

## ИНДУКЦИЯ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ

В. А. Гриценко

### Оглавление

|   |    |
|---|----|
| Введение и формулировка основных результатов .....        | 3  |
| §1. Группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $Sp_2(\mathbb{Z})$ .....  | 10 |
| §2. Кольца Гекке параболических подгрупп .....            | 19 |
| §3. Кольца Гекке параболических подгрупп ранга один ..... | 26 |
| §4. Кольца Гекке параболической подгруппы ранга два ..... | 34 |
| §5. Группа Якоби .....                                    | 46 |
| §6. Разложения многочленов Гекке в общем случае .....     | 54 |
| Список литературы .....                                   | 62 |

### Введение и формулировка основных результатов

Эйлеровы произведения, определяемые в арифметике и алгебраической геометрии, тесно связаны с теорией автоморфных функций. Например,  $L$ -функция Гекке обычных модулярных форм веса два совпадает с  $L$ -функцией модулярной кривой (согласно гипотезе Таниямы-Вейля — с  $L$ -функцией эллиптической кривой);  $L$ -функция модулярной формы веса один совпадает с  $L$ -функцией Артина двумерного представления группы Галуа алгебраического замыкания поля рациональных чисел. Автоморфные формы на классических (симплектической, ортогональной, унитарной) группах связаны так же с арифметикой многообразий Шимуры.

Как и в теории автоморфных форм на группе  $GL_2$ , в теории автоморфных форм на классических группах есть примеры рядов Дирихле с Эйлеровыми произведениями, построенными по коэффициентам Фурье автоморфных форм. Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы объяснить природу известных примеров и построить новые. Это дает нам метод для исследования дзета-функций автоморфных форм на классических группах, в частности стандартной дзета-функции для групп  $SO(2, n)$  и  $SO(1, n)$  и нестандартных дзета-функций (в терминологии Ленглендса [L]) групп  $SU(2, 2)$  (см. [G7]),  $SO(1, 4)$ ,  $Sp(1, 1)$ ,  $Sp(2, 2)$ ,  $SO(2, 10)$ .

Данная статья посвящена изучению алгебраической стороны этого метода. Основным инструментом предлагаемой конструкции является некоммутативное кольцо Гекке некоторой параболической подгруппы. Мы называем это кольцо *параболическим расширением*, так как оно является некоммутативным „алгебраическим“ расширением исходного кольца Гекке редуктивной группы над локальным  $p$ -адическим полем. Параболические расширения оказываются очень полезными

в различных ситуациях. Например, многочлены Гекке, отвечающие локальным  $L$ -функциям редутивных групп, раскладываются на множители в кольце многочленов над параболическими расширениями, и более того, многочлены из этого разложения совпадают в некоторых случаях с локальными  $L$ -функциями подгрупп из разложения Леви параболических групп.

По-видимому, лучше всего объяснить данный метод на простейшем примере  $L$ -функции Гекке модулярных форм на  $SL_2(\mathbb{Z})$ . В этом примере мы дадим короткое доказательство классического соотношения Гекке между рядами Дирихле и Эйлеровыми произведениями. Это доказательство, которое может быть обобщено на случай произвольной классической группы, демонстрирует некоторые аспекты предлагаемого подхода к данной проблеме.

*Объяснение метода на примере группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ .* Возьмем кольцо Гекке специальной линейной группы  $\mathcal{H}(SL_2) = \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), M_2^+(\mathbb{Z}))$ , где  $M_2^+(\mathbb{Z})$  полугруппа целых матриц с положительным определителем. Кольцо Гекке — это пространство конечных формальных линейных комбинаций двойных классов  $SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z})$  с рациональными коэффициентами, снабженное стандартным законом умножения (см. определение в §1). Точно так же мы можем определить кольцо Гекке  $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}(\Gamma_\infty, M_\infty^+)$ , где  $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{Z} \right\}$  параболическая подгруппа специальной линейной группы и  $M_\infty^+$  полугруппа целых верхнетреугольных матриц. В соответствии с теоремой об элементарных делителях

$$SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z}) = \sum_i SL_2(\mathbb{Z})g_i, \quad \text{где } g_i \in M_\infty^+.$$

Легко проверить, что соответствие

$$\text{Im}: SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \sum_i \Gamma_\infty g_i$$

является инъективным гомоморфизмом колец Гекке, следовательно, кольцо  $\mathcal{H}_\infty$  есть расширение кольца  $\mathcal{H}(SL_2)$ , и мы будем отождествлять кольцо  $\mathcal{H}(SL_2)$  с его образом в  $\mathcal{H}_\infty$ .

