Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 2. С. 59–67.

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

М. И. Русанова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
rusanova_mary94@mail.ru

Найдена равномерная асимптотика решения начальной задачи для уравнения $\varepsilon^2 u' = -u^2 + \varepsilon f(x)$, сингулярно зависящего от малого параметра ε. Уравнения такого вида являются уже хорошо изученными, но данное уравнение представляет собой неисследованный случай поведения правой части. Методом согласования построено трёхмасштабное асимптотическое разложение решения, проведено его обоснование методом верхнего и нижнего решения.

Ключевые слова: *асимптотическое разложение, малый параметр, начальная задача, метод согласования, промежуточное разложение, уравнение Риккати.*

Введение

В 1952 г. академиком А. Н. Тихоновым в работе [1] была рассмотрена сингулярная задача вида

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon), \quad x > 0, \\ u(0) = A, \end{cases}$$

в которой рассматривалось поведение решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. В области определения на функцию $f(x, u, \varepsilon)$ налагалось ограничение $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, 0) \neq 0$, т. е. $f \sim C \cdot u$ при $x \to 0$. Особенностью данной задачи является то, что для её решения не существует асимптотического разложения вида

$$u(x, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k u_k(x), \quad \varepsilon \to 0,$$

равномерного для всех $x \in [0, M]$, $M > 0$. Асимптотическое разложение решения данной задачи можно выписать лишь в виде двухмасштабного разложения, если использовать метод согласования [2], либо в виде более сложного ряда

$$u(x, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

с зависимостью самих асимптотических коэффициентов от малого параметра, если использовать метод введения погранслоя [3].

Позднее академик А. М. Ильин методом согласования рассмотрел более сложный случай [4, гл. 8] с уравнением вида $\varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon)$, где $f \sim x - u^2$ при $x \to 0$. (Отметим, что в случае, когда $f \sim x + u^2$ при $x \to 0$, происходит так называемый «дифференциальный взрыв» и область существования непродолжаемого решения сокращается до размеров порядка ε.) Начиная с этого случая в структуре асимптотического разложения появляется промежуточный слой между внешним и внутренним асимптотическими разложениями, т. е. разложение становится трёхмасштабным. Возникает закономерный вопрос, не появится ли четырёх- и более масштабное разложение при дальнейшем вырождении функции $f(x,u,\varepsilon)$ в правой части? Однако ответ пока неизвестен.

В работе О. Ю. Хачая [5] изучена асимптотика решения начальной задачи Коши с уравнением $\varepsilon u' = f(x,u)$, где $f(x,u) \sim x - u^k$, $k > 2$ — произвольное натуральное число. В ней доказано, что при любых таких k решение задачи имеет трёхмасштабную структуру.

А. М. Ильин и С. Ф. Долбеева в работе [6] исследовали поведение решения задачи Коши в случае, когда правая часть $f(x,u,\varepsilon)$ специального вида обращается в ноль на двух пересекающихся кривых, например, когда $f(x,u,\varepsilon) = (x-u)^2(x-2u)^2$.

В работе Ю. А. Крутовой [7] рассмотрен случай, когда правая часть уравнения $f(x,u,\varepsilon) \sim x^2 - u^2$ при $x \to 0$. Кажется более-менее ясным то, что в случае $f(x,u,\varepsilon) \sim x^k - u^2$ при $x \to 0$ и $k > 2$ асимптотическое разложение принципиальным образом не меняется. Поэтому в данной работе мы рассмотрим «предельный» случай, когда $f(x,u,\varepsilon) \sim -u^2$ при $x \to 0$. Для упрощения вычислений мы будем исследовать начальную задачу Коши в следующей формулировке:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u' = -u^2 + \varepsilon f(x), \\ u(0,\varepsilon) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(x) > 0$ при $x \geqslant 0$, $f \in C^\infty[0,+\infty)$. Из устойчивости по Ляпунову следует существование непрерывного решения рассматриваемой задачи на $[0,+\infty)$. Построенное асимптотическое разложение будет иметь ту же структуру асимптотики, что и в случае более общей правой части, имеющей заданное поведение вблизи нуля, однако в данной работе асимптотические коэффициенты будут построены в явном виде.

