Д. А. Бредихин, О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 29–41

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 519.4

О КВАЗИТОЖДЕСТВАХ АЛГЕБР ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Д. А. Бредихин

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Теория алгебр отношений берет свое начало в исследованиях Де Моргана, Пирса и Фреге, систематизированных Шредером в третьем томе своей «Алгебры и логики» [1]. Новый этап в развитии теории алгебр отношений связан с именем Тарского. Им был предложен аксиоматический подход к исследованию алгебр отношений и сформулирован ряд проблем, во многом определивших дальнейшее развитие теории (см. [2, 3]).

Рассмотрение алгебр отношений в рамках аксиоматического подхода предполагает изучение их свойств, выразимых на языке логики первого порядка и, в частности, на языке квазитождеств, что естественно приводит к проблемам описания квазиэквациональных теорий различных классов алгебр отношений и нахождения их базисов квазитождеств. Особая роль квазитождеств при изучении алгебр отношений определяется тем обстоятельством, что абстрактные замыкания многих важных классов алгебр отношений образуют квазимногообразия, и в этом случае проблема базиса становится эквивалентной одной из центральных в теории алгебр отношений задач — отыскания элементарной характеристики (системы элементарных аксиом) этих классов.

Рассмотрению квазитождеств различных классов алгебр отношений посвящены многочисленные исследования (см. обзоры [4–6]). При этом, как правило, в каждом случае используется техника, учитывающая специфику того или иного из рассматриваемых классов. Поэтому вполне естественной представляется попытка создания некоторого «индустриального» метода решения упомянутых выше проблем. Основная цель настоящей работы — создание такого метода для классов алгебр отношений с так называемыми диофантовыми операциями. Будут описаны квазиэквациональные теории этих классов и построены базисы их квазитождеств. К числу диофантовых принадлежат многие из операций, традиционно рассматриваемых над отношениями, что открывает перспективы приложения полученных результатов для изучения конкретных классов алгебр отношений. Не имея возможности в рамках данной работы подробно остановиться на этом вопросе, отметим лишь, что они позволяют получить в качестве следствий ряд результатов из [7–12], а также решить некоторые из проблем, поставленных в [5, 7] (см. соответствующие работы автора [13, 14]).

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 приведены определения основных используемых в работе понятий, § 2 посвящен формулировке основных результатов, а § 3 — их доказательству.

§ 1. Основные определения

Общие понятия и факты универсальной алгебры [15] и, в частности, теории квазимногообразий алгебраических систем предполагаются известными (см., например, [16]). В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $[m, n] = \{k \in \mathbb{N}^0 : m \leqslant k \leqslant n\}$.

Пусть $\mathrm{Rel}(U)$ — множество всех бинарных отношений, заданных на U. Всякая формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_n)$ исчисления предикатов первого порядка, содержащая две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1 и бинарные предикатные символы $r_1, \ldots, r_m$, определяет операцию F_φ на множестве $\mathrm{Rel}(U)$, задаваемую следующим образом:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in V \times V : \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $R_1, \ldots, R_m \in \mathrm{Rel}(U)$ и запись $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ выполняется при интерпретации z_0, z_1 как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ как $R_1, \ldots, R_m$.

Формула φ называется *диофантовой* [17] (в другой терминологии — примитивно-позитивной [18]), если она содержит в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Операции над отношениями, задаваемые с помощью диофантовых формул, будем называть *диофантовыми*. К числу диофантовых, например, принадлежат операции умножения $\circ$, обращения $^{-1}$ и пересечения $\cap$ отношений.

Множество отношений $\Phi \subset \mathrm{Rel}(U)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Алгебру отношений назовем *диофантовой*, если таковыми являются все ее операции. Нетрудно заметить, что отношение теоретико-множественного включения $\subset$ стабильно относительно диофантовых операций и, следовательно, всякая диофантова алгебра отношений (Φ, Ω) может быть рассмотрена как упорядоченная отношением включения $\subset$. (Под упорядоченной алгеброй мы понимаем алгебраическую систему $(A, \Omega, \leqslant)$, где $\leqslant$ — отношение порядка, стабильное относительно всех операций из Ω.)

Обозначим через $R\{\Omega\}$ (через $R\{\Omega, \subset\}$) класс всех алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с множеством операций Ω. Пусть $QR\{\Omega\}$ (соответственно $QR\{\Omega, \subset\}$) — квазимногообразие и $VR\{\Omega\}$ (соответственно $VR\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ (классом $R\{\Omega, \subset\}$), $Qeq\{\Omega\}$ ($Qeq\{\Omega, \subset\}$) и $Eq\{\Omega\}$ ($Eq\{\Omega, \subset\}$) — его квазиэквациональные и эквациональные теории.

Удобным способом описания диофантовых операций над отношениями является предложенное в [6, 10, 19] представление их с помощью графов. *Графом* (точнее, помеченным ориентированным графом) мы будем называть пару $G = (V, E)$, где $V = V(G)$ — множество, называемое *множеством вершин*, и $E = E(G) \subset V \times \mathbb{N} \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть *ребром с меткой* k, соединяющим вершину u с вершиной v, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Множество $\mathrm{Lab}(G) = \{k : (\exists u, v)(u, k, v) \in E\}$ назовем *множеством меток графа* G.

Двухполюсником назовем граф G с двумя выделенными вершинами $\mathrm{in}\, G$ и $\mathrm{out}\, G$, называемыми соответственно *входом* и *выходом* этого двухполюсника. Двухполюсник G с входом $i = \mathrm{in}\, G$ и выходом $o = \mathrm{out}\, G$ будем в дальнейшем также обозначать через $G^{(i,o)}$ или (V, E, i, o). Двухполюсник назовем *конечным*, если конечными являются множества его вершин и ребер.

Всякий двухполюсник G задает диофантову формулу $\varphi(G)$ с двумя свободными переменными z_0 и z_1, определяемую следующим образом:

$$\varphi(G) = (\exists z_2, \ldots, z_m) \bigwedge_{(u_i,k,v_j)\in E(G)} r_k(z_i, z_j),$$

где $V(G) = \{v_0, \ldots, v_m\}$ и $\operatorname{in} G = v_0$, $\operatorname{out} G = v_1$.

Обратно, всякая диофантова формула φ, содержащая две свободные переменные z_0 и z_1, задает двухполюсник $G = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество индексов индивидуальных переменных формулы φ; $\operatorname{in} G = 0$, $\operatorname{out} G = 1$, $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в запись формулы φ.

Таким образом, всякий двухполюсник G задает диофантову операцию $F_G = F_{\varphi(G)}$, и, обратно, всякая диофантова операция F_φ может быть задана с помощью двухполюсника $G(\varphi)$, соответствующего формуле φ. Например, операции умножения $\circ$ и обращения $^{-1}$ отношения задаются с помощью следующих двухполюсников:

$$\operatorname{in} G\cdot \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot \operatorname{out} G; \quad \operatorname{in} G\cdot \xleftarrow{1} \cdot \operatorname{out} G.$$

Дадим ряд дополнительных определений, связанных с понятием двухполюсника. Отображение $f : V(G) \to V(G')$ называется *гомоморфизмом* двухполюсника G в двухполюсник G', если $(f(u), k, f(v)) \in E(G')$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E(G)$ и $f(\operatorname{in} G) = \operatorname{in} G'$, $f(\operatorname{out} G) = \operatorname{out} G'$. Будем писать $G' \prec G$, если существует гомоморфизм G в G', и $G' \equiv G$, если $G' \prec G$ и $G \prec G'$.