Как выглядят образы стандартных операторов Гекке

$$T(p) = SL_2(\mathbb{Z}) \text{diag}(1, p)SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{и} \quad T(p, p) = SL_2(\mathbb{Z}) \text{diag}(p, p)SL_2(\mathbb{Z}) ? \quad (0.1)$$

В соответствии с определением

$$T(p) = [p]_- + [p]_+ \quad \text{и} \quad [p]_- \cdot [p]_+ = pT(p, p), \quad (0.2)$$

где

$$\begin{aligned} [n]_- &= \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ [n]_+ &= \Gamma_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \sum_{b \bmod n} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Согласно определению умножения в кольце Гекке, отображения  $j_{\pm} : n \rightarrow [n]_{\pm}$  являются вложением мультипликативной полугруппы натуральных чисел  $\mathbb{N}^{\times}$  в кольцо  $\mathcal{H}_{\infty}$ , и мы можем расширить это вложение по линейности до отображения формального кольца  $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^{\times}]$ , которое является кольцом Гекке  $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^{\times})$  тривиальной группы, состоящей только из единицы. В результате мы получаем три коммутативных подкольца в кольце Гекке  $\mathcal{H}_{\infty}$ :

$$\mathcal{H}(SL_2) \xrightarrow{\text{Im}} \mathcal{H}_{\infty} \xleftarrow{j_{\pm}} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^{\times}].$$

Кольцо  $\mathcal{H}_{\infty}$  некоммутативное и обладает делителями нуля, что легко следует из следующих примеров:

$$[n]_{-}[n]_{+} \neq [n]_{+}[n]_{-} \quad \text{и} \quad [n]_{-}([n]_{-}[n]_{+} - [n]_{+}[n]_{-}) = 0.$$

Элемент Гекке (оператор Гекке)  $T(n)$  равен сумме всех различных двойных смежных классов определителя  $n$

$$T(n) = \sum_{g \in M_2^+(\mathbb{Z}), \det g = n} SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z}). \quad (0.3)$$

Введем локальный многочлен Гекке для простого числа  $p$

$$Q_p(t) = 1 - T(p)t + pT(p, p)t^2,$$

который является знаменателем локальной дзета-функции группы  $GL_2$

$$\sum_{\delta \geq 0} T(p^{\delta})t^{\delta} = Q_p(t)^{-1}. \quad (0.4)$$

Тождества (0.2) приводят нас к следующему утверждению, объясняющему введение кольца Гекке параболической подгруппы.

**Лемма о разложении.** *Многочлен Гекке  $Q_p(t) \in \mathcal{H}(SL_2)[t]$  раскладывается на множители в параболическом расширении  $\mathcal{H}_{\infty}$  кольца  $\mathcal{H}(SL_2)$*

$$Q_p(t) = (1 - [p]_{-}t) \cdot (1 - [p]_{+}t).$$

**Замечание.** Если мы заменим  $t$  на  $p^{-s}$ , то множитель  $(1 - [p]_{-}p^{-s})^{-1}$  является  $j_{-}$ -образом локального множителя дзета-функции Римана  $\zeta_p(s-1) = (1 - p^{1-s})^{-1}$ , и по крайней мере формально локальная дзета-функция группы  $SL_2$  есть произведение  $j_{-}$ - и  $j_{+}$ -образов дзета-функции Римана. В качестве следствия полученного разложения мы получаем следующий классический результат об  $L$ -функции Гекке модулярных форм.

**Следствие (Гекке).** *Пусть*

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a(n) \exp(2\pi i n \tau)$$

— модулярная форма веса  $k$  относительно группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Предположим, что  $f(\tau)$  является собственной функцией всех операторов Гекке, и заменим операторы Гекке в многочлене  $Q_p(t)$  на соответствующие собственные значения

$$Q_{p,f}(t) = 1 - \lambda_p t + p^{k-1} t^2.$$

Тогда следующее тождество выполняется для всех комплексных  $s$  с достаточно большой вещественной частью

$$\sum_{n \geq 1} a(n) n^{-s} = a(1) \prod_p Q_{p,f}(p^{-s})^{-1}.$$

**Доказательство.** Ряду Дирихле можно придать следующий вид, используя представление параболического кольца Гекке, которое будет определено ниже,

$$\sum_{n \geq 1} a(n) n^{-s} = a(1)|_k [\zeta(s-1)]_+. \quad (0.5)$$

Существует представление кольца Гекке параболической подгруппы  $\Gamma_\infty$  на пространстве периодических функций переменной  $\tau$  (что эквивалентно, на пространстве модулярных функций относительно группы  $\Gamma_\infty$ ). Например,

$$f(\tau)|_k [n]_+ = n^{-1} \sum_{b \bmod n} f((\tau + b)/n) = \sum_{m \geq 0} a(nm) \exp(2\pi i m \tau).$$

Следовательно, мы имеем следующее двойственное представление на пространстве коэффициентов Фурье

$$a(m)|_k [n]_+ = a(nm)$$

и аналогично

$$a(m)|_k [n]_- = \begin{cases} n^{k-1} a(m/n), & \text{если } m \equiv 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для кольца  $\mathcal{H}(SL_2)$  это представление совпадает со стандартным представлением кольца Гекке на пространстве модулярных форм веса  $k$ . Используя это представление, мы получаем следующее тождество в кольце формальных степенных рядов для любого  $m$ , взаимно простого с  $p$

$$\begin{aligned} Q_{p,f}(t) \sum_{\delta \geq 0} a(p^\delta m) t^\delta &= Q_{p,f}(t) \sum_{\delta \geq 0} a(m)|_k [p^\delta]_+ t^\delta = a(m)|_k \left( Q_p(t) \sum_{\delta \geq 0} [p]_+^\delta t^\delta \right) \\ &= a(m)|_k (Q_p(t)(1 - [p]_+ t)^{-1}) = a(m)|_k (1 - [p]_- t) = a(m), \end{aligned}$$

где мы использовали разложение леммы, чтобы получить четвертое тождество. Полагая  $t = p^{-s}$  и применяя последовательно эти равенства для всех простых  $p$ , мы получаем тождество следствия.