Отметим, что рассматриваемое уравнение представляет собой так называемое уравнение Риккати. Оно является одним из наиболее интересных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение Риккати встречается в различных областях математики (например, в алгебраической геометрии и в теории конформных отображений) и физики. К нему, в частности, сводится стационарное уравнение Шрёдингера (см., например, [8]). Оно также нередко возникает в прикладных математических задачах [9, введение].

1. Внешнее разложение

Будем строить асимптотическое разложение решения в виде формального ряда U по степеням малого параметра ε:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{1/2+3k/2} u_k(x).$$

Подставляя этот ряд в наше уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$\varepsilon : 0 = -u_0^2 + f(x)$,
$\varepsilon^{5/2} : u_0' = -2u_0 u_1$,
$\varepsilon^4 : u_1' = -u_1^2 - 2u_0 u_2$,
...

Из первого уравнения следует, что $u_0(x) = \pm\sqrt{f(x)}$, выберем $u_0(x) = \sqrt{f(x)}$. (На самом деле наш выбор определяется здесь знаком начального значения $u(0,\varepsilon)$.)

Из остальных уравнений легко последовательно найти все асимптотические коэффициенты. Например,

$$u_1(x) = -\frac{f'(x)}{4f(x)},$$

$$u_2(x) = -\frac{f''(x)}{8f^{3/2}(x)} - \frac{5}{32\sqrt{f(x)}}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Поскольку $f(x) > 0$, то делить на $f(x)$ можно. Однако очевидно, что начальное условие $u(0,\varepsilon) = 1$ не выполняется даже асимптотически, поэтому вблизи точки $x = 0$ требуется дополнительное внутреннее асимптотическое разложение.

2. Внутреннее разложение

Для построения внутреннего разложения введём «внутреннюю» переменную $\xi = x/\varepsilon^2$. Обозначим за $v(\xi,\varepsilon) = u(\varepsilon^2\xi,\varepsilon)$. В результате такой замены мы получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{d\xi} = -v^2(\xi) + \varepsilon f(\varepsilon^2\xi), \quad \xi > 0, \\ v(0,\varepsilon) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Внутреннее разложение будем искать в виде формального ряда

$$V = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi).$$

Для нахождения его коэффициентов подставим его в уравнение (2) и приравняем члены при одинаковых степенях ε, используя разложение в ряд Тейлора $f(\varepsilon^2\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\xi^k$.

При подстановке ряда V в начальное условие получим

$$v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots = 1,$$

откуда получаем следующие начальные условия:

$$v_0(0) = 1,\ v_1(0) = 0,\ v_2(0) = 0, \dots$$

Таким образом, коэффициенты внутреннего асимптотического разложения могут определяться из следующих начальных задач:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} v_0' = -v_0^2, \\ v_0(0) = 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} v_1' = -2v_0v_1 + f(0), \\ v_1(0) = 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} v_2' = -2v_0v_2 - v_1^2, \\ v_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$\dots$$

Отсюда можно последовательно найти

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi + 1},$$

$$v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3}\left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2}\right),$$

$$v_2(\xi) = -\frac{1}{9}\frac{f^2(0)}{(\xi+1)^2}\left(\frac{\xi^5}{5} + \xi^4 + 2\xi^3 - \xi - 1 - \frac{1}{\xi+1}\right)$$

и другие асимптотические коэффициенты внутреннего разложения.

3. Промежуточное разложение

Введём новую переменную $\eta = \varepsilon^{-3/2}x$ и функцию $w(\eta, \varepsilon) = u(\varepsilon^{3/2}x, \varepsilon)$. После такой замены получим следующее уравнение на функцию w:

$$\varepsilon^{1/2}\frac{dw}{d\eta} = -w^2 + \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta). \tag{3}$$

Будем искать промежуточное асимптотическое разложение в виде формального ряда

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(\eta). \tag{4}$$

Также разложим в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon^{3/2}\eta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{3k/2}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\eta^k$.

