A. Yu. Popov, Approximations of the values of some infinite products,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1990, Number 6, 3–6

МАТЕМАТИКА

УДК 511.364

А. Ю. Попов

ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В последние два десятилетия появился ряд публикаций (см. [1—4]), в которых исследовались арифметические свойства значений целых функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям вида

$$P_1(J,\ z)f(z)=P_2(z), \tag{1}$$

где $P_1\in\mathbf{K}[x,\ z]$, $P_2\in\mathbf{K}[z]$, $\mathbf{K}$ — мнимое квадратичное поле, $\deg_z P_1=1$, J — оператор: $Jf(z)=f(az)$, $a\in\mathbf{K}$, $|a|>1$. При $P_1=x-z-1$ и $P_2\equiv 0$ уравнению (1) удовлетворяет функция

$$\varphi_a(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+za^{-n}),\ |a|>1.$$

В [1] Бундшу оценил разность между значениями таких функций в точках мнимого квадратичного поля и числами из этого же поля. Он доказал, что если $a=q_1/q_2$, $q_1,\ q_2\in Z$, $\gamma=\ln|q_2|/\ln|q_1|$, $3-7\gamma>0$, $\alpha\in\mathbf{K}$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq -a^m$, $m\in\mathbf{N}$, то при любом $\varepsilon>0$, $|Q|>Q_0(\varepsilon)$

$$|\varphi_a(\alpha)-P/Q|>|Q|^{-1-\varepsilon-4/(3-7\gamma)},\ P,\ Q\in\mathbf{Z_K}.$$

В [4] при $\gamma=0$ в этом неравенстве ε было заменено на убывающую функцию от Q, эквивалентную $(\ln|Q|)^{-1/2}$. Подчеркнем, что во всех упомянутых работах и число a, и аргументы функций, и приближающие числа лежали в каком-то одном мнимом квадратичном поле. Оказывается, что от этого ограничения можно отказаться.

Пусть $\beta\in\mathbf{A}$, $\deg\beta=s$, $\beta^{(1)}=\beta$, $\beta^{(2)},\dots,\beta^{(s)}$ — сопряженные числа β, b_s — коэффициент при z^s основного многочлена числа β. Положим

$$M(\beta)=b_s\prod_{j=1}^{s}\max(1,\ |\beta^{(j)}|).$$

Через $L(P)$ обозначим длину многочлена P, через $L(\beta)$, $\beta\in\mathbf{A}$, — длину основного многочлена числа β. Известно, что $M(\beta)\leqslant L(\beta)$.

Теорема. *Пусть* $a\in\mathbf{A}$, $|a|>1$, $\mathbf{Q}(a)\subset\mathbf{P}\subset\mathbf{A}$, $\deg\mathbf{P}=\nu$, $\delta=1$, *если* $\mathbf{P}\subset\mathbf{R}$, *и* $\delta=1/2$ *в противном случае;* $\lambda=\delta\nu\ln M(a)/(\deg a\ln|a|)$. *Пусть также* $\alpha\in\mathbf{P}$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq -a^m$, $m\in\mathbf{N}$. *Тогда если* $\lambda<7/4$ *, то* $\forall\zeta\in\mathbf{P}$

$$|\varphi_a(\alpha)-\zeta|>L^{-\frac{7\delta\nu}{(7-4\lambda)\deg\zeta}-c(\ln L)^{-1/2}},$$

где $L=\max(3,\ L(\zeta))$, $c=c(a,\ \alpha)$ — *некоторая эффективная постоянная.*

Замечание. Из теоремы следует, что $\varphi_a(\alpha)\in\overline{\mathbf{P}}$.

При $a\in\mathbf{K}$ эта теорема — результат Бундшу, в котором ε заменено на величину, эквивалентную $(\ln L)^{-1/2}$.

* Такие a, не лежащие в мнимых квадратичных полях, существуют. Если $\mathbf{P}=\mathbf{Q}(a)$, a — единица вещественного квадратичного поля, то $\lambda=1$.