Мы хотим отметить, что тождество (0.4) также является следствием разложения многочлена  $Q_p(t)$ . Это доказано в [G2] для общей линейной группы. В этом случае имеется следующее соотношение между стандартными  $L$ -функциями общих линейных групп

$$Q_p^{GL_n}(t) = j_-(Q_p^{GL_{n-1}}(pt))^{-1} \cdot (1 - [p]_+ t) = (1 - [p]_- t) \cdot j_+(Q_p^{GL_{n-1}}(pt))^{-1}.$$

Смотри [G2] и [G3], где получены также формулы для косо-симметрического квадрата стандартной  $L$ -функции.

Имеются другие приложения конструкции параболических расширений к построению „подъема“ автоморфных форм. Определим „четное“ кольцо Гекке  $\mathcal{H}_0(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Q}))$  и его параболическое расширение  $\mathcal{H}_0(\Gamma_\infty) = \mathcal{H}_0(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$ . Тогда мы можем определить следующее вложение тривиального кольца Гекке  $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times) = \mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times]$

$$[n^{-1}] = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Мы можем рассматривать  $\mathbb{Z}$ -периодические функции комплексной переменной  $\tau$  как автоморфные функции относительно параболической подгруппы  $\Gamma_\infty$ . Как обычно мы можем определить представление кольца Гекке  $H(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$  на пространстве  $\mathbb{Z}$ -периодических функций (автоморфных форм относительно  $\Gamma_\infty$ ). Например, элемент  $[n^{-1}]$  действует на функции  $e(\tau) = \exp(2\pi i\tau)$  следующим образом

$$e(\tau)|[n^{-1}] = e(n^2\tau).$$

В качестве следствия мы получаем представление тета-функции как суммы по полугруппе операторов Гекке  $\{[n^{-1}], n \in \mathbb{N}\}$  вместо обычной суммы по решетке  $\mathbb{Z}$ . А именно,

$$\theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2\tau) = 1 + 2 \sum_{[n^{-1}] \in \mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^{-1})} e(\tau)|[n^{-1}],$$

или используя формальные обозначения,

$$\theta(\tau) = 1 + 2e(\tau) \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - [p^{-1}])^{-1} = 1 + 2e(\tau) |[\zeta(1)]. \quad (0.6)$$

Это представление объясняет, почему свертка Ранкина модулярной формы с тета-рядом (см. [Sh4]) обладает Эйлеровым произведением. Мы вернемся к этому примеру в §1.

Можно обобщить предложенную выше конструкцию тета-ряда на случай групп ранга два таких, как  $SO(2, n)$ ,  $SU(2, 2)$  ([G5],[G9]), и получить аналитические свойства нестандартных  $L$ -функций для последних двух групп (см. [G4], [G7]). Предложенный метод дает интересные новые примеры и в случае модулярных форм на группе  $Sp_2$ . Эти формы порождают сечения канонического линейного расслоения

над пространством модулей абелевых поверхностей с неглавной поляризацией, что доказывает, например, что это многообразие не является unirational (см. [G11]). Эти же самые „тета-функции“ могут быть использованы для построения нового интегрального представления спинорной  $L$ -функции зигелевых модулярных форм относительно группы  $Sp_2(\mathbb{Z})$  (см. [G4] и [G12]).

Мы хотели бы отметить еще один тип рядов Дирихле из теории зигелевых модулярных форм рода  $n$

$$\sum_M a({}^t M N M) \det(M)^{-s},$$

где  $a(N)$  коэффициенты Фурье модулярной формы Зигеля

$$F(Z) = \sum_{N>0} a(N) \exp(2\pi i \operatorname{tr}(NZ))$$

и  $N, M$  симметричные, полуцелые матрицы. Простым объяснением того, почему ряды Дирихле этого типа раскладываются в Эйлеровы произведения, опять является утверждение о том, что стандартная  $L$ -функция группы  $Sp_n$  раскладывается в параболическом расширении и что множители этого разложения отвечают стандартной  $L$ -функции группы  $GL_n$ . За деталями мы отсылаем к работам Андрианова [A1] и [A2].

Опишем кратко основные результаты данной работы в частном случае ортогональной группы  $SO(\nu)$  и ее параболической подгруппы  $P_2^{(\nu)}$  ранга два. В первых, определена следующая диаграмма колец Гекке:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{H}(GL_2) & & \\ & & \downarrow \pm & & \\ \mathcal{H}(SO(\nu)) & \xrightarrow{\operatorname{Im}} & \mathcal{H}(P_2^{(\nu)}) & \xleftarrow{\operatorname{inc}} \mathcal{E}\mathcal{H}(P_2^{(\nu)}) & \xrightarrow{J} \mathcal{E}\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})/\mathcal{J} \\ \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \\ \mathbb{Q}[x_1^\pm, \dots, x_\nu^\pm]^{W_\nu} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[x_1^\pm, \dots, x_\nu^\pm]. & & \end{array}$$

В этой диаграмме  $\mathcal{H}(SO(\nu))$  — кольцо Гекке ортогональной группы ранга  $\nu$  над локальным полем  $k$ ,  $\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$  — кольцо Гекке параболической подгруппы (см. §2)

$$P_2^{(\nu)} = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{A} & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in SO(\nu), A \in GL_2(k), B \in SO(\nu - 2) \right\},$$