Подставим данные ряды в уравнение (3):

$$\varepsilon^{1/2}(w_0' + \varepsilon^{1/2}w_1' + \ldots) = -(w_0 + \varepsilon^{1/2}w_1 + \ldots)^2 + \varepsilon f(0) + \varepsilon^{3/2}f'(0)\eta + \ldots,$$

а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующие уравнения:

$\varepsilon^0 : 0 = -w_0^2$, отсюда $w_0 \equiv 0$ и, следовательно, промежуточное разложение, как и внешнее, не удовлетворяет начальному условию;

$\varepsilon^{1/2} : w_0' = -2w_0w_1$ тождественно выполняется;

$\varepsilon^1 : w_1' = -w_1^2 - 2w_0w_2 + f(0)$.

Несмотря на то что последнее уравнение является уравнением Риккати, в данном случае несложно найти его два решения: $w_1(\eta) = \sqrt{f(0)}\,\mathrm{cth}(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))$ или $w_1(\eta) = \sqrt{f(0)}\,\mathrm{th}(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))$, где C_1 — произвольная постоянная. Выберем в качестве функции w_1 первое решение, в противном случае нам не удастся произвести в последующем процесс согласования.

$\varepsilon^{3/2} : w_2' = -2w_0w_3 - 2w_1w_2$.

Отсюда $w_2(\eta) = C_2\big(\mathrm{cth}^2(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1) - 1\big)$.

$\varepsilon^2 : w_3' = -2w_0w_4 - 2w_1w_3 - w_2^2$.

Следовательно,

$$w_3(\eta) = \frac{C_3}{\mathrm{sh}^2(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))} + \frac{C_2^2\exp(-\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))}{\sqrt{f(0)}\cdot \mathrm{sh}^3(\sqrt{f(0)}(\eta + C_1))}.$$

Продолжая данный процесс, можно последовательно определить все функции $w_k(\eta)$ из ряда (4). Отметим, что на каждом шаге при определении очередной функции $w_k(\eta)$ появляется новая неопределённая постоянная C_k, которую можно определить из условия согласования асимптотических рядов, что мы и сделаем в следующем пункте.

4. Согласование

В соответствии с условиями согласования для любых l, m, n должны быть выполнены следующие равенства:

$$A_{l,\xi}A_{m,\eta}W = A_{m,\eta}A_{l,\xi}V, \qquad A_{m,\eta}A_{n,x}U = A_{n,x}A_{m,\eta}W,$$

где через $A_{n,x}$ обозначается оператор взятия частичной суммы ряда, записанной от переменной x и содержащей степени ε с показателем до n включительно [2, введение].

Для определения постоянных C_k достаточно провести согласование только V и W. Следить за согласованием асимптотических рядов удобно используя специальную таблицу согласования:

$W \backslash V$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\ldots$
$\varepsilon^{1/2}w_1(\eta)$	ξ^{-1}	$\varepsilon\xi f(0)/3$	$-\varepsilon^2\xi^3 f^2(0)/45$	$\ldots$
	$\varepsilon^{1/2}\eta^{-1}$	$\varepsilon^{1/2}\eta f(0)/3$	$\varepsilon^{1/2}\eta^3 f^2(0)/45$	$\ldots$
$\varepsilon w_2(\eta)$	$-\xi^{-2}$	$\varepsilon\xi f(0)/3$	$-\varepsilon^2\xi^2 f^2(0)/15$	$\ldots$
	$\varepsilon\eta^{-2}C_2/f(0)$	$-\varepsilon C_2/3$	$\varepsilon\eta^2 C_2 f(0)/15$	$\ldots$
$\varepsilon^{3/2}w_3(\eta)$	ξ^{-3}	0	$\varepsilon^2\xi f^2(0)/15$	$\ldots$
	$\varepsilon^{3/2}\eta^{-3}C_2^2 f^{-2}(0)$	0	$-\varepsilon^{3/2}\eta C_2^2/15$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Таблица устроена стандартным образом [2, гл. 5]. В верхних и нижних частях клеток стоят равные функции с учётом замены переменой $\xi = \varepsilon^{1/2}\eta$. В столбцы этой таблицы записаны разложения коэффициентов внутреннего разложения $v_i(\xi)$ при $\xi \to +\infty$, а строки — разложения коэффициентов промежуточного разложения $w_j(\eta)$ при $\eta \to 0$. Таким образом определяются $C_1 = 0$, $C_2 = -f(0)$, $C_3 = f^{3/2}(0)$ и т. д. Отсюда

$$w_1(\eta) = \sqrt{f(0)}\,\mathrm{cth}(\sqrt{f(0)}\cdot\eta),$$

$$w_2(\eta) = -\frac{f(0)}{\mathrm{sh}^2(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)},$$

$$w_3(\eta) = f^{3/2}(0)\frac{\mathrm{ch}(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)}{\mathrm{sh}^3(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)}.$$

На этом построение формального асимптотического разложения закончено.