Доказательство теоремы. Воспользуемся построенными автором в работе [4] линейными формами от чисел $\varphi_a(\alpha)$ и 1. В [4, с. 72] было доказано, что если $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq -a^m$, $m\in\mathbf{N}$,

$$\Lambda_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=|a|^{3n+1}}\varphi_a(\zeta)\,\zeta^{-n-1}\prod_{t=0}^{n}(\zeta-\alpha a^t)^{-1}(\zeta+a^{t+1})^{-1}\,d\zeta,$$

то при $n>n_0$

$$|\Lambda_n|=|a|^{-4{,}5n^2+O(n)},$$

$$\Lambda_n=\varphi_a(\alpha)\,T_n'+T_n'',\quad T_n'=\sum_{k=0}^{n}\delta_k,$$

где

$$\delta_k=\frac{(-1)^{n-k}\,a^{-3kn+k^2-2k+1}\,B_n^k(a)}{\alpha^{2n+1}\prod\limits_{t=1}^{n-k+1}(a^t+\alpha)\prod\limits_{t=1}^{n}(a^t-1)},$$

$$B_n^k(t)=\prod_{r=k+1}^{n}(t^r-1)\Big/\prod_{r=1}^{n-k}(t^r-1),$$

$$T_n''=a^{-(n+1)^2}\sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_n+\varkappa=n}\frac{a^{-(\varkappa(n+1)+\sum\limits_{t=1}^{n}t\sigma_t)}}{(-1)^{n-\varkappa}\,\alpha^{2n+1}\prod\limits_{t=1}^{\varkappa}(a^t-1)},$$

$$|T_n''|+|T_n'|\leqslant|a|^{-n^2+O(n)}.$$

Здесь и ниже все постоянные в символах O, как и постоянная n_0, эффективно зависят от a и α. Положим

$$\Omega_n=(a+\alpha)\prod_{t=1}^{n}(a^{t+1}+\alpha)(a^t-1),\quad \mathscr{L}_n=\Lambda_n\Omega_n.$$

Тогда

$$\mathscr{L}_n=\varphi_a(\alpha)\,A_n'+A_n'',\quad A_n'=\sum_{k=0}^{n}u_k,$$

$$u_k=\pm B_n^k(a)\,\alpha^{-2n-1}\,a^{-3kn+k^2-2k-1}\prod_{t=n+2-k}^{n+1}(\alpha+a^t),$$

$$A_n''=\prod_{t=0}^{n}(\alpha+a^{t+1})\sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_n+\varkappa=n}\pm\alpha^{\varkappa-2n-1}\,a^{-d(\sigma,\varkappa,n)}\prod_{t=\varkappa+1}^{n}(a^t-1),$$

$$d(\sigma,\ \varkappa,\ n)=\varkappa(n+1)+(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k\sigma_k,$$

$$|\mathscr{L}_n|=|a|^{-3{,}5n^2+O(n)},\tag{2}$$

$$|A_n'|+|A_n''|\leqslant|a|^{O(n)}.\tag{3}$$

Поскольку $(n+1)^2 \leqslant d(\sigma, \varkappa, n) \leqslant 2(n+1)^2$, а при $0 \leqslant k \leqslant n$ $B_n{}^k(a) \in \mathbf{Z}[a]$ (см. [4]) и $\deg_a B_n{}^k(a) \leqslant kn - k^2$, то ясно, что $A_n{}', A_n{}'' \in \mathbf{Z}[1/a, 1/\alpha]$,

$$\deg_{1/\alpha} A_n', \ A_n'' \leqslant 2n^2 + O(n),$$

$$\deg_{1/\alpha} A_n', \ A_n'' \leqslant 2n + 1.$$

Так как для любых полиномов P и Q $L(P+Q) \leqslant L(P) + L(Q)$, $L(PQ) \leqslant L(P)L(Q)$, то *

$$L(A_n') + L(A_n'') \leqslant 16^{n+1} = |a|^{O(a)}. \tag{4}$$

Пусть $\zeta \in \mathbf{P}$ и

$$\varphi_a(\alpha) = \zeta + \varepsilon, \ \mathscr{L}_n' = \zeta A_n' + A_n''. \tag{5}$$

Покажем, что ε не может быть слишком маленьким. Пусть $\tau \in \mathbf{N}$,

$$\omega_n = \exp(((7 - 4\lambda)(n^2 - \tau n) \deg \zeta / 2\delta\nu) \ln |a|). \tag{6}$$