Взаимно однозначный гомоморфизм $f : V(G) \to V(G')$ называется *изоморфизмом* двухполюсников, если обратное к нему отображение f^{-1} является гомоморфизмом G' в G. Заметим, что диофантовы формулы, задаваемые изоморфными двухполюсниками, эквивалентны и, следовательно, задают одну и ту же операцию над отношениями. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать двухполюсники с точностью до изоморфизма, в частности, для любой системы двухполюсников всегда можно предполагать, что множества их вершин попарно не пересекаются.

Будем говорить, что двухполюсник G' является *поддвухполюсником* двухполюсника G и писать $G' \subset G$, если существует взаимно однозначный гомоморфизм G' в G.

Всякое отображение $f : V(G) \to U$ индуцирует на множестве U структуру двухполюсника $f(G) = (U, f(E), f(\operatorname{in} G), f(\operatorname{out} G))$, где $f(E) = \{(f(u), k, f(v)) : (u, k, v) \in V(G)\}$. В том случае, если $f(w) = w$ для всякого $w \in V(G) \setminus \{u\}$ и $f(u) = v$, будем говорить, что двухполюсник $f(G)$ получен из двухполюсника G посредством *отождествления* вершины u с вершиной v.

Пусть G и G' — двухполюсники, $V(G) \cap V(G') = \varnothing$ и u, $v \in V(G)$. Обозначим через $G[u, v, G']$ двухполюсник, полученный из двухполюсника $(V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G'), \operatorname{in} G, \operatorname{out} G)$ отождествлением вершины $\operatorname{in} G'$ с вершиной u и вершины $\operatorname{out} G'$ с вершиной v. Двухполюсник $G[u, v, G']$ фактически получен из двухполюсника G «приклеиванием» к его вершинам u и v двухполюсника G'.

Будем говорить, что двухполюсник

$$G \setminus (u, k, v) = (V(G), E(G) \setminus (u, k, v), \operatorname{in} G, \operatorname{out} G)$$

получен из двухполюсника G *удалением* его ребра (u, k, v).

Пусть G и G_k $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники и $\operatorname{Lab}(G) \subset [1, \ldots, m]$. *Композицией* $G(G_1, \ldots, G_m)$ назовем двухполюсник, полученный из двухполюсника G заменой всякого его ребра с метками k двухполюсником G_k. Более формально композиция может быть определена следующим образом. Сопоставим всякому ребру $(u,k,v) \in E(G)$ изоморфную копию $G_{(u,k,v)}$ двухполюсника G_k так, что множества вершин двухполюсников $G_{(u,k,v)}$ и G попарно не пересекаются. Тогда композиция $G(G_1,\ldots,G_m)$ представляет собой двухполюсник, полученный из двухполюсника $(V(G) \cup \{V(G_{(u,k,v)}) : (u,k,v) \in E(G)\}, \cup\{E(G_{(u,k,v)}) : (u,k,v) \in E(G)\}, \operatorname{in} G, \operatorname{out} G)$ отождествлением вершин $\operatorname{in} G_{(u,k,v)}$ с вершиной u и вершин $\operatorname{out} G_{(u,k,v)}$ с вершиной v. Композицию $G(G_1,\ldots,G_m)$ будем также обозначать через $G(\overrightarrow{G})$, где $\overrightarrow{G} = (G_1,\ldots,G_m)$.

§ 2. Формулировка основных результатов

Фиксируем класс $R\{\Omega\}$ диофантовых алгебр отношений некоторого типа $\tau = \{n_j\}_{j\in J}$ с множеством операций $\Omega = (F_j)_{j\in J}$, задаваемых с помощью системы двухполюсников $\{G^j\}_{j\in J}$. Единственным ограничением, накладываемым на систему двухполюсников $\{G^j\}_{j\in J}$, является следующее: для каждого двухполюсника G^j различные его ребра имеют различные метки.

Обозначим через $\mathbb{P}$ множество всех термов с функциональными символами f_j арности n_j $(j \in J)$ и переменными x_k $(k \in \mathbb{N})$. Всякому терму $p \in \mathbb{P}$ сопоставим двухполюсник $G(p)$ посредством следующей индуктивной процедуры: переменной x_k сопоставим двухполюсник $(0\cdot \xrightarrow{k} \cdot 1, 0, 1)$; терму $f_j(p_1,\ldots,p_{n_j})$ — композицию двухполюсников $G^j(G(p_1),\ldots,G(p_{n_j}))$.

Описание квазиэквациональных теорий $Qeq\{\Omega\}$ и $Qeq\{\Omega \subset\}$ классов $R\{\Omega\}$ и $R\{\Omega,\subset\}$ будет основано на специальным образом построенной дедуктивной системе — исчислении двухполюсников $\mathcal{LD}$. Предложениями $\mathcal{LD}$ являются формальные выражения вида $G_1 \Rightarrow G_2$, где G_1 и G_2 — конечные двухполюсники. Предложение $G_1 \Rightarrow G_2$ является аксиомой $\mathcal{LD}$ в одном из следующих случаев:

(A1) $G_1 = G_2$;

(A2) G_1 получен из G_2 отождествлением двух его вершин;

(A3) G_2 получен из G_1 удалением некоторого его ребра.

Правила вывода для $\mathcal{LD}$ задаются следующим образом:

$$\frac{G_1 \Rightarrow G_2,\ G_2 \Rightarrow G_3}{G_1 \Rightarrow G_3}, \tag{R1}$$

$$\frac{G_1 \Rightarrow G_2}{G_3[u,v,G_1] \Rightarrow G_3[u,v,G_2]}. \tag{R2}$$

Будем говорить, что предложение φ_0 *выводимо* из предложений $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ в исчислении $\mathcal{LD}$, и писать $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \varphi_0$, если существует последовательность предложений $\psi_1,\ldots,\psi_l = \varphi_0$, называемая *выводом* φ_0, такая, что для всякого $k \leqslant l$ выполняется одно из следующих условий: ψ_k — аксиома; $\psi_k \in \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$; ψ_k получена из $\psi_1,\ldots,\psi_{k-1}$ посредством применения одного из правил вывода (R1), (R2).

Пусть $\mathscr{A} = (A, \{f_j\}_{j\in J}, \leqslant)$ — упорядоченная алгебра типа τ. Заметим, что так как равенство термов $p = q$ может быть представлено в виде конъюнкции $p \leqslant q \wedge q \leqslant p$, то всякое квазитождество на $\mathscr{A}$ сводится к одному или двум квазитождествам вида

$$\bigwedge_{k=1}^{k=n} p_k \leqslant q_k \to p_0 \leqslant q_0, \tag{1}$$

где $p_k, q_k \in \mathbb{P}$ $(k = 0,\ldots,n)$.

Теорема 1. *Квазитождество вида* (1) *тогда и только тогда принадлежит квазиэквациональной теории* $Qeq\{\Omega, \subset\}$, *когда* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, *где* $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$ $(k = 0, \ldots, n)$.

В качестве непосредственного следствия получаем характеризацию квазиэквациональной теории $Qeq\{\Omega\}$.