5. Обоснование

Воспользуемся методом нижнего и верхнего решения, описанным, например, в [3]. Обоснование проведём только для двух членов асимптотики, для большего числа его можно провести аналогично. Рассмотрим произвольную начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = 0, \quad x \in I = (x_0, x_1), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{5}$$

где $f \in C(I)$, и введём два определения.

Определение 1. Функцию $\underline{Y}$, имеющую свойства:
1) $\underline{Y}(0) \leqslant y_0$,

2) $\dfrac{d\underline{Y}}{dx} - f(x, \underline{Y}) \leqslant 0$ при $x \in I$,
назовём *нижним решением* начальной задачи (5).

Определение 2. Функцию $\overline{Y}$, имеющую свойства:
1) $\overline{Y}(0) \geqslant y_0$,

2) $\dfrac{d\overline{Y}}{dx} - f(x, \overline{Y}) \geqslant 0$ при $x \in I$,
назовём *верхним решением* начальной задачи (5).

Как известно (см. [10, гл. IV, § 1]), из существования нижнего и верхнего решения следует существование единственного решения $y(x)$ задачи (5), при этом

$$\underline{Y}(x) \leqslant y(x) \leqslant \overline{Y}(x) \text{ при } x \in I.$$

Пусть функция $u(x,\varepsilon) \equiv v(\xi,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1/2} w(\eta,\varepsilon)$ является точным решением задачи (1) (или в других переменных — задачи (2)). Обозначим через $V_2 = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$. В качестве нижнего решения задачи (2) возьмём $\underline{V} = V_2 - A\varepsilon^{5/4}$. Тогда
1) $\underline{V}(0,\varepsilon) = v_0(0) + \varepsilon v_1(0) - A\varepsilon^{5/4} = 1 - A\varepsilon^{5/4} \leqslant 1 = v(0,\varepsilon)$, где $v(\xi,\varepsilon)$ — точное решение задачи (2),

2) $$\frac{d\underline{V}}{d\xi} - \underline{V}^2 + \varepsilon f(\varepsilon^2 \xi) = -\frac{2A\varepsilon^{5/4}}{\xi+1} + \frac{1}{9} f^2(0)\left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)}\right)^2 \varepsilon^2 - {}$$
$$- \frac{2}{3} f(0)\left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)}\right) A\varepsilon^{9/4} + A^2\varepsilon^{5/2} + O(\varepsilon^3 \xi).$$

Следовательно, при достаточно большом $A > 0$ и достаточно малом, выбранном по A, параметре ε на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция $\underline{V}$ действительно является нижним решением задачи (2).

В качестве верхнего решения возьмём функцию $\overline{V} = V_2 + A\varepsilon^{5/4}$. Аналогично при достаточно большом A и достаточно малом ε на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция $\overline{V}$ действительно является верхним решением задачи (2).

Таким образом, мы доказали, что $|v(\xi,\varepsilon) - V_2| = O(\varepsilon^{5/4})$ при $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ или, с учётом замены $\eta = \varepsilon^{1/2}\xi$, при $\eta \in [0, \varepsilon^{1/4}]$.

Обозначим через $W_2 = \varepsilon^{1/2} w_1(\eta) + \varepsilon w_2(\eta)$. В качестве нижнего решения возьмём функцию $\underline{W} = W_2 - B\varepsilon^{5/4}/\operatorname{sh}(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)$. Тогда при достаточно большом B и затем выбранном по нему достаточно малом ε выполняются неравенства:

1) $$\underline{W}(\varepsilon^{1/4},\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon w_1(\varepsilon^{1/4}) - \frac{B\varepsilon^{5/4}}{\operatorname{sh}(\sqrt{f(0)}\cdot\varepsilon^{1/4})} =$$
$$= \varepsilon^{1/2}\left(\varepsilon^{-1/4} + \frac{f(0)}{3}\varepsilon^{1/4} + O(\varepsilon^{3/4})\right) + \varepsilon\left(\varepsilon^{-1/2} + \frac{f(0)}{3} + O(\varepsilon^{1/2})\right) -$$
$$- \frac{B\varepsilon^{5/4}}{\sqrt{f(0)}\cdot\varepsilon^{1/4} + O(\varepsilon^{3/4})} \leqslant \underline{V}\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1/4}} \leqslant w(\varepsilon^{1/4},\varepsilon),$$