Выберем такой номер $m = m(\zeta) \geqslant \tau$, что

$$\omega_{m-1} < L \leqslant \omega_m, \ L = \max(3, L(\zeta)). \tag{7}$$

(Это всегда возможно, ибо при $n \geqslant \tau$ ω_n строго возрастает и $\omega_\tau = 1$.) Допустим, что выполнено неравенство

$$|\varepsilon| < |a|^{-3,5m^2 - \tau m}. \tag{8}$$

При достаточно большом τ из (3), (5), (8) и (2) следует, что

$$|\mathscr{L}_m - \mathscr{L}_m'| < |\mathscr{L}_m|/2 \neq 0,$$

откуда

$$0 < \frac{1}{2}|\mathscr{L}_m| < |\mathscr{L}_m'| < \frac{3}{2}|\mathscr{L}_m|. \tag{9}$$

Так как $\mathscr{L}'_m$ отлично от нуля и является многочленом с целыми коэффициентами от алгебраических чисел $1/a$, $1/\alpha$ и ζ, то (см. доказательство теоремы 5.3 из [5]) $\mathscr{L}'_m$ «хорошо» оценивается снизу:

$$|\mathscr{L}_m'| > L^{-\nu}(\mathscr{L}_m') M^{-2\delta\nu m^2/\deg a + O(m)} (1/a) L^{-\delta\nu/\deg \zeta} L^{-(2m+1)\nu}(\alpha). \tag{10}$$

Из (10), (4), (7) и (6), учитывая, что $M(a) = M(1/a)$, находим

$$|\mathscr{L}_m'| > |a|^{-3,5m^2 - c_1 m + c_2 \tau m}, \tag{11}$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные, эффективно зависящие от a и α. Очевидно, что при большом τ неравенства (11), (9) и (2) несовместны, следовательно, τ в (8) эффективно ограничено, т. е. при $\tau > c_3$ имеем $|\varepsilon| \geqslant |a|^{-3,5m^2 - \tau m}$. Отсюда из (6) и (7) получаем утверждение теоремы.

---

* Число решений уравнения $x_1 + \ldots + x_m = n$ в целых неотрицательных числах x_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, есть C_{n+m-1}^n, а из рекуррентной формулы $B_{n-1}^{k-1}(a) + a^k B_{n-1}^k(a) = B_n^k(a)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $B_n^0(a) = B_n^n(a) = 1$ следует, что $L(B_n^k) \leqslant 2^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bundschuh P. Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen//Invent. math. 1970. 9. 175—184.
2. Stihl T. Irrationalitätsmasse für Werte der Lösungen einer Funktionalgleichung von Poincaré//Arch. Math. 1983. 41. 531—537.
3. Stihl T. Arithmetische Eigenschaften spezieller Heinescher Reihen//Math. Ann. 1984. 268. 21—41.
4. Попов А. Ю. Арифметические свойства значений некоторых бесконечных произведений//Диофантовы приближения. Ч. 2. М., 1986. 63—78.
5. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. М., 1981.

Поступила в редакцию
03.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 6

УДК 517.95

В. А. Чернятин

О СУЩЕСТВОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе на основе предложенного в [1; 2] нестандартного обоснования метода Фурье получены новые достаточные условия классической разрешимости смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(x)u(x, t) = f(x, t). \tag{1}$$

Их принципиальное отличие от уже известных [3, с. 86; 4, с. 471; 5, с. 381] состоит в отказе от любых требований гладкости к функции $f(x, t)$ по переменной x.

Ниже используются следующие обозначения:

$$\overline{G} = \{x \in [0, \pi]\},\ \overline{H} = \{t \in [0, T]\},\ \overline{H}^* = \{t \in [t^*, T]\},$$

$\overline{Q} = \overline{G} \times \overline{H}$, $\overline{Q}^* = \overline{G} \times \overline{H}^*$, $[A]$ — целая часть числа $A > 0$, $Q = \operatorname{int} \overline{Q}$.

1. Постановка задачи. Следуя [4, с. 471; 6, с. 181], рассмотрим смешанную задачу: найти функцию

$$u(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q}), \tag{2}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в области Q с вещественным потенциалом $q(x) \in C(\overline{G})$ и правой частью $f(x, t) \in C(\overline{Q})$, а также нулевым граничным и начальному условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = u(x, 0) = 0. \tag{3}$$

Искомое классическое решение $u(x, t)$ найдем с помощью метода Фурье разделения переменных x и t в виде ряда Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x) \tag{4}$$