$\mathcal{E}\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$  — подкольцо кольца  $\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$ , порожденного двойными классами  $c$   $A$ , равной единичной матрице, и  $\mathcal{E}\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})/\mathcal{J}$  — фактор-кольцо относительно

главного идеала  $\mathcal{J}$  (см. §5). Через  $\text{Im}$  обозначено вложение колец,  $\pm$  — два специальных вложения „+“ и „-“ кольца Гекке группы  $GL_2(k)$  в кольцо Гекке параболической подгруппы,  $\Phi$  — сферическое отображение Сатаке (см. [S]),  $\text{inc}$  обозначает вложение, а  $J$  стандартный эпиморфизм на фактор кольцо. Мы называем фактор-кольцо  $\mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})/\mathcal{J}$  *кольцом Гекке-Якоби группы Якоби* ранга  $\nu - 2$ , где под *группой Якоби* ранга  $\nu - 2$  мы понимаем полупрямое произведение ортогональной группы этого ранга и *группы Гейзенберга* размерности  $2\nu - 1$ . Группа Якоби не является редуktивной. Кольцо Гекке параболической подгруппы не является коммутативным, но кольцо Гекке-Якоби, определенное выше, коммутативно и конечно порождено.

Стандартная дзета-функция определяется в контексте колец Гекке как многочлен

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{2\nu} (-1)^i Q_i t^i \in \mathcal{H}(SO(\nu))[t],$$

имеющий следующий образ относительно сферического отображения

$$\Phi(Q(t)) = \sum_{i=0}^{2\nu} (-1)^i \Phi(Q_i) t^i = \prod_{i=1}^{\nu} (1 - \mathfrak{p}^{-A} x_i^{-1} t)(1 - \mathfrak{p}^A x_i t),$$

где  $A = \frac{n_0}{2} - 1$ , а  $n_0$  — размерность анизотропного подпространства квадратичного пространства.

Выполняется следующее тождество для локальной дзета-функции (ср. с утверждением леммы о разложении для  $SL_2(\mathbb{Z})$ ): в кольце Гекке параболической подгруппы  $\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$

$$Q(t) = Q_-^{GL_2}(\mathfrak{p}^{-(A+\nu)} t) K(t) Q_+^{GL_2}(\mathfrak{p}^{-(A+\nu)} t), \quad (0.7)$$

где многочлены  $Q_{\pm}^{GL_2}(t)$  являются  $\pm$ -вложениями многочленов Гекке

$$Q^{GL_2}(t) = 1 - T(\pi)t + \mathfrak{p}T(\pi, \pi)t^2$$

группы  $GL_2$  над локальным полем  $k$  с униформизирующим параметром  $\pi$ . Коэффициенты многочлена  $K(t)$  принадлежат подкольцу  $\mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})$ , и его образ в кольце Гекке-Якоби с точностью до константы равен стандартной дзета-функции группы Якоби:

$$J(K(t)) = (1 - \mathfrak{p}^{-n_0} t^2) Q_J^{(\nu-2)}(\mathfrak{p}^{-1} t). \quad (0.8)$$

Соотношение (0.7) между тремя дзета-функциями для ортогональной группы, группы Якоби и группы  $GL_2$  дает нам метод построения аналитического продолжения глобальной дзета-функции ортогональной группы  $SO(2, n)$ . В то же самое время этот метод позволяет доказать инвариантность пространства Маасса группы  $SO(2, n)$  (см. [O, G5]) относительно действия операторов Гекке (см. приложение к работе автора [G4] и [G9], где рассмотрен случай группы  $SU(2, 2)$  или  $SO(2, 4)$ ).

Настоящая статья построена следующим образом. В §1 мы демонстрируем работу метода параболического расширения на примере групп  $SL_2(\mathbb{Z})$  и  $Sp_2(\mathbb{Z})$ . В §2 описываются кольца Гекке параболических подгрупп классических групп. §3 посвящен разложению на множители локальной дзета-функции в кольцах Гекке параболических подгрупп ранга один. В §4 мы доказываем тождество (0.7). Кольцо Гекке-Якоби группы Якоби определяется в §5. Там же мы доказываем тождество (0.8). В §6 мы описываем общую конструкцию, которая объясняет существование разложений, построенных в §1 и в §3–4. Эта теория показывает, что подобные разложения существуют в принципе только для параболических подгрупп параболического ранга 1, 2 или  $\nu$ , где  $\nu$  — индекс Витта классической группы. Мы отмечаем, что для группы  $GL_n$  подобное разложение существует для всех параболических подгрупп (см. [G2, G3]).

Эта работа была поддержана SFB „Discrete Structure in Mathematic“ Университета города Билефельда, где были опубликованы ее основные результаты (см. препринт [G10]). Пользуясь случаем, я хотел бы выразить свою благодарность математическому факультету Билефельдского университета, а также профессору Е. Г. Меннике.

