\alpha}$ инвариантны относительно $\mathfrak{G}$.

С. Штернберг [121], [122] нашел достаточные условия, при которых данное преобразование многообразия содержится в некоторой однопараметрической группе преобразований, исследовал картановские подалгебры в бесконечномерных алгебрах Ли инфинитезимальных преобразований, доказав, в частности, при некоторых предположениях их сопряженность. Формальные аналоги этих результатов получены им в работе [123].

Гу Чао-Хао [41] изучал однородные многообразия с симплектической метрикой. Группа движений такого многообразия является, вообще говоря, бесконечномерной. В [41] исследуются свойства симплектической метрики при различных предположениях относительно группы изотропии.

2. Р. Палейс в работе [85] изложил с глобальной точки зрения теорию (конечномерных) групп Ли преобразований. В частности, в [85] приведены различные условия, при которых данное векторное поле порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований.

В. Грейб [40] вывел основные теоремы Ли, пользуясь аппаратом линейных связностей. Известно, что группа Ли естественным путем снабжается инвариантной линейной связностью с нулевой кривизной. В [40] показано, что многообразие, в котором определена линейная связность с нулевой кривизной, может быть превращено (в целом) в группу Ли тогда и только тогда, когда тензор кручения этой связности удовлетворяет определенным условиям.

3. Т. Ноно [77] продолжал начатое им в других работах исследование особенностей экспоненциального отображения exp вещественной или комплексной алгебры Ли G в группу $\mathfrak{G}$. Пусть $x \in G$ — элемент, в окрестности которого отображение exp не является гомеоморфизмом. Положим $g = \exp x$ и обозначим через $\mathfrak{G}_0$ связную компоненту единицы централизатора элемента g. В [77] показано, что $\exp^{-1}(g) \subset G_0$, что множество $\exp^{-1}(g)$ локально связно и что его связная компонента $L(x)$, содержащая x, совпадает с $(\mathrm{Ad}\,\mathfrak{G}_0)\,x$. Размерность множества $L(x)$ равна числу линейно независимых собственных векторов оператора $\mathrm{ad}\,x$ с собственными значениями вида $2\pi ik$, где k — целое число, не равное нулю. (Наличие таких собственных значений является признаком элементов $x \in G$, в которых экспоненциальное отображение имеет особенность).

4. Е. Салетан [96] изучал так называемое стягивание групп и алгебр Ли, рассматривавшееся впервые Инону и Вигнером (E. Jnonu, E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, 510—524). Примером может служить стягивание группы Лоренца в группу Галилея. Точное определение стягивания для алгебр Ли следующее. Пусть G — алгебра Ли, $\{e_i(t)\}$, $0 < t \leqslant 1$ — семейство баз в G, $c^i_{jk}(t)$ — структурные константы относительно базы $\{e_i(t)\}$. Может случиться, что существуют пределы

$$\lim_{t \to 0} c^i_{jk}(t) = c^i_{jk}(0).$$

Если это так, то числа $c^i_{jk}(0)$ являются структурными константами некоторой алгебры Ли G_0, не изоморфной, вообще говоря, алгебре G. Говорят, что алгебра G_0 получилась стягиванием алгебры G. В [96] рассмотрены семейства $\{e_i(t)\}$ следующего специального вида:

$$e_i(t) = te_i + (1-t)\,a^j_i e_j.$$

где $\{e_i\}$ — некоторая база в G, а матрица $A = (a^j_i)$ не зависит от t. Найдены условия существования предельной алгебры G_0 и вид операции коммутирования в ней. Рассмотрена также связь между линейными представлениями алгебр G и G_0.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Araki S.**, Differential Hopf algebras and the cohomology mod 3 of the compact exceptional groups E_7 and E_8. Ann. of Math., 1961, 73, 404—436 (РЖМат, 1962, 5А369)
2. —, Cohomology mod 2 of the compact exceptional groups E_6 and E_7. J. Math. Osaka City Univ., 1961, 12, 43—65; (РЖМат, 1963, 10А305)
3. —, Shikata Y., Cohomology mod 2 of the compact exceptional group E_8. Proc. Japan Acad., 1961, 37, 619—622 (РЖМат, 1963, 10А306)