Следствие 1. *Квазитождество*

$$\bigwedge_{k=1}^{k=n} p_k = q_k \to p_0 = q_0$$

тогда и только тогда принадлежит квазиэквациональной теории $Qeq\{\Omega\}$, *когда* $\widetilde{\varphi}_1, \varphi_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, \varphi_n \vdash \varphi_0$ *и* $\widetilde{\varphi}_1, \varphi_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n, \varphi_n \vdash \widetilde{\varphi}_0$, *где* $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$ *и* $\widetilde{\varphi}_k = G(q_k) \Rightarrow G(p_k)$ $(k = 0, \ldots, n)$.

В качестве еще одного следствия теоремы 1 получаем следующий результат из [10].

Следствие 2. *Тождество* $p = q$ $(p \leqslant q)$ *принадлежит эквациональной теории* $Eq\{\Omega\}$ (*теории* $Eq\{\Omega, \subset\}$) *класса* $R\{\Omega\}$ (*класса* $R\{\Omega, \subset\}$) *тогда и только тогда, когда* $G(p) \equiv G(q)$ (*соответственно* $G(p) \prec G(q)$).

Перейдем к описанию базиса квазитождеств квазимногообразия $QR\{\Omega, \subset\}$.

Пусть $\Omega_0 = \Omega \setminus \{^{-1}, \cap\} = \{F_j\}_{j \in J_0} = \{F_{G^j}\}_{j \in J_0}$ и $V(G^j) = [0, h_j]$, $\operatorname{in} G^j = 0$, $\operatorname{out} G^j = 1$, $\operatorname{Lab}(G^j) = [1, n_j]$.

Назовем ***n*-системой** $(n \in \mathbb{N}^0)$ тройку $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$, где $\alpha, \beta : [1, n] \to \mathbb{N}^0$, $\gamma : [1, n] \to J_0$ — отображения (при $n = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = \varnothing$), удовлетворяющие для всякого $k = 1, \ldots, n$ условию

$$\alpha(k), \beta(k) \leqslant 2 + \sum_{l=1}^{k-1} (h_{\gamma(l)} - 1).$$

Для каждой n-системы $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ построим с помощью индукции последовательность графов $G_0 \subset \cdots \subset G_n = G_\omega$, для которых $V(G_k) = [0, l_k]$ и $\operatorname{Lab} V(G_k) = [0, m_k]$, где $l_k = 2 + \sum_{l=1}^{k} (h_{\gamma(l)} - 1)$ и $m_k = 1 + \sum_{l=1}^{k} n_{\gamma(l)}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Положим G_0 равным графу $0 \cdot \xrightarrow{1} \cdot 1$ и $G_k = G_{k-1} \cup \widetilde{G}^{\gamma(k)}$, где граф $\widetilde{G}^{\gamma(k)}$ получен из графа $G^{\gamma(k)}$ посредством следующей процедуры переиндексации его вершин и меток:

$$V(\widetilde{G}^{\gamma(k)}) = f(G^{\gamma(k)}), \quad \operatorname{in} \widetilde{G}^{\gamma(k)} = f(\operatorname{in} G^{\gamma(k)}), \quad \operatorname{out} \widetilde{G}^{\gamma(k)} = f(\operatorname{out} G^{\gamma(k)})$$

и

$$E(\widetilde{G}^{\gamma(k)}) = \{(f(u), g(k), f(v)) : (u, k, v) \in E(G^{\gamma(k)})\},$$

где $f(0) = \varphi(k)$, $f(1) = \psi(k)$ и $f(t) = t - 1 + l_{k-1}$ для $t = 2, \ldots, h_{\gamma(k)}$; $g(t) = t + m_{k-1}$ для $t = 1, \ldots, n_{\gamma(k)}$.

В том случае, когда операции $^{-1}$ или $\cap$ принадлежат Ω, соответствующие им операции алгебры $\mathscr{A} = (A, \{f_j\}_{j \in J}, \leqslant)$ обозначим соответственно через $^{-1}$ и $\wedge$.

Теорема 2. *Упорядоченная алгебра* $\mathscr{A} = (A, \{f_j\}_{j \in J}, \leqslant)$ *тогда и только тогда принадлежит квазимногообразию* $QR\{\Omega, \subset\}$, *когда она удовлетворяет тождествам* $(x_1^{-1})^{-1} = x_1$; $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$, $x_1 \wedge x_2 \leqslant x_1$ (*в том случае, если операции* $^{-1}$ *или* $\cap$ *принадлежат* Ω) *и для всякой*

n-системы $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ *и любых термов* $p_0, \dots p_n$ *таких, что* $G_\omega^{(0,1)} \prec G(p_0)$ *и* $G_{k-1}^{(\alpha(k), \beta(k))} \prec G(p_k)$ $(k = 1, \dots, n)$, *выполняется квазитождество*

$$\bigwedge_{k=1}^{n} p_k \leqslant f_{\gamma(k)}(x_{m_{k-1}+1}, \dots, x_{n_{\gamma(k)}+m_{k-1}+1}) \to x_1 \leqslant p_0. \tag{2}$$

Замечание. Все основные результаты работы могут быть без особого труда перенесены на случай операций, заданных с помощью диофантовых формул исчисления предикатов первого порядка с равенством, однако это приводит к несколько более громоздкой формулировке теоремы 2.

§ 3. Доказательства

Доказательства теорем 1 и 2 будут проведены по единой схеме и используют некоторые идеи работ [7–10, 20].

Обозначим через Σ систему квазитождеств, определяемую условиями теоремы 1, и через $\widetilde{\Sigma}$ — систему квазитождеств, определяемую условиями теоремы 2, включая квазитождества вида

$$x_1 \leqslant x_2 \wedge \dots \wedge x_{2n_j-1} \leqslant x_{2n_j} \to f_j(x_1, \dots, x_{2n_j-1}) \leqslant f_j(x_2, \dots, x_{2n_j}),$$

выражающие стабильность отношения $\leqslant$ относительно операций f_j.

Доказательства теорем 1 и 2 сводятся к следующим утверждениям:

a) $\Sigma \subset Qeq\{\Omega, \subset\}$;

b) $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$;

c) всякая упорядоченная алгебра $\mathscr{A}$, удовлетворяющая системе квазитождеств $\widetilde{\Sigma}$, принадлежит $QR\{\Omega, \subset\}$;

d) всякое квазитождество вида (1) из $Qeq\{\Omega, \subset\}$ принадлежит Σ.

Докажем предварительно ряд лемм. В дальнейшем, если не оговорено противное, множество вершин $V(G_k)$ и ребер $E(G_k)$ двухполюсника G_k будем обозначать через V_k и E_k, а его вход $\operatorname{in} G_k$ и выход $\operatorname{out} G_k$ — через i_k и o_k. Для всякого кортежа $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ элементов алгебры типа τ и терма p, содержащего в своей записи переменные (не обязательно все) $x_1, \dots, x_m$, значение терма p при $x_k = a_k$ $(k = 1, \dots, m)$ будем обозначать через $p(\vec{a})$ или $p(a_1, \dots, a_m)$.

Лемма 1. *Если* $G_1 \prec G_2$, *то* $G_3[u, v, G_1] \prec G_3[u, v, G_2]$.

Пусть $f : V_2 \to V_1$ — гомоморфизм G_2 в G_1. Положим $\tilde{f}(u) = u$ для $u \in V_3$ и $\tilde{f}(u) = f(u)$ для $u \in V_2 \setminus \{i_2, o_2\}$. Тогда $\tilde{f}$ — гомоморфизм $G_3[u, v, G_2]$ в $G_3[u, v, G_1]$. □

Лемма 2. *Если* $G_1 \prec G_2$, *то* $G_1[u, v, G_3] \prec G_2[u, v, G_3]$.