**Обозначения.** В этой статье через  $k$  обозначается  $p$ -адическое локальное поле, т.е. пополнение числового поля относительно неархимедова нормирования. Мы обозначаем через  $\mathcal{K}$  само поле  $k$ , его *квадратичное расширение* или *центральную алгебру с делением* над  $k$ .  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{F}$  — максимальный порядок в  $\mathcal{K}$  и его максимальный идеал.  $\Pi$  — простой элемент идеала  $\mathfrak{F}$ . Мы обозначаем через  $\mathfrak{o}$ ,  $\mathfrak{p}$  соответствующие объекты локального поля  $k$ .  $\pi$  — простой элемент идеала  $\mathfrak{p}$ , числа  $e$  и  $f$  обозначают индексы ветвления и инерции,  $\mathfrak{p}$  — число элементов поля вычетов  $k_{\mathfrak{p}}$  и  $\mathfrak{q} = |\mathfrak{D}/\mathfrak{F}|$ . Через  $x \rightarrow \bar{x}$  обозначается каноническая инволюция алгебры  $\mathcal{K}$  над  $k$ .

Множество  $n$  на  $m$  матриц с элементами из алгебры  $\mathcal{K}$  обозначается через  $M_{n,m}(\mathcal{K})$ ;  ${}^tM$  — транспонированная матрица и  $M^* = {}^t\bar{M}$ . Мы полагаем  $S[M] = M^*SM$  для любых двух матриц  $S, M$  подходящего размера.  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ , и

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с единицами на неглавной диагонали.

## §1. Группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $Sp_2(\mathbb{Z})$

Пример разложения многочлена Гекке группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ , приведенный во введении, имеет очень специальный характер. В этом разложении имеется только два множителя, которые соответствуют  $\pm$ -вложениям дзета-функции Римана.

В этом параграфе мы опишем еще два примера: стандартную  $L$ -функцию для группы  $SL_2(\mathbb{Z})$  и спинорную  $L$ -функцию для группы  $Sp_2(\mathbb{Z})$ .

Мы начнем изложения с определения общего кольца Гекке (см. [A1, F]).

**Определение.** Пара  $(\Gamma, G)$ , где  $\Gamma$  — подгруппа полугруппы  $G$ , называется парой Гекке, если любой двойной смежный класс  $\Gamma g \Gamma$  ( $g \in G$ ) есть объединение конечного числа левых и правых смежных классов относительно  $\Gamma$ . **Кольцо Гекке**  $\mathcal{H}(\Gamma, G)$  пары  $(\Gamma, G)$  — это  $\Gamma$ -инвариантное подпространство векторного  $\mathbb{Q}$ -пространства, состоящего из всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i \Gamma g_i \quad (a_i \in \mathbb{Q}, g_i \in G),$$

где представление группы  $\Gamma$  на этом пространстве определено при помощи левого умножения

$$X \rightarrow X \cdot \gamma = \sum_i a_i \Gamma(g_i \gamma),$$

и для любых двух элементов из  $\mathcal{H}(\Gamma, G)$   $X = \sum_i a_i \Gamma h_i$  и  $Y = \sum_j b_j \Gamma g_j$  их произведение определено следующим образом:

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma(h_i g_j).$$

Это произведение не зависит от выбора представителей  $g_i, h_j$  и  $\mathcal{H}(\Gamma, G)$  — ассоциативное кольцо с единицей.

Элементы  $\Gamma g \Gamma = \sum_i \Gamma g_i$  ( $g \in G$ ) образуют базис векторного пространства  $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ , поэтому наше определение эквивалентно обычному определению кольца Гекке (см. [Sh1]).

Следующая простая лемма, справедливость которой следует из определения, будет очень полезным инструментом в дальнейшем изложении (см. [A1], лемма 1.1.3).

**Лемма о вложении.** Пусть даны две пары Гекке  $(\Gamma_0, G_0)$  и  $(\Gamma, G)$ . Предположим, что  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  и  $\Gamma G_0 = G$ . Согласно второму из этих условий, любой элемент  $X \in \mathcal{H}(\Gamma, G)$  может быть записан в виде  $X = \sum_i a_i \Gamma g_i$ , где  $g_i \in G_0$ . В этом случае мы полагаем

$$\text{Im}(X) = \sum_i a_i \Gamma_0 g_i.$$

Отображение  $\text{Im}$  не зависит от выбора элементов  $g_i \in G_0$  в левых смежных классах  $\Gamma g_i$  и является гомоморфным вложением кольца Гекке  $\mathcal{H}(\Gamma, G)$  в кольцо  $\mathcal{H}(\Gamma_0, G_0)$

$$\text{Im} : \mathcal{H}(\Gamma, G) \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma_0, G_0). \quad (1.1)$$

Мы будем отождествлять кольцо  $\mathcal{H}(\Gamma, G)$  с его образом в кольце  $\mathcal{H}(\Gamma_0, G_0)$  относительно этого отображения.