4. **Auslander L.**, Discrete solvable matrix groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, 687—688 (РЖМат, 1961, 7А212)
5.—, Solvable Lie groups acting on nilmanifolds. Amer. J. Math., 1960, **82**, 653—660 (РЖМат, 1961, 10А338)
6.—, Fundamental groups of compact solvmanifolds. Amer. J. Math., 1960, **82**, 689—697 (РЖМат, 1961, 10А337)
7.—, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. Ann. Math., 1960, **71**, 579—590 (РЖМат, 1962, 10А159)
8.—, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. II. Amer. J. Math., 1961, **83**, 276—280 (РЖМат, 1962, 10А160)
9.— Discrete uniform subgroups of solvable Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **99**, 398—402 (РЖМат, 1962, 8А154)
10.— A characterization of discrete solvable matrix groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, **67**, 235—236 (РЖМат, 1962, 8А155)
11. —, Auslander M., Solvable Lie groups and locally Euclidean Riemann spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, 933—941 (РЖМат., 1960, 2268)
12. **Berger M.**, Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. Ann. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat., 1961, **15**, 179—246 (РЖМат, 1962, 10А240)
13. **Bernat P.**, Sur le corps des quotients de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris, 1962, **254**, 1712—1714 (РЖМат, 1962, 10А185)
14. **Borel A.**, On the curvature tensor of the hermitian symmetric manifolds. Ann Math., 1960, **71**, 508—521 (РЖМат, 1961, 3А448)
15.—, Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components, Ann. Math., 1960, **72**, 179—188 (РЖМат., 1962, 8А153)
16.—, Commutative subgroups and torsion in compact Lie groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1960, **66**, 285—288 (РЖМат, 1962, 5А367)
17.—, Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes. Tôhoku Math. J., 1961, **13**, 216—240 (РЖМат, 1963, 10А304)
18.—, Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, **67**, 579—583 (РЖМат, 1962, 8А200)
19. —, — Arithmetic subgroups of algebraic groups. Ann. Math., 1962, **75**, 485—535 (РЖМат, 1962, 11А186)
20. **Bruhat F.**, Algèbres de Lie et groupes de Lie. (Résumé des leçons). Recife. Inst. fis. e mat. Univ., 1959, 1—71 (РЖМат, 1961, 4А236)
21. **Bourbaki N.**, Eléments de mathématique, Fasc. XXVI. Groupes et algèbres de Lie. Chap. I. Algèbres de Lie. Paris, 1960, 1—144 (РЖМат, 1962, 10А189)
22. **Wang Hsien-Chung**, Some geometrical aspects of coset spaces of Lie groups. Proc. Internat. Congr. Mathematicians, Cambridge, 1960, 500—509 (РЖМат, 1961, 7А493)
23. **Васильев А. М.**, Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах. Изв. высших учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 41—49 (РЖМат, 1961, 4А401)
24. —, Инвариантные аффинные связности в однородных пространствах. Докл. АН СССР, 1960, **131**, 489—492 (РЖМат, 1961, 4А402)
25. —, Об одном классе ортогональных пар подгрупп группы $O(N)$. Мат. сб., 1960, **52**, 917—946 (РЖМат, 1961, 10А466)
26. —, C-связности в однородных пространствах и их вполне геодезические подмногообразия. Докл. АН СССР, 1961, **140**, 281—283 (РЖМат, 1962, 8А380)
27. **Weil A.**, On discrete subgroups of Lie groups, Ann. Math., 1960, **72**, 369—384 (РЖМат, 1961, 6А243); Сб. перев. Математика, 1963, 7 : 1, 3—18