Пусть $f : V_2 \to V_1$ — гомоморфизм G_2 в G_1. Положим $\tilde{f}(u) = f(u)$ для $u \in V_2$ и $\tilde{f}(u) = u$ для $u \in V_3 \setminus \{i_3, o_3\}$. Тогда $\tilde{f}$ — гомоморфизм $G_2[u, v, G_3]$ в $G_1[u, v, G_3]$. □

Лемма 3. *Если* $G_1^{(u,v)} \prec G_2$, *то* $G_1 \prec G_1[u, v, G_2]$.

Пусть $f : V_2 \to V_1$ — гомоморфизм G_2 в $G_1^{(u,v)}$. Положим $\tilde{f}(w) = w$ для $w \in V_1$ и $\tilde{f}(w) = f(w)$ для $w \in V_2 \setminus \{i_2, o_2\}$. Тогда $\tilde{f}$ — гомоморфизм $G_1[u, v, G_2]$ в G_1. □

Лемма 4. *Если* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_1 \Rightarrow G_2$, *то* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_3[u, v, G_1] \Rightarrow G_3[u, v, G_2]$.

Лемма 4 следует непосредственно из определений и правила вывода (R2).

Лемма 5. $\vdash G_1 \Rightarrow G_2$ *тогда и только тогда, когда* $G_1 \prec G_2$.

Если $G_1 \Rightarrow G_2$ — аксиома исчисления $\mathscr{LD}$, то, как легко видеть, $G_1 \prec G_2$. Отсюда, используя лемму 1, индукцией по длине вывода предложения $G_1 \Rightarrow G_2$ получаем, что $\vdash G_1 \Rightarrow G_2$ влечет $G_1 \prec G_2$. Обратно, предположим, что $G_1 \prec G_2$, т. е. существует гомоморфизм $f : V_2 \to V_1$ двухполюсника G_2 в двухполюсник G_1. Положим $V_1' = f(V_1)$, $E_1' = E_1 \cap V_1' \times V_1'$ и $G_1' = (V_1', E_1', i_1, o_1)$. Тогда $G_1' \subset G_1$, откуда, используя аксиому (A3) и правило вывода (R1), легко получаем, что $\vdash G_1 \Rightarrow G_1'$. Таким образом, достаточно показать, что $\vdash G_1' \Rightarrow G_2$. Доказательство проводим индукцией по числу вершин $|V_2|$ двухполюсника G_2. Если $|V_2| = |V_1'|$, то f взаимно однозначно, т. е. $G_2 \subset G_1'$, отсюда $\vdash G_1' \Rightarrow G_2$. Предположим, что утверждение верно в случае $|V_2| = k \geqslant |V_1'|$. Пусть $|V_2| = k + 1$. Тогда $f(u) = f(v)$ для некоторых двух различных вершин $u, v \in V_2$. Пусть G_2' — двухполюсник, полученный из двухполюсника G_2 посредством отождествления вершины u с вершиной v. Тогда, как легко видеть, ограничение f на $V(G_2')$ является гомоморфизмом G_2' в G_1', откуда по предположению индукции $\vdash G_1' \Rightarrow G_2'$. Учитывая, что $G_2' \Rightarrow G_2$ — аксиома, и используя правило вывода (R2), получаем $\vdash G_1' \Rightarrow G_2$. □

Лемма 6. *Пусть* $\overrightarrow{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ *и* $(u_1, k_1, v_1), \ldots, (u_n, k_n, v_n)$ — *некоторая нумерация ребер двухполюсника* G. *Положим* $\widetilde{G}_0 = G$ *и* $\widetilde{G}_l = (\widetilde{G}_{l-1} \setminus \{(u_l, k_l, v_l)\})[u_l, v_l, G_{k_l}]$ $(l = 1, \ldots, n)$. *Тогда* $G(\overrightarrow{G}) = \widetilde{G}_n$.

Лемма 6 следует непосредственно из определения композиции двухполюсников.

Лемма 7. *Пусть* $\overrightarrow{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ *и* $G \prec Q$. *Тогда* $G(\overrightarrow{G}) \prec Q(\overrightarrow{G})$.

Лемма 7 следует непосредственно из лемм 2 и 6.

Лемма 8. *Пусть* $\overrightarrow{G} = (G_1, \ldots, G_m)$, $\overrightarrow{G}' = (G_1', \ldots, G_m')$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_k \Rightarrow G_k'$ $(k = 1, \ldots, n)$. *Тогда* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G(\overrightarrow{G}) \Rightarrow G(\overrightarrow{G}')$.

Лемма 8 следует непосредственно из лемм 4, 6 и правила вывода (R1).

Лемма 9. *Пусть* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, *где* $\varphi_k = Q_k \Rightarrow Q_k'$ $(k = 0, \ldots, n)$ *и* $\overrightarrow{G} = (G_1, \ldots, G_m)$. *Тогда* $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n \vdash \widetilde{\varphi}_0$, *где* $\widetilde{\varphi}_k = Q_k(\overrightarrow{G}) \Rightarrow Q_k'(\overrightarrow{G})$.

Используем индукцию по длине вывода предложения φ_0. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_l = \varphi_0$ — вывод предложения φ_0, где $\psi_k = D_k \Rightarrow D_k'$ для $k = 0, \ldots, l$. Положим $\widetilde{\psi}_k = D_k(\overrightarrow{G}) \Rightarrow D_k'(\overrightarrow{G})$ $(k = 0, \ldots, l)$. Покажем, что $\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_l$ — вывод предложения $\widetilde{\psi}_l = D_0(\overrightarrow{G}) \Rightarrow D_0'(\overrightarrow{G})$. Если $\psi_k = D_k \Rightarrow D_k'$ — аксиома, то $D_k \prec D_k'$, откуда, используя леммы 2 и 6, получаем $D_k(\overrightarrow{G}) \prec D_k'(\overrightarrow{G})$, следовательно, $\vdash \widetilde{\psi}_k$.

Предположим, что предложение ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R1), т. е. $D_{k+1} = D_i$, $D_j' = D_{k+1}'$ и $D_i' = D_j$ для некоторых $i, j \leqslant k$. Тогда $D_{k+1}(\overrightarrow{G}) = D_i(\overrightarrow{G})$, $D_j'(\overrightarrow{G}) = D_{k+1}'(\overrightarrow{G})$ и $D_i'(\overrightarrow{G}) = D_j(\overrightarrow{G})$, т. е. и $\widetilde{\psi}_k$ также может быть получена посредством применения правила (R1).

Пусть теперь ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R2), т. е. $D_{k+1} = G[u,v,D_i]$ и $D'_{k+1} = G[u,v,D'_i]$ для некоторого $i \leqslant k$. Тогда

$$D_{k+1}(\overrightarrow{G}) = G[u,v,D_i](\overrightarrow{G}) = G(\overrightarrow{G})[u,v,D_i(\overrightarrow{G})],$$
$$D'_{k+1}(\overrightarrow{G}) = G[u,v,D'_i](\overrightarrow{G}) = G(\overrightarrow{G})[u,v,D'_i(\overrightarrow{G})],$$

т. е. и $\widetilde{\psi}_k$ также может быть получена посредством применения правила (R2). □

В формулировке лемм 10–14 $\overrightarrow{R} = (R_1,\ldots,R_m)$, где $R_1,\ldots,R_m \in \mathrm{Rel}(U)$, и множества меток всех рассматриваемых двухполюсников включаются в $[1,m]$.