2) $$\varepsilon^{1/2}\frac{d\underline{W}}{d\eta} + \underline{W}^2 - \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta) = -B\sqrt{f(0)}\frac{\operatorname{ch}(\eta\sqrt{f(0)})}{\operatorname{sh}^2(\eta\sqrt{f(0)})}\cdot\varepsilon^{7/4} + \frac{f^2(0)}{\operatorname{sh}^4(\eta\sqrt{f(0)})}\varepsilon^2 +$$
$$+ \frac{2f(0)B\varepsilon^{9/4}}{\operatorname{sh}^3(\eta\sqrt{f(0)})} + \frac{B^2\varepsilon^{5/2}}{\operatorname{sh}^2(\eta\sqrt{f(0)})} + O(\varepsilon^2\eta) \leqslant 0 \text{ при } \eta \leqslant \varepsilon^{1/4}.$$

Следовательно, при $\eta \in [\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{-5/4}]$ или, что то же самое, при $x \in [\varepsilon^{7/4}, \varepsilon^{1/4}]$ функция $\underline{W}$ является нижним решением задачи (1) с учётом замены переменных. Совершенно аналогично можно доказать, что $\underline{W} = W_2 + B\varepsilon^{5/4}/\operatorname{sh}(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)$ является верхним решением задачи (1) на отрезке $x \in [\varepsilon^{7/4}, \varepsilon^{1/4}]$.

На оставшемся участке $x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty)$ в качестве нижнего решения возьмём $\underline{U} = u_0(x) - C\cdot\varepsilon^{5/8}$. Тогда при достаточно большом параметре C, а затем выбранном по нему достаточно малом ε будут выполняться неравенства:

1) $\underline{U}(\varepsilon^{1/4},\varepsilon) = u_0(\varepsilon^{1/4}) - C\cdot\varepsilon^{5/8} = \varepsilon^{1/2}(\sqrt{f(0)} + O(\varepsilon^{1/4})) - C\cdot\varepsilon^{5/8} \leqslant \underline{W}(\varepsilon^{-5/4},\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{f(0)} + O(\exp(-\varepsilon^{-5/4})) \leqslant u(\varepsilon^{1/4},\varepsilon)$,

2) $\varepsilon^2\dfrac{d\underline{U}}{dx} + \underline{U}^2 - \varepsilon f(x) = -2C\sqrt{f(x)}\cdot\varepsilon^{9/8} + C^2\varepsilon^{5/4} + \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\varepsilon^{5/4} \leqslant 0$ при достаточно малом ε и не слишком большом x (в зависимости от функции $f(x)$). Иначе говоря, второе неравенство выполняется на промежутке $x\in[\varepsilon^{1/4}, F[f](\varepsilon)]$, где F — некоторый оператор, причём функция $F[f](\varepsilon)\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Аналогично можно построить верхнее решение вида $\underline{U} = u_0(x) + C\cdot\varepsilon^{5/8}$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Решение начальной задачи* (1) *существует и удовлетворяет следующему асимптотическому равенству:*

$$u(x,\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{=} \begin{cases} v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + O(\varepsilon^{5/4}) \text{ при } x\in[0,\varepsilon^{7/4}], \\ \varepsilon^{1/2}w_1(\eta) + \varepsilon w_2(\eta) + O\left(\dfrac{\varepsilon^{5/4}}{\operatorname{sh}(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)}\right) \text{ при } x\in[\varepsilon^{7/4},\varepsilon^{1/4}], \\ \varepsilon^{1/2}u_0(x) + O(\varepsilon^{5/8}) \text{ при } x\in[\varepsilon^{1/4}, F[f](\varepsilon)], \end{cases}$$

где $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon^2}$, $\eta = \dfrac{x}{\varepsilon^{3/2}}$,

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi+1}\,,$$

$$v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3}\left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2}\right),$$

$$w_1(\eta) = \sqrt{f(0)}\operatorname{cth}(\sqrt{f(0)}\cdot\eta),$$

$$w_2(\eta) = -\frac{f(0)}{\operatorname{sh}^2(\sqrt{f(0)}\cdot\eta)},$$

$$u_0(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Автор благодарит А. А. Ершова за постановку задачи и полезные обсуждения работы.