28. **Weil A.**, On discrete subgroups of Lie groups. II. Ann. Math., 1962, **75**, 578—602 (РЖМат, 1963, 1А330); Сб. перев. Математика, 1963, 7 : 1, 19—41
29. **Винберг Э. Б.**, Инвариантные линейные связности в однородном пространстве. Тр. Моск. матем. об-ва, 1960, т. 9, 191—210 (РЖМат, 1961, 5А483)
30. —, Однородные конусы. Докл. АН СССР, 1960, **133**, 9—12 (РЖМат, 1961, 4Б548)
31. —, Теорема Морозова — Бореля для вещественных групп Ли. Докл. АН СССР, 1961, **141**, 270—273 (РЖМат, 1962, 10А162)
32. —, Выпуклые однородные области. Докл. АН СССР, 1961, **141**, 521—524 (РЖМат, 1963, 12А197)
33. —, Автоморфизмы однородных выпуклых конусов. Докл. АН СССР, 1962, **143**, 265—268.
34. —, Теория однородных выпуклых конусов. Тр. Моск. матем. об-ва, 1963, **12**, 303—358 (РЖМат, 1964, 1А248)
35. —, Гиндикин С. Г., Пятецкий-Шапиро И. И., О классификации и канонической реализации комплексных однородных ограниченных областей. Тр. Моск. матем. об-ва, 1963, **12**, 359—388 (РЖМат, 1964, 1А249)
36. **Wolf J. A.**, Sur la classification des variétés riemanniennes homogènes à courbure constante. C. r. Acad. Sci., Paris, 1960, **250**, 3443—3445 (РЖМат, 1961, 3А472)
37. —, Vincent's conjecture on Clifford translations of the sphere. Comment. Math. Helv., 1961, **36**, 33—41 (РЖМат., 1962, 11А370)
38. —, Homogeneous manifolds of constant curvature. Comment. Math. Helv., 1961, **36**, 112—147 (РЖМат, 1962, 8А381)
39. **Hermann R.**, Variational completeness for compact symmetric spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, 544—546 (РЖМат, 1961, 6А392)
40. **Graeub W.**, Liesche Gruppen und affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Acta Math., 1961, **106**, 65—111 (РЖМат, 1962, 9А347)
41. **Гу Чао-Хао**, О группах движений пространств с симплектической метрикой. Научн. докл. высш. школы, физ.-матем. н., 1959, 22—31 (РЖМат, 1961, 5А484)
42. **Гуревич Г. Б.**, Полухарактеристические и характеристические подалгебры стандартной нуль алгебры. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, Моск. ун-т, 1961, вып. 11, 25—41 (РЖМат, 1962, 4А252)
43. —, О некоторых свойствах метабелевых алгебр Ли. Докл. АН СССР, 1961, **138**, 998—1001 (РЖМат, 1961, 12А318)
44. —, О метабелевых алгебрах Ли. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, Моск. ун-т, 1963, вып. 12, 9—61.
45. **Jacobson N.**, Lie algebras, New - York — London, 1962, 1—331 (РЖМат, 1963, 5А298)
46. **Dixmier J.**, Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente. Arch. Math., 1959, **10**, 321—326 (РЖМат, 1961, 6А292)
47. **Залманович З. И.**, Алгебры Ли, нормализатор которых не имеет кратных весов. Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1960, вып. 7, 75—90 (РЖМат, 1962, 3А242)
48. **Singer J. M.**, Infinitesimally homogeneous spaces. Communs Pure and Appl. Math., 1960, **13**, 685—697 (РЖМат, 1962, 7А408)
49. **Iwahori N.**, On real irreducible representations of Lie algebras. Nagoya Math. J., 1959, **15**, 59—83 (РЖМат, 1961, 1А272)
50. **Calabi E.**, On compact Riemannian manifolds with constant curvature. I. Proc. Symp. Pure Math. III (Diff. Geometry), Providence, 1961, 155—180.
51. —, Vesentini E., Sur les variétés complexes compactes localement symétriques. Bull. Soc. math. France, 1959, **87**, 311—317 (РЖМат, 1961, 8А344)