Лемма 10. *Пусть $G = (V,E,i,o)$. Пара $(x,y) \in U \times U$ принадлежит $F_G(\overrightarrow{R})$ тогда и только тогда, когда существует отображение $g : V \to U$ такое, что $g(i) = x$, $g(o) = x$ и $(g(u),g(v)) \in R_k$ для всякого ребра $(u,k,v) \in E$.*

Лемма 10 следует непосредственно из определения операции $F_G = F_{\varphi(G)}$ и формулы $\varphi(G)$, задаваемой двухполюсником G.

Лемма 11. *Пусть $G_1 \prec G_2$. Тогда $F_{G_1}(\overrightarrow{R}) \subset F_{G_2}(\overrightarrow{R})$.*

Пусть $f : V_2 \to V_1$ — гомоморфизм G_2 в G_1. Предположим, что $(x,y) \in F_{G_1}(\overrightarrow{R})$. Тогда существует отображение $g : V_1 \to U$ такое, что $g(i_1) = x$, $g(o_1) = y$ и $(g(u),g(v)) \in R_k$, если $(u,k,v) \in E_1$. Построим отображение $\tilde{g} : V_2 \to U$, положив $\tilde{g}(u) = g(f(u))$. Тогда $\tilde{g}(i_2) = x$, $\tilde{g}(o_2) = y$ и $(\tilde{g}(u),\tilde{g}(v)) \in R_k$, если $(u,k,v) \in E_2$. Следовательно, $(x,y) \in F_{G_2}(\overrightarrow{R})$. □

Лемма 12. *Пусть $G_1 = G_3[u,v,G_4]$, $G_2 = G_3[u,v,G_5]$, $F_{G_4}(\overrightarrow{R}) \subset F_{G_5}(\overrightarrow{R})$. Тогда $F_{G_1}(\overrightarrow{R}) \subset F_{G_2}(\overrightarrow{R})$.*

Согласно определению $V_1 = V_3 \cup V_4 \setminus \{i_4,o_4\}$, $V_2 = V_3 \cup V_5 \setminus \{i_5,o_5\}$, $i_1 = i_2 = i_3$, $o_1 = o_2 = o_3$ и $V_3 \cap V_4 = V_3 \cap V_5 = \varnothing$. Без ограничения общности можно считать, что и $V_4 \cap V_5 = \varnothing$.

Предположим, что $(x,y) \in F_{G_1}(\overrightarrow{R})$. Тогда существует отображение $g_1 : V_1 \to U$ такое, что $g_1(i_1) = x$, $g_1(o_1) = y$ и $(g_1(w),g_1(t)) \in R_k$, если $(w,k,t) \in E_1$. Положим $g_4(w) = g_1(w)$ для всех $w \in V_4 \setminus \{i_4,o_4\}$ и $g_4(i_4) = g_1(u)$, $g_4(o_4) = g_1(v)$. Тогда $g_4 : V_3 \to U$ и $(g_4(w),g_4(t)) \in R_k$, если $(w,k,t) \in E_4$, откуда $(g_4(i_4),g_4(o_4)) \in F_{G_4}(\overrightarrow{R}) \subset F_{G_5}(\overrightarrow{R})$. Следовательно, существует отображение $g_5 : V_5 \to U$ такое, что $g_5(i_5) = g_4(i_4) = g(u)$, $g_5(o_5) = g_4(o_4) = g(v)$ и $(g_5(w),g_5(t)) \in R_k$, если $(w,k,t) \in E_5$. Положим $g_2(w) = g_1(w)$ для $w \in V_3$ и $g_2(w) = g_5(w)$ для $w \in V_5 \setminus \{i_5,o_5\}$. Тогда $g_2 : V_2 \to U$, $g_2(i_2) = g_1(i_1) = x$, $g_2(o_2) = g_1(o_1) = y$ и $(g_2(w),g_2(t)) \in R_k$, если $(w,k,t) \in E_2$. Следовательно, $(x,y) = (g_2(i_2),g_2(o_2)) \in F_{G_2}(\overrightarrow{R})$. □

Лемма 13. *Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G_k \Rightarrow G'_k$ $(k = 0,\ldots,n)$ и $F_{G_k}(\overrightarrow{R}) \subset F_{G'_k}(\overrightarrow{R})$ для $k = 1,\ldots,n$. Тогда $F_{G_0}(\overrightarrow{R}) \subset F_{G'_0}(\overrightarrow{R})$.*

Используем индукцию по длине вывода предложения φ_0. Пусть $\psi_1,\ldots,\psi_l = \varphi_0$ — вывод предложения φ_0, где $\psi_k = D_k \Rightarrow D'_k$ для $k = 0,\ldots,l$. Покажем, что $F_{D_k}(\overrightarrow{R}) \subset F_{D'_k}(\overrightarrow{R})$ для любого $k = 1,\ldots,l$. Если $\psi_k = D_k \Rightarrow D'_k$ — аксиома, то это утверждение следует из лемм 5 и 11, а если совпадает с одним из φ_i, то из условий леммы.

Пусть утверждение верно для всех $i \leqslant k$. Предположим, что предложение ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R1), т. е. $D_{k+1} = D_i$, $D'_j = D'_{k+1}$ и $D'_i = D_j$ для некоторых $i, j \leqslant k$. Тогда

$$F_{D_{k+1}}(\overrightarrow{R}) = F_{D_i}(\overrightarrow{R}) \subset F_{D'_i}(\overrightarrow{R}) = F_{D_j}(\overrightarrow{R}) \subset F_{D'_j}(\overrightarrow{R}) = F_{D'_{k+1}}(\overrightarrow{R}).$$

Пусть теперь предложение ψ_{k+1} получено посредством применения правила вывода (R2). Тогда $D_{k+1} = G[u, v, D_i]$ и $D'_{k+1} = G[u, v, D'_i]$ для некоторого $i \leqslant k$. Отсюда, используя лемму 3, получаем $F_{D'_{k+1}}(\overrightarrow{R}) \subset F_{D'_{k+1}}(\overrightarrow{R})$. □

Лемма 14. *Для всякого терма $p \in \mathbb{P}$ имеет место равенство $F_{G(p)}(\overrightarrow{R}) = p(\overrightarrow{R})$.*

Очевидно, что утверждение леммы справедливо для $p = x_k$. Заметим, что $F_{G(G_1,\ldots,G_m)} = F_G(F_{G_1}, \ldots, F_{G_m})$, где $F_G(F_{G_1}, \ldots, F_{G_m})$ — суперпозиция операций F_G и $F_{G_1}, \ldots, F_{G_m}$. Предположим, что $p = f_j(p_1, \ldots, p_m)$ и $p_1(\overrightarrow{R}) = F_{G(p_1)}(\overrightarrow{R}), \ldots, p_m(\overrightarrow{R}) = F_{G(p_m)}(\overrightarrow{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{G(p)}(\overrightarrow{R}) &= F_{G^j(G(p_1),\ldots,G(p_m))}(\overrightarrow{R}) = F_{G^j}(F_{G_1}(\overrightarrow{R}), \ldots, F_{G_m}(\overrightarrow{R})) \\ &= F_j(F_{G_1}(\overrightarrow{R}), \ldots, F_{G_m}(\overrightarrow{R})) = F_j(p_1(\overrightarrow{R}), \ldots, p_m(\overrightarrow{R})) = p(\overrightarrow{R}). \ \square \end{aligned}$$

Переходим непосредственно к доказательству теорем.