Список литературы

1. **Тихонов, А. Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // Мат. сб. — 1952. — Т. 31 (73), № 3. — С. 575–586.
2. **Ильин, А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 336 с.
3. **Васильева, А. Б.** Контрастные структуры в сингулярно возмущённых задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов. // Фундамент. и приклад. математика. — 1998. — Т. 4, № 3. — С. 799–851.
4. **Ильин, А. М.** Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : Физматлит, 2009. — 248 с.
5. **Хачай, О. Ю.** Асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно возмущённого обыкновенного дифференциального уравнения / О. Ю. Хачай // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 270–272.
6. **Ильин, А. М.** Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения / А. М. Ильин, С. Ф. Долбеева // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 98—108.

7. **Крутова, Ю. А.** Асимптотика решения одной нелинейной задачи Коши // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 1. — С. 43–51.
8. **Цапенко, Н. Е.** Уравнение Риккати и волновые процессы / Н. Е. Цапенко. — М. : Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2008. — 244 с.
9. **Егоров, А. И.** Уравнения Риккати / А. И. Егоров. — М. : Физматлит, 2001. — 320 с.
10. **Чаплыгин, С. А.** Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1950. — 102 с.

Поступила в редакцию 01.05.2016
После переработки 12.06.2016

Сведения об авторе

Русанова Мария Игоревна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: rusanova_mary94@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 59–67.

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF THE RICCATI EQUATION

M.I. Rusanova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
rusanova_mary94@mail.ru

Uniform asymptotics is found for a solution of the initial value problem to the equation $\varepsilon^2 u' = -u^2 + \varepsilon f(x)$, singularly depending on a small parameter ε. Equations of this type are already well studied, but this equation represents an unexplored case of the right-hand side behavior. By the method of asymptotics matching the three-scale asymptotic expansion for a solution is constructed and is justificated by the method of upper and lower solutions.

Keywords: *asymptotic expansion, small parameter, initial value problem, asymptotics matching method, intermediate expansion, Riccati equation.*

References

1. **Tikhonov A.N.** Sistemy differentsial'nykh uravneniy, soderzhashchikh malye parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at derivatives]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1952, vol. 31 (73), no. 3, pp. 575–586. (In Russ.).
2. **Il'in A.M.** Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems, transl. Math. Monogr. 102, AMS, Providence, RI, 1992. 279 p.
3. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.** Kontrastnye struktury v singulyarno vozmushchyonnykh zadachakh [Contrast structures in singularly perturbed problems]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics], 1998, vol. 4, no. 3, pp. 799–851. (In Russ.).
4. **Il'in A.M., Danilin A.R.** Asimptoticheskie metody v analize [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (In Russ.).
5. **Khachay O.Yu.** Asymptotic expansion of the solution of the initial value problem for a singularly perturbed ordinary differential equation. *Differential equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 282–285.

6. **Il'in A.M., Dolbeeva S.F.** Asymptotics of the solution to a differential equation with a small parameter in the case of two limit solutions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 253, suppl. 1, pp. 105–116.
7. **Krutova Yu.A.** Asimptotika resheniya odnoy nelineynoy zadachi Koshi [Asymptotics of the solution of a nonlinear Cauchy problem]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk physical and mathematical journal], 2016, vol. 1, iss. 1, pp. 43–51. (In Russ.).
8. **Tsapenko N.E.** Uravnenie Rikkati i volnovye protsessy [The Riccati equation and wave processes]. Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 2008. 244 p. (In Russ.).
9. **Egorov A.I.** Uravneniya Rikkati [Riccati equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 320 p. (In Russ.).
10. **Chaplygin S.A.** Novyy metod priblizhyonnogo integrirovaniya differentsial'nykh uravneniy [New method of approximate integration of differential equations]. Moscow, 1950. 102 p.

Accepted article received 01.05.2016
Corrections received 12.06.2016