52. **Calabi E.**, Vesentini E., On compact, locally symmetric Kähler manifolds. Ann. Math., 1960, **71**, 472—507 (РЖМат, 1961, 4А447); Сб. перев. Математик 1962, 6:2, 75—106
53. **Каменская М. М.**, Разрешимые стандартные алгебры Ли. II, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1961, № 1, 77—89 (РЖМат, 1961, 10А254)
54.—, Условия изоморфизма разрешимых стандартных алгебр Ли. Уч. зап. Калужск. гос. пед. ин-та, 1961, вып. 9, 71—81 (РЖМат, 1962, 9А157)
55. **Cartier P.**, On H. Weyl's character formula. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, **67**, 228—230 (РЖМат, 1961, 12А287); Сб. перев. Математика, 1962, 6:5, 139—141
56. **Koecher M.**, Analysis in reellen Jordan Algebren. Nachr. Wiss. Göttingen, 1958, **4**, 67—74 (РЖМат, 1959, 10887)
57.—, Die Geodätischen von Positivitätsbereichen. Math. Ann. 1958, **135**, 192—202 (РЖМат, 1961, 12А539)
58. **Kobayashi S.**, On automorphism groups of homogeneous complex manifolds. Proc. Amer. Meth. Soc., 1961, **12**, 359—361 (РЖМат, 1961, 12А420)
59. **Koszul J. L.**, Exposés sur les espaces homogènes symétriques. Publ. Soc. mat. São Paulo, São Paulo, 1959, 1—71 (РЖМат, 1962, 10А241)
60.—, Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines. Bull. Soc. math. France, 1961, **89**, 515—533 (РЖМат, 1963, 1А327)
61.—, Ouverts convexes des espaces affines. Math. Zeitschr., 1962, 79, 254—259.
62. **Kostant B.**, On holonomy and homogeneous spaces. Nagoya Math. J., 1957, **12**, 31—54 (РЖМат, 1961, 1А489)
63.—, A formula for the multiplicity of a weight. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, 53—73 (РЖМат, 1960, 8759); Сб. перев. Математика, 1962, 6:1, 133—152
64.—, The principal three - dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. Amer. J. Math., 1959, **81**, 973—1032 (РЖМат, 1961, 7А243)
65.—, A characterization of invariant affine connections. Nagoya Math. J., 1960, **16**, 35—50 (РЖМат, 1961, 4А475)
66. **Kuranishi M.**, On the local theory of continuous infinite pseudogroups. I. Nagoya Math. J., 1959, **15**, 225—260 (РЖМат, 1961, 4А230)
67.—, On the local theory of continuous infinite pseudogroups. II. Nagoya Math. J., 1961, **19**, 55—91 (РЖМат, 1963, 5А220)
68. **Leger G. F.**, A note on derivations of Lie algebras. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, 10—11 (РЖМат, 1961, 9А298)
69. **Мантуров О. В.**, Об однородных римановых несимметрических пространствах с неприводимой группой вращений. Докл. АН СССР, 1961, **141**, 792—795 (РЖМат, 1962, 8А373)
70.—, Римановы пространства с ортогональными и симплектическими группами движений и неприводимой группой вращений. Докл. АН СССР, 1961, 141, 1034—1037 (РЖМат, 1962, 8А372)
71. **Matsushima Y.**, Espaces homogenes de Stein des groupes de Lie complexes. Nagoya Math. J., 1960, **16**, 205—217 (РЖМат, 1961, 11А291)
72.—, Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes. II. Nagoya Math. J., 1961, **18**, 153—164 (РЖМат, 1962, 5А370)
73.—, Sur certaines variétés homogènes complexes. Nagoya Math J., 1961, **18**, 1—12 (РЖМат, 1962, 6А427)
74.—, Morimoto A., Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein. Bull. Soc. math. France, 1960, **88**, 137—155 (РЖМат, 1961, 11А290)
75. **Mostow G. D.**, On maximal subgroups of real Lie groups. Ann. Math., 1961, 74, 503—517 (РЖМат, 1962, 10А161)