(a) Рассмотрим упорядоченную алгебру отношений $\mathrm{Rel}(U), \Omega, \subset)$, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$ $(k = 0, \ldots, n)$. Предположим, что выполняется посылка квазитождества (1), т. е. $p_k(\overline{R}) \subset q_k(\overline{R})$ для $k = 1, \ldots, n$. Тогда, используя лемму 5, получаем $F_{G(p_k)}(\overline{R}) = p_k(\overline{R}) \subset q_k(\overline{R}) = F_{G(q_k)}(\overline{R})$, откуда согласно лемме 4 $F_{G(p_0)}(\overline{R}) \subset F_{G(q_0)}(\overline{R})$. Таким образом, $\Sigma \subset QR\{\Omega, \subset\}$.

(b) Покажем, что $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$. Из леммы 8 непосредственно следует, что квазитождества, выражающие стабильность отношения $\leqslant$ относительно операций f_j, принадлежат Σ.

Так как $G\big((x_1^{-1})^{-1}\big) = G(x_1)$, $G(x_1 \wedge x_2) = G(x_2 \wedge x_1)$ и $G(x_1) \subset G(x_1 \wedge x_2)$, тождества $(x^{-1})^{-1} = x$, $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$, $x_1 \wedge x_2 \leqslant x_1$ принадлежат Σ.

Пусть $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$ и $G_\omega^{(0,1)} \prec G(p_0)$ и $G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))} \prec G(p_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ для некоторой n-системы $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ и термов $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$. Положим $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow Q_k$, где $Q_k = G(f_{\gamma(k)}(x_{m_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_{\gamma(k)}+m_{k-1}+1}))$. Используя индукцию, покажем, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G_k^{(0,1)}$ для любого $k \leqslant n$. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G_{k-1}^{(0,1)}$. Так как по предположению $G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))} \prec G(p_k)$, то $\vdash G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))} \Rightarrow G(p_k)$, следовательно, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))} \Rightarrow Q_k$. Отсюда, используя лемму 4, получаем

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash G_{k-1}\big[\alpha(k), \beta(k), G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))}\big] \Rightarrow G_{k-1}[\alpha(k), \beta(k), Q_k].$$

Так как по построению

$$\begin{aligned} G_k = G_{k-1} \cup \widetilde{G}^{\gamma(k)} &= G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), \widetilde{G}^{\gamma(k)}] \\ &= G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), G(f_{\gamma(k)}(x_{m_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_{\gamma(k)}+m_{k-1}+1}))] \\ &= G_{k-1}^{(0,1)}[\alpha(k), \beta(k), Q_k], \end{aligned}$$

имеем

$$\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash G_{k-1}\bigl[\alpha(k),\beta(k),G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))}\bigr] \Rightarrow G_k.$$

Согласно лемме 3

$$G_{k-1}^{(0,1)} \prec G_{k-1}^{(0,1)}\bigl[\alpha(k)\beta(k),G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))}\bigr],$$

следовательно,

$$\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash G_{k-1}^{(0,1)} \Rightarrow G_{k-1}^{(0,1)}\bigl[\alpha(k),\beta(k),G_{k-1}^{(\alpha(k),\beta(k))}\bigr].$$

Таким образом, $\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash G_{k-1}^{(0,1)} \Rightarrow G_k$, откуда, используя предположение индукции, получаем $\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G_k$.

Так как $G_n^{(0,1)} = G_\omega^{(0,1)} \prec G(p_0)$, имеем $\vdash G_n^{(0,1)} \Rightarrow G(p_0)$, откуда $\vdash G_1^{(0,1)} \Rightarrow G(p_0)$. Учитывая, что $G_1^{(0,1)} = G(x_1)$, получаем $\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash G(x_1) \Rightarrow G(p_0)$ и, следовательно, всякое квазитождество вида (2) принадлежит Σ.

(с) Пусть упорядоченная алгебра $\mathscr{A} = (A,\{f_j\}_{j\in J},\leqslant)$ удовлетворяет квазитождествам из $\widetilde{\Sigma}$. Покажем, что $\mathscr{A} \in QR\{\Omega,\subset\}$. Так как $QR\{\Omega,\subset\}$ обладает локальным свойством, достаточно ограничиться конечно порожденными алгебрами. Отсюда, учитывая, что множество операций Ω не более чем счетно, мы без ограничения общности можем полагать, что множество A не более чем счетно.

Положим $J_0(A) = \{(j,\vec{a}) : j \in J_0,\ \vec{a} = (a_1,\dots,a_{n_j}) \in A^{n_j}\}$ и $\Lambda = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{P} \times J_0(A)$. Так как множества $\mathbb{P}$ и $J_0(A)$ не более чем счетны, то существует биекция $\theta : \Lambda \to \mathbb{N}$.

Построим следующие последовательности (возможно, бесконечные): натуральных чисел $t_n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 1)$; n-систем $\omega_n = (\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)$ $(n \geqslant 0)$; графов $G_n = G_{\omega_n}$ $(n \geqslant 0)$; кортежей $\vec{b}^n = (b_1,\dots,b_{\lambda(n)}) \in A^{\lambda(n)}$, где $\lambda(n) = 1 + \sum\limits_{l=1}^{n-1} n_{\gamma(l)}$ $(n \geqslant 0)$.

Положим $\omega_0 = (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$, G_0 равным графу $0\cdot \xrightarrow{k} \cdot 1$ и $\vec{b}^0 = (a)$.

Предположим, что t_k для $k = 1,\dots,n-1$ и ω_k, G_k, $\vec{b}^k$ для $k = 0,\dots,n-1$ уже построены. Положим

$$\Lambda_n = \bigl\{(u,v,p,j,\vec{a}) \in \Lambda : G_{n-1}^{(u,v)} \prec G(p),\ p(\vec{b}^{n-1}) \leqslant f_j(\vec{a}),\ \theta(u,v,p,j,\vec{a}) \notin \{t_1,\dots,t_{n-1}\}\bigr\}.$$

Если $\Lambda_n = \varnothing$, то процесс построения последовательностей на этом заканчивается, т. е. построенные последовательности конечны.

Предположим теперь, что $\Lambda_n \neq \varnothing$. Пусть $(u,v,p,j,\vec{a})$ — элемент Λ_n, для которого $\theta(u,v,p,j,\vec{a})$ имеет наименьшее значение. Положим $t_n = \theta(u,v,j,\vec{a})$; $\alpha_n(k) = \alpha_{n-1}(k)$, $\beta_n(k) = \beta_{n-1}(k)$, $\gamma_n(k) = \gamma_{n-1}(k)$ для $k = 1,\dots,n-1$ и $\alpha_n(n) = u$, $\beta_n(n) = v$, $\gamma_n(n) = j$; $G_n = G_{\omega_n}$ и $b_{\lambda(n-1)+k} = a_k$ для $k = 1,\dots,n_i$.