**Пункт 1: стандартная  $L$ -функция для  $SL_2(\mathbb{Z})$ .**

Возьмем „четные“ кольца Гекке специальной линейной группы и ее параболической подгруппы, а именно  $\mathcal{H}^{(0)}(SL_2) = \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Q}))$  и  $\mathcal{H}_\infty^{(0)} = \mathcal{H}(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$ , где

$$\Gamma_\infty = \Gamma_\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В соответствии с предыдущей леммой кольцо  $\mathcal{H}_\infty^{(0)}$  является расширением кольца  $\mathcal{H}^{(0)}(SL_2)$ . Введем следующие элементы кольца Гекке  $\mathcal{H}_\infty^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} [n^{-1}] &= \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}, \\ [n^{+1}] &= \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \sum_{b \in n^{-1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n^{-1} & b \\ 0 & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из определения колец Гекке ясно, что отображения  $i_\pm : n \rightarrow [n^{\pm 1}]$  — вложения мультипликативной полугруппы натуральных чисел  $\mathbb{N}^\times$  и группы „-1“-степеней натуральных чисел  $\mathbb{N}^{-1}$  в кольцо  $\mathcal{H}_\infty^{(0)}$ . Мы можем распространить эти вложения по линейности до вложений формальных колец  $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times]$  и  $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^{-1}]$ , которые являются кольцами Гекке  $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times)$  тривиальной группы. Как было показано во Введении, можно определить три коммутативных подкольца в кольце Гекке  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Q}[\mathbb{N}^{-1}] & \\ & i_- \downarrow & \\ \mathcal{H}^{(0)}(SL_2) & \xrightarrow{\text{Im}} \mathcal{H}_\infty & \xleftarrow{i_+} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times]. \end{array} \quad (1.2)$$

Определим теперь локальный  $p$ -множитель  $R_p(t)$  стандартной  $L$ -функции специальной линейной группы.

По определению

$$R_p(t) = 1 - T^{(0)}(p^2)t + pT^{(0)}(p^2)t^2 - p^3t^3,$$

где  $T^{(0)}(p^2) = SL_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}) + 1 = T(p^2)T(p, p)^{-1}$  (см. (0.1), (0.3)).

Напомним, что существует изоморфизм между локальным кольцом Гекке и кольцом симметрических многочленов (изоморфизм Сатаке см. [S])  $\mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z}_p), SL_2(\mathbb{Q}_p))$

$$\Phi : \mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Q}[x, x^{-1}]^{\text{sym}},$$

где по определению  $\Phi_p(T^{(0)}(p^2)) = x + x^{-1} + p$ . Следовательно,

$$\Phi_p(R_p(t)) = (1-t)(1-x^{-1}t)(1-xt).$$

**Предложение 1.1.** Многочлен Гекке  $R_p(t) \in \mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z}))[t]$  раскладывается на множители в расширении  $\mathcal{H}_\infty^{(0)}$  кольца Гекке  $\mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z}))$

$$R_p(t) = (1 - [p^{-1}]t)(1 - \nabla_p t + (p\nabla_p - p^2)t^2)(1 - [p^{+1}]t),$$

$$\text{где } \nabla_p = \sum_{b \in p^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Для доказательства утверждения леммы достаточно проверить следующие тождества:

$$[p^{-1}]\nabla_p = p[p^{-1}] \quad \nabla_p[p^{+1}] = p[p^{+1}] \quad [p^{-1}][p^{+1}] = p^2.$$

**Замечание.** Первый и третий множители являются вложениями  $p$ -множителя  $\zeta$ -функции Римана. Второй множитель также связан с этим многочленом. Если мы рассмотрим представление параболического кольца Гекке на пространстве периодических функций, то мы получим равенство

$$\exp(2\pi i\tau) | (1 - \nabla_p t + (p\nabla_p - p^2)t^2) = (1 - p^2 t^2) \exp(2\pi i\tau).$$

В теоремах 1 и 3 будут построены аналогичные разложения для классических групп.

Первый фактор последнего разложения уже встречался в представлении тета-функции (0.6). Это является естественным объяснением того факта, почему свертка Ранкина тета-функции и собственной функцией всех операторов Гекке раскладывается в эйлерово произведение (см. [Sh4]).

**Следствие 1.2. (Шимура).** Пусть

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a(n) \exp(2\pi i n \tau)$$

— модулярная форма веса  $k$  относительно группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Предположим, что  $f(\tau)$  является собственной функцией всех операторов Гекке. Заменяем операторы Гекке в многочлене Гекке  $R_p(t)$  на соответствующие собственные значения. Тогда для всех комплексных  $s$  с достаточно большой вещественной частью выполняется следующее тождество

$$\zeta(2s - 2) \sum_{n \geq 1} a(n^2) n^{2-k-s} = a(1) \prod_p R_{p,f}(p^{-s})^{-1}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим такое же представление кольца Гекке  $\mathcal{H}^{(0)}(\Gamma_\infty)$  на коэффициентах Фурье модулярных форм, как и в доказательстве следствия во Введении; тогда справедливы равенства

$$a(m)|_k[n^{+1}] = n^{2-k} a(mn^2), \quad a(m)|_k[n^{-1}] = \begin{cases} n^k a(m/n^2), & \text{если } m \equiv 0 \pmod{n^2}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, для произвольного натурального  $m$ , которое взаимно просто с  $p$ ,

$$\begin{aligned} R_{p,f}(t) \sum_{\delta \geq 0} a(mp^{2\delta}) p^{(2-k)\delta} t^\delta &= R_{p,f}(t) a(m)|_k \sum_{\delta \geq 0} [p^{+\delta}] t^\delta = a(m)|_k (R_p(t)(1 - [p^{+1}]t)^{-1}) \\ &= a(m)|_k (1 - [p^{-1}]t)(1 - \nabla_p t + (p\nabla_p - p^2)t^2) \\ &= (1 - p^2 t^2) a(m). \end{aligned}$$

Используя это тождество последовательно для всех простых, мы получаем утверждение леммы.