76. **Nagasawa J.**, Group of motions in a Riemannian space. Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku, 1960, **A7**, 1—4 (РЖМат, 1961, 5А471)
77. **Nono T.**, Sur l'application exponentielle dans les groupes de Lie. J. Sci. Hiroshima Univ., 1960, **A23**, 311—324 (РЖМат, 1961, 4А224)
78. **Онищик А. Л.**, О транзитивных группах преобразований компактных однородных пространств. Докл. АН СССР, 1959, **124**, 520—523 (РЖМат, 1961, 10А335)
79. —, О включениях между транзитивными компактными группами преобразований. Докл. АН СССР, 1959, **129**, 261—264 (РЖМат, 1961, 10А336)
80. —, Комплексные оболочки компактных однородных пространств. Докл. АН СССР, 1960, **130**, 726—729 (РЖМат, 1960, 12623)
81. —, О кручении особых групп Ли. Мат. сб., 1960, **51**, 273—276 (РЖМат, 1961, 3А202)
82. —, О компактных группах Ли, транзитивных на некоторых многообразиях. Докл. АН СССР, 1960, **135**, 531—534 (РЖМат, 1962, 1А343)
83. —, Отношения включения между транзитивными компакт ными группами преобразований. Тр. Моск. матем. об-ва, 1962, т. 11, 199—242 (РЖМат, 1963, 2А325)
84. —, О транзитивных компактных группах преобразований. Мат. сб., 1963, **60**, 447—485 (РЖМат, 1963, 9А289)
85. **Palais R. S.**, A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. Amer. Math. Soc., 1957, № 22, 1—123 (РЖМат, 1961, 9А576)
86. **Пятецкий-Шапиро И. И.**, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. Москва, 1961 (РЖМат, 1963, 12Б217)
87. —, О классификации ограниченных однородных областей в n-мерном комплексном пространстве. Докл. АН СССР, 1961, **141**, № 2, 316—319
88. —, Об ограниченных однородных областях в n-мерном коплексном пространстве. Изв. АН СССР, сер. матем., 1962, **26**, 107—124 (РЖМат, 1962, 11А208)
89. —, Строение j-алгебр. Изв. АН СССР, сер. матем., 1962, **26**, 453—484 (РЖМат, 1962, 11А209)
90. **Rodrigues A. M.**, The first and second fundamental theorems of Lie for Lie pseudogroups, Amer. J. Math., 1962, 84, 265—282 (РЖМат, 1963, 5А221)
91. **Rothaus O. S.**, Domains of positivity. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1960, **24**, 189—235 (РЖМат, 1961, 12Б336)
92. —, The construction of homogeneous convex cones. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **79**, 248—250 (РЖМат, 1963, 12А198)
93. **Сабинин Л. В.**, О геометрии трисимметрических римановых пространств. Сибирск. матем. ж., 1961, **2**, 266—278 (РЖМат, 1962, 4А432)
94. **Saito M.**, Sur certains groupes résolubles. C. r. Acad. Sci., Paris, 1959, **248**, 1909—1911 (РЖМат, 1961; 10А339)
95. —, Sous-groupes discrets des groupes résolubles. Amer. J. Math., 1961, **83**, 369—392 (РЖМат, 1962, 8А298)
96. **Saletan E. J.**, Contraction of Lie groups. J. Math. Phys., 1961, **2**, 1—22 (РЖМат., 1963, 3А193)
97. **Samelson H.**, On curvature and characteristic of homogeneous spaces. Michigan Math. J., 1958, **5**, 13—18 (РЖМат, 1961, 1А446)
98. **Selberg A.**, On discontinuous groups in higherdimensional symmetric spaces. Contribs. Function Theory, Bombay, 1960, 147—164 (РЖМат, 1962, 3А332); Сб. перев. Математика, 1962, 6:3, 3—15
99. **Симония В. Т.**, Первая основная теорема в теории векторных инвариантов особой группы Ли G_2. Сообщ. АН ГрузССР, 1960, **24**, 641—648 (РЖМат, 1961, 6А242)
100. **Сирота А. И.**, Центры некомпактных простых групп Ли. Докл. АН СССР, 1960, **134**, 44—47 (РЖМат, 1961, 9А251)
101. —, Ядра линейных представлений некомпактных простых групп Ли. Докл. АН СССР, **134**, 540—543 (РЖМат, 1962, 8А156)