По построению $\omega_{n-1} \subset \omega_n$, $G_{n-1} \subset G_n$, $\vec{b}^{n-1} \subset \vec{b}^n$. Положим

$$\alpha = \cup\{\alpha_n : n \geqslant 0\},\quad \beta = \cup\{\beta_n : n \geqslant 0\},$$
$$\gamma = \cup\{\gamma_n : n \geqslant 0\},\quad G = \cup\{G_n : n \geqslant 0\},\quad \vec{b} = \cup\{\vec{b}^n : n \geqslant 0\}.$$

Лемма 15. *Пусть $x, y \in \mathbb{N}^0$, $j \in J_0$, $\vec{c} \in A^{n_j}$, $p \in \mathbb{P}$ и $G^{(x,y)} \prec G(p)$, $p(\vec{b}) \leqslant f_j(\vec{c})$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_n(n) = x$, $\beta_n(n) = y$, $\gamma_n(n) = j$, $G_n = G_{n-1} \cup \widetilde{G}^{\gamma(n)}$ и $b_{\lambda(n-1)+k} = c_k$ для $k = 1,\dots,n_j$.*

Достаточно показать, что $\theta(x,y,p,j,\vec{c}) = t_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим противное. Так как $G^{(x,y)} \prec G(p)$, то $G_m^{(x,y)} \prec G(p)$ для некоторого m. Тогда $(x,y,p,j,\vec{c}) \in \Lambda_k$ для всех $k \geqslant m$. Поскольку существует лишь конечное число натуральных чисел, меньших $\theta(x,y,p,j,\vec{c})$, существует такое n, что $\theta(x,y,p,j,\vec{c}) \leqslant \theta(x',y',p',j',\vec{c}')$ для всякого $(x',y',p',j',\vec{c}') \in \Lambda_n$. Отсюда по построению $\theta(x,y,p,j,\vec{c}) = t_n$, что противоречит предположению. □

Рассмотрим отображение $P_a : A \to \mathrm{Rel}(\mathbb{N}^0)$, определяемое следующим образом:

$$F_a(c) = \{(x,y) : (\exists p \in \mathbb{P}(X))G^{(x,y)} \prec G(p), p(\vec{b}) \leqslant c\}.$$

Покажем, что P_a — гомоморфизм упорядоченной алгебры $(A, \{f_j\}_{j\in J}, \leqslant)$ в упорядоченную алгебру отношений $(\mathrm{Rel}(\mathbb{N}^0), \Omega, \subset)$.

Отображение P_a очевидным образом удовлетворяет условию: $c \leqslant d$ влечет $P_a(c) \subset P_a(d)$.

Предположим, что $(x,y) \in F_j(P_a(c_1), \ldots, P_a(c_{n_j}))$, где $j \in J_0$. Тогда по лемме 10 существует отображение $g : V(G^j) \to \mathbb{N}^0$ такое, что $g(\mathrm{in}\, G^j) = x$, $g(\mathrm{out}\, G^j) = y$ и $(g(u), g(v)) \in P_a(c_k)$ для всякого ребра $(u,k,v) \in E(G^j)$. По условию число ребер двухполюсника G^j равно n_j, следовательно, для некоторых $p_1, \ldots, p_{n_j} \in \mathbb{P}$ будет $p(\vec{b}) \leqslant c_k$ $(k = 1, \ldots, n_j)$ и $G^{(g(u),g(v))} \prec G(p_k)$ для всякого ребра $(u,k,v) \in E(G^j)$, откуда $f_j(p_1(\vec{b}), \ldots, p_{n_j}(\vec{b})) \leqslant f_j(c_1, \ldots, c_{n_l})$ и для каждого ребра $r_k = (u,k,v) \in E(G^j)$ существует гомоморфизм f_k двухполюсника $G(p_k)$ в двухполюсник $G^{(g(u),g(v))}$. Таким образом, отображение $f = \cup\{f_k : k \in [1, n_j]\}$ будет гомоморфизмом двухполюсника $G^j(G(p_1), \ldots, G(p_{n_j}))$ в двухполюсник $G^{(x,y)}$, т. е. $G^{(x,y)} \prec G^j(G(p_1), \ldots, G(p_{n_j})) = G(f_j(p_1, \ldots, p_{n_j}))$. Следовательно, $(x,y) \in P_a(f_j(c_1, \ldots, c_{n_j}))$.

Обратно, пусть $(x,y) \in P_a(f_j(c_1, \ldots, c_{n_j}))$. Тогда $p(\vec{b}) \leqslant f_j(c_1, \ldots, c_{n_j})$ и $G^{(x,y)} \prec G(p)$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Отсюда, используя лемму 15, получаем, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_n(n) = x$, $\beta_n(n) = y$, $\gamma_n(k) = j$, $G_n = G_{n-1} \cup \widetilde{G}^{\gamma(n)}$ и $b_{\lambda(n-1)+k} = c_k$ для $k = 1, \ldots, n_j$. Тогда $(u,v) \in P_a(c_k)$ для всякого ребра $(u, \lambda(n-1)+k, v) \in \widetilde{G}^{\gamma(n)}$ и, следовательно, $(x,y) \in F_j(P_a(c_1), \ldots, P_a(c_{n_j}))$.

Таким образом, $F_j(P_a(c_1), \ldots, P_a(c_{n_j})) = F_j(P_a(c_1), \ldots, P_a(c_{n_j}))$ для всякого $j \in J_0$.

Пусть $^{-1} \in \Omega$ и $(x,y) \in P_a(c^{-1})$, т. е. $p(\vec{b}) \leqslant c^{-1}$ и $G^{(x,y)} \prec G(p)$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Тогда $p^{-1}(\vec{b}) \leqslant c$ и $G^{(y,x)} \prec G(p^{-1})$, т. е. $(y,x) \in P_a(c)$. Следовательно, $P_a(c^{-1}) \subset P_a^{-1}(c)$. Так как $(c^{-1})^{-1} = c$, то $(P_a(c))^{-1} = (P_a((c^{-1})^{-1}))^{-1} \subset ((P_a(c^{-1}))^{-1})^{-1} = P_a(c^{-1})$. Таким образом, $P_a(c^{-1}) = P_a(c)$.

Пусть $\cap \in \Omega$ и $(x,y) \in P_a(c_1) \cap P_a(c_2)$. Тогда $(x,y) \in P_a(c_1)$ и $(x,y) \in P_a(c_2)$, т. е. $p_1(\vec{b}) \leqslant c_1$, $p_2(\vec{b}) \leqslant c_2$ и $G^{(x,y)} \prec G(p_1)$, $G^{(x,y)} \prec G(p_2)$ для некоторых $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Следовательно, $(p_1 \wedge p_2)(\vec{b}) = p_1(\vec{b}) \wedge p_2(\vec{b}) \leqslant c_1 \wedge c_2$ и $G^{(x,y)} \prec G(p_1 \wedge p_2)$, т. е. $(x,y) \in P_a(c_1 \wedge c_2)$.

Обратно, так как $c_1 \wedge c_2 \leqslant c_1$ и $c_1 \wedge c_2 = c_2$, то $P_a(c_1 \wedge c_2) \subset P_a(c_1)$ и $P_a(c_1 \wedge c_2) \subset P_a(c_2)$, т. е. $P_a(c_1 \wedge c_2) \subset P_a(c_1) \cap P_a(c_2)$.

Таким образом, $P_a(c_1 \wedge c_2) = P_a(c_1) \cap P_a(c_2)$.