Это доказательство показывает, что так же, как и во Введении, ряд Дирихле следствия 1.2 можно представить в виде действия бесконечного произведения на первом коэффициенте Фурье модулярной формы

$$\sum_{n \geq 1} a(n^2) n^{2-k-s} = a(1)|_k \prod_p (1 - [p^{+1}]p^{-s})^{-1} \quad (1.3)$$

(ср. с (0.5)).

**Пункт 2: Spin-L-функция группы  $Sp_2(\mathbb{Z})$ .**

Рассмотрим случай симплектической группы ранга два

$$Sp_2(\mathbb{Z}) = \{g \in M_4(\mathbb{Z}) : {}^t g J_2 g = J_2\}, \text{ где } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$$

и ее параболической подгруппы ранга один

$$P_1(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & * \\ * & * & * & * \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Лемма о вложении выполняется для кольца Гекке  $\mathcal{H}(Sp_2) = \mathcal{H}(Sp_2(\mathbb{Z}), G)$ , где

$$G = \{g \in M_4(\mathbb{Z}) : {}^t g J_2 g = \mu(g) J_2, \mu(g) \in \mathbb{N}\},$$

и для кольца Гекке  $\mathcal{H}(P_1) = \mathcal{H}(P_1, GP_1)$  параболической подгруппы  $P_1$ . Как и в случае группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ , мы можем определить коммутативные подкольца параболического расширения  $\mathcal{H}(P_1)$ . Вместо  $\pm$ -вложений формального кольца  $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times] = \mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times)$  мы рассмотрим вложения  $j_\pm$  кольца Гекке группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Для этого достаточно определить вложения образующих  $T(p)$ ,  $T(p, p)$  (см. (0.1)). По определению  $j_\pm(T(p)) = T_\pm(p)$  и  $j_\pm(T(p, p)) = \Lambda_\pm(p)$ , где

$$\begin{aligned} T_-(p) &= P_1(\mathbb{Z}) \text{diag}(1, p, p, 1) P_1(\mathbb{Z}), & T_+(p) &= P_1(\mathbb{Z}) \text{diag}(1, 1, p, p) P_1(\mathbb{Z}), \\ \Lambda_-(p) &= P_1(\mathbb{Z}) \text{diag}(p, p^2, p, 1) P_1(\mathbb{Z}), & \Lambda_+(p) &= P_1(\mathbb{Z}) \text{diag}(p, 1, p, p^2) P_1(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Эти вложения задают следующие коммутативные подкольца кольца Гекке  $\mathcal{H}(P_1)$

$$\mathcal{H}(Sp_2) \xrightarrow{\text{Im}} \mathcal{H}(P_1) \xleftarrow{j_{\pm}} \mathcal{H}(SL_2). \quad (1.4)$$

Утверждение о том, что отображение  $j_-$  — гомоморфное вложение, следует из взаимно однозначного соответствия между левыми смежными классами в разложении двойных классов  $T(p) = SL_2(\mathbb{Z}) \text{diag}(1, p)SL_2(\mathbb{Z})$  и  $T_-(p)$ . Отображение  $j_+$  двойственно вложению  $j_-$  относительно инволюции  $*$  кольца Гекке  $\mathcal{H}(P_1)$

$$* : P_1(\mathbb{Z})gP_1(\mathbb{Z}) \rightarrow P_1(\mathbb{Z})\mu(g)g^{-1}P_1(\mathbb{Z}) \quad (1.5)$$

(см.[A1], предложение 3.1.7). Как и в случае группы  $SL_2(\mathbb{Z})$  определим элемент  $T(n) \in \mathcal{H}(Sp_2)$  как сумму всех различных левых смежных классов с показателем  $\mu$ , равным  $n$ :

$$T(n) = \sum_{g \in G(\mathbb{Z}), \mu(g)=n} Sp_2(\mathbb{Z})gSp_2(\mathbb{Z}).$$

Хорошо известно, что аналог формального степенного ряда (0.1) для симплектической группы  $Sp_2$  является рациональной функцией (см. [Sh2] и [A1]):

$$\sum_{\delta \geq 0} T(p^\delta)t^\delta = N_p(t)Q_p^{Sp}(t)^{-1}, \quad (1.6)$$

где  $N_p(t)$  — многочлен степени два над  $\mathcal{H}(Sp_2)$  и

$$Q_p^{Sp}(t) = 1 - T(p)t + p(T_{1,p} + (p^2 + 1)\Delta_p)t^2 - p^3\Delta_p T(p)t^3 + p^6\Delta_p^2 t^2,$$

где

$$T_{1,p} = Sp_2(\mathbb{Z}) \text{diag}(1, p, p^2, p)Sp_2(\mathbb{Z}), \quad \Delta_p = Sp_2(\mathbb{Z})pE_4Sp_2(\mathbb{Z}).$$

Для этого многочлена выполняется аналог предложения 1.1 (см. [G8], (4.7)).

**Предложение 1.3.** *Многочлен  $Q_p^{Sp}(t)$  раскладывается на множители над параболическим расширением  $\mathcal{H}(P_1)$ :*

$$Q_p^{Sp}(t) = j_-(Q_p(t))(1 + p(\nabla_p - p\Delta_p)t^2)j_+(Q_p(t)),$$

где первый и третий множители —  $j_{\pm}$ -образы многочлена Гекке группы  $GL_2$  ( $j_{\pm}(t) = t$ ) и

$$\nabla_p = \sum_{r \bmod p} P_1(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & r \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Используя теорему об элементарных делителях для симплектической группы, мы можем вычислить образ образующих кольца Гекке симплектической группы в параболическом расширении:

$$T(p) = T_-(p) + T_+(p), \quad T_{1,p} = \Lambda_-(p) + \Lambda_+(p) + P_1(\mathbb{Z}) \text{diag}(1, p, p^2, p)P_1(\mathbb{Z}) + \nabla_p - \Delta_p.$$

Коэффициенты  $T_-(p)$  и  $\Lambda_-(p)$  многочлена  $j_-(Q_p(t)) = 1 - T_-(p)t + p\Lambda_-(p)t^2$  имеют те же разложения на левые смежные классы, что и элементы  $T(p)$  и  $T(p, p)$  кольца Гекке группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ , и легко проверить справедливость следующих тождеств:

$$\Lambda_-(p)T_+(p) = p^2\Delta_p T_-(p), \quad T_-(p)(\nabla_p - p\Delta_p) = 0, \quad \Lambda_-(p)(\nabla_p - p\Delta_p) = 0.$$

Используя антиавтоморфизм  $*$  (1.5) кольца  $\mathcal{H}(P_1)$ , мы получаем

$$T_-(p)\Lambda_+(p) = p^2\Delta_p T_+(p), \quad (\nabla_p - p\Delta_p)T_+(p) = 0, \quad (\nabla_p - p\Delta_p)\Lambda_+(p) = 0.$$

Учитывая тождество

$$T_-(p)T_+(p) = pP_1(\mathbb{Z}) \operatorname{diag}(1, p, p^2, p)P_1(\mathbb{Z}) + (p^3 + p^2)\Delta_p,$$

мы получаем разложение предложения.

Как и в случае предложения 1.1 для группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ , можно применить разложение локального многочлена Гекке к теории модулярных форм относительно симплектической группы  $Sp_2(\mathbb{Z})$ , т. е. к теории Зигелевых модулярных форм рода два на верхней полуплоскости Зигеля  $H_2$ , где

$$H_2 = \{Z = {}^tZ \in M_2(\mathbb{C}), \operatorname{Im}(Z) > 0\}.$$

Вещественная симплектическая группа  $Sp_2(\mathbb{R})$  действует на этом пространстве как группа комплексно-линейных автоморфизмов

$$Z \rightarrow M\langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad \text{если } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{R}).$$

Модулярная форма Зигеля веса  $k$  и рода два — это голоморфная функция  $F: H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющая функциональному уравнению

$$J(M, Z)^{-k} F(M\langle Z \rangle) = F(Z) \quad \text{для любого } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z}),$$

с фактором автоморфности  $J(M, Z) = \det(CZ + D)$ .

Определено следующее представление кольца Гекке (операторы Гекке) симплектической группы на конечномерном пространстве модулярных форм Зигеля веса  $k$ :

$$F \rightarrow F|_k X = \sum_i a_i \mu(g_i)^{2k-3} J(g_i, Z)^{-k} F(g_i\langle Z \rangle),$$

где  $X = \sum_i a_i Sp_2(\mathbb{Z})g_i \in \mathcal{H}(Sp_2)$ .

Известно, что собственные функции всех операторов Гекке образуют базис в пространстве зигелевых форм. Если  $F$  одна из таких функций, то определена так называемая  $L$ -функция Андрианова  $Z_F(s)$  модулярной формы  $F$

$$Z_F(s) = \prod_p Q_{p,F}^{Sp}(p^{-s})^{-1},$$

где многочлен  $Q_{p,F}^{Sp}(t)$  получается из многочлена  $Q_p^{Sp}(t)$  заменой элементов кольца Гекке в коэффициентах многочлена  $Q_p^{Sp}(t)$  на соответствующие собственные значения. Эта  $L$ -функция является *спинорной*  $L$ -функцией в классификации Ленглендса.

Пусть  $F(Z)$  — параболическая форма Зигеля веса  $k$ , где  $Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix} \in H_2$ . Из определения области  $H_2$  следует, что компоненты  $\tau$  и  $\omega$  переменной  $Z$  принадлежат обычной верхней полуплоскости  $H_1 = \{\tau = u + iv, v > 0\}$ , а  $z \in \mathbb{C}$ . Разложение Фурье-Якоби формы  $F$  — это разложение Фурье относительно переменной  $\omega$

$$F\left(\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}\right) = \sum_{m \geq 1} f_m(\tau, z) \exp(2\pi i m \omega).$$

Функции  $f_m(\tau, z)$  — примеры модулярных функций Якоби (см. [E-Z, G8]).

**Определение.** *Голоморфная функция*

$$\phi(\tau, z); H_1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

называется *модулярной формой Якоби* индекса  $m \geq 1$  и веса  $k$ , если функция

$$\tilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z) \exp(2\pi i m \omega)$$

является *модулярной формой* веса  $k$  относительно параболической группы  $P_1(\mathbb{Z})$ , т.е.,

1.  $\tilde{\phi}|_k M = \tilde{\phi}$  для любого  $M \in P_1(\mathbb{Z