102. **Сирота А. И.**, Простые подгруппы односвязных вещественных простых групп Ли. Докл. АН СССР, 1961, **137**, 1063—1066 (РЖМат, 1962, 11А160)
103. **Sugiura M.**, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras. J. Math. Soc. Japan, 1959, **11**, 374—434 (РЖМат, 1961, 10А257)
104. **Супруненко Д. А.**, Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958, 1—94 (РЖМат, 1961, 7А253)
105.—, Условие полной приводимости разрешимой линейной группы. Докл. АН БССР, 1961, **5**, 321—323 (РЖМат, 1962, 4А187)
106.—, О приводимых матричных группах. Докл. АН БССР, 1961, **5**, 371—374 (РЖМат, 1962, 5А202)
107. **Tits J.**, Transitivité des groupes de mouvement. Schr. Forschungsinst. Math., 1957, **1**, 98—111 (РЖМат, 1961, 4А231)
108. —, Sur une classe de groupes de Lie résolubles. Bull. Soc. math. Belg., 1959, **11**, 100—115 (РЖМат, 1961, 9А253)
109. —, Sur une classe de groupes de Lie résolubles, corrections et additions. Bull. Soc. math. Belg., 1962, **14**, 196—209 (РЖМат, 1963, 2А205)
110. **Tôgô S.**, On the derivation algebras of Lie algebras. Canad. J. Math., 1961, **13**, 201—216 (РЖМат, 1961, 12А320)
111. **Тюрина Г. Н.**, О когомологиях комплексных однородных многообразий. Докл. АН СССР, 1960, **132**, 52—55 (РЖМат, 1961, 6А391)
112. **Феденко А. С.**, Симметрические пространства с простыми фундаментальными группами. Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1959, вып. 3, 3—25 (РЖМат, 1961, 2А334)
113. **Hano J. I.**, Kobayashi S., A fibering of a class of homogeneous complex manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, 233—243 (РЖМат, 1961, 3А510)
114. **Helgason S.**, Differential Geometry and Symmetric Spaces. New - York—London, 1962 (РЖМат, 1963, 8А379)
115. **Hertneck Ch.**, Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen. Math. Ann., 1962, **146**, 433—455 (РЖМат, 1963, 4А209)
116. **Hochschild G.**, Mostow G. D., Representations and representative functions of Lie groups. III. Ann. Math., 1959, **70**, 85—100 (РЖМат, 1961, 1А229)
117. **Cheng Chun-hu**, On the Cartan subalgebra of the real semi-simple Lie algebra. I. Sci. Rec., 1959, **3**, 214—219 (РЖМат, 1961, 1А271)
118.—, On the Cartan subalgebra of the real semi-simple Lie algebra. II. Sci. Rec., 1959, **3**, 220—224 (РЖМат, 1961, 10А256)
119. **Steinberg R.**, Finite reflection groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, 493—504 (РЖМат, 1961, 7А242)
120 —, A general Clebsch — Gordan theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, **67**, 406—407 (РЖМат, 1962, 8А218); Сб. перев. Математика, 1962, 6:5, 142—143
121. **Sternberg S.**, On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space. II. Amer. J. Math., 1958, **80**, 623—631 (РЖМат, 1959, 10174)
122.—, The structure of local homeomorphisms. III. Amer. J. Math., 1959, **81**, 578—604 (РЖМат, 1961, 10А331)
123.—, Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems. J. Math. and Mech., 1961, **10**, 451—474 (РЖМат, 1962, 6А178)