Итак, P_a — гомоморфизм упорядоченной алгебры $(A, \{f_j\}_{j\in J}, \leqslant)$ в упорядоченную алгебру отношений $(\mathrm{Rel}(\mathbb{N}^0), \Omega, \subset)$. Более того, он удовлетворяет условию: если $P_a(a) \subset P_a(c)$, то $a \leqslant c$. Действительно, пусть $P_a(a) \subset P_a(c)$. Так как $b_1 = a$, то $(0,1) \in P_a(c) \subset P_a(c)$, т. е. $p_0(\vec{b}) \leqslant c$ и $G^{(0,1)} \prec G(p_0)$ для некоторого $p_0 \in \mathbb{P}$. Тогда $G_n^{(0,1)} \prec G(p_0)$ для некоторого n. Так как по построению существуют такие $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$, что $p_k(\vec{b}) \leqslant f_{\gamma(k)}(\vec{b})$ и $G^{(\alpha(k),\beta(k))} \prec G(p_k)$, то, используя тождество (2), получаем $a \leqslant p_0(\vec{b}) \leqslant c$.

Положим $X_a = \mathbb{N}^0 \times \{a\}$ и $\widetilde{P}(c) = \{\widetilde{P}_a(c)\}_{a \in A}$, где $\widetilde{P}_a(c) = \{((x,a),(y,a)) : (x,y) \in P_a(c)\}$. Тогда $\widetilde{P}$ — гомоморфизм $\mathscr{A}$ в $\prod\{(\mathrm{Rel}(X_a), \Omega, \subset) : a \in A\}$. Предположим, что $\widetilde{P}(c) \subset \widetilde{P}(d)$. Тогда $P_c(c) \subset P_c(d)$, откуда $c \leqslant d$. Таким образом, $\widetilde{P}$ — изоморфное вложение $\mathscr{A}$ в $\prod\{(\mathrm{Rel}(X_a), \Omega, \subset) : a \in A\}$. Учитывая, что $\prod\{(\mathrm{Rel}(X_a), \Omega, \subset) : a \in A\} \in QR\{\Omega\}$, получаем $\mathscr{A} \in QR\{\Omega\}$.

(d) Рассмотрим некоторое квазитождество

$$\bigwedge_{k=1}^{k=l} \tilde{p}_k \leqslant \tilde{q}_k \to \tilde{p}_0 \leqslant \tilde{q}_0, \tag{$*$}$$

принадлежащее $Qeq\{\Omega, \subset\}$, и покажем, что оно принадлежит и Σ.

Положим $\widetilde{\varphi}_k = G(\tilde{p}_k) \Rightarrow G(\tilde{q}_k)$ $(k = 1, \ldots, l)$. Рассмотрим алгебру термов $\mathbb{P}$. Введем на $\mathbb{P}$ отношение квазипорядка $\ll$ и отношение эквивалентности $\cong$:

$$p \ll q \text{ тогда и только тогда, когда } \widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_l \vdash G(p) \Rightarrow G(q);$$

$$p \cong q \text{ тогда и только тогда, когда } p \ll q \text{ и } q \ll p.$$

Из леммы 8 следует, что отношение $\ll$ стабильно относительно операций алгебры $\mathbb{P}$ и $\cong$ — конгруэнтность алгебры $\mathbb{P}$. Элемент фактор-множества $\mathbb{P}/\cong$, содержащий терм p, обозначим через $[p]$.

Покажем, что упорядоченная алгебра $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ принадлежит $QR\{\Omega, \subset\}$. Для этого достаточно показать, что она удовлетворяет системе квазитождеств Σ. Рассмотрим некоторое квазитождество из Σ:

$$\bigwedge_{k=1}^{k=n} p_k \leqslant q_k \to p_0 \leqslant q_0. \tag{$**$}$$

Тогда $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi_0$, где $\varphi_k = G(p_k) \Rightarrow G(q_k)$. Предположим, что формулы $p_k \leqslant q_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ выполняются на упорядоченной алгебре $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ для некоторых $[p'_1], \ldots, [p'_m] \in \mathbb{P}/\cong$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_l \vdash G\big(p_k(p'_1, \ldots, p'_m)\big) \Rightarrow G\big(q_k(p'_1, \ldots, p'_m)\big),$$

т. е.

$$\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_l \vdash G(p_k)\big(G(p'_1), \ldots, G(p'_m)\big) \Rightarrow G(q_k)\big(G(p'_1), \ldots, G(p'_m)\big).$$

Положим

$$\varphi'_k = G(p_k)\big(G(p'_1), \ldots, G(p'_m)\big) \Rightarrow G(q_k)\big(G(p'_1), \ldots, G(p'_m)\big) \quad (k = 0, \ldots, n).$$

Тогда, используя лемму 12, получаем, что $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n \vdash \varphi'_0$.

Таким образом, $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_l \vdash \varphi'_0$, т. е. формула $p_0 \leqslant q_0$ выполняется на упорядоченной алгебре $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ для $[p'_1], \ldots, [p'_m] \in \mathbb{P}/\cong$, что означает выполнимость квазитождества $(**)$.

Окончательно, так как формулы $\tilde{p}_k \leqslant \tilde{q}_k$ $(k = 1, \ldots, l)$ выполняются на упорядоченной алгебре $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ для $[x_1], \ldots, [x_m] \in \mathbb{P}/\cong$ и $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$ принадлежит $QR\{\Omega, \subset\}$, то и формула $\tilde{p}_0 \leqslant \tilde{q}_0$ выполняется на $(\mathbb{P}, \ll)/\cong$, т. е. $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_l \vdash \widetilde{\varphi}_0$. Последнее означает, что квазитождество $(*)$ принадлежит Σ.

Теоремы 1 и 2 доказаны. Следствие 2 вытекает непосредственно из теоремы 1 и леммы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logic 3, Algebra und Logic der Relative. Leipzig: Teubner, 1895.
2. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73–89.
3. *Tarski A.* Some metalogical results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 188–189.
4. *Schein B. M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1, N 1. P. 1–62.
5. *Schein B. M.* Representation of reducts of Tarski relation algebras // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1991. V. 54. P. 621–635.
6. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1991. V. 54. P. 111–124.
7. *Jónsson B.* Representation of modular lattices and of relation algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92, N 3. P. 449–464.
8. *Schein B. M.* Representation of involuted semigroups by binary relations // Fund. Math. 1974. V. 82, N 2. P. 121–141.
9. *Бредихин Д. А.* Представление упорядоченных инволютированных полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1975. № 7. С. 19–29.
10. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
11. *Andréka H.* On union-relation composition reducts of relation algebras // Abstracts Amer. Math. Soc. 1989. Issue 62, N 2. P. 174.
12. *Andréka H.* Representations of distributive lattice-ordered semigroups with binary relations // Algebra Universalis. 1991. V. 28, N 1. P. 12–25.
13. *Bredikhin D. A.* On semigroups of binary relations pointed by universal relations // Тез. докл. междунар. конф. «Полугруппы и их приложения, включая полугрупповые кольца». Санкт-Петербург, 1995. С. 6–7.
14. *Andréka H., Bredikhin D. A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Algebra Universalis. 1995. V. 33, N 4. P. 516–532.
15. *Grätzer G.* Universal algebra. Princeton: Van Nostrand, 1968.
16. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
17. *Мальцев А. И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики // Тр. междунар. конгресса математиков. М., 1966. С. 217–231.
18. *Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А.* Элементарные теории // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 37–108.
19. *Böner F., Pöschel R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. Wien, 1991. V. 7. P. 50–70.
20. *Haiman M.* Proof theory for linear lattices // Adv. Math. 1985. V. 58. P. 209–242.

г. Саратов *Статья поступила 4 сентября 1995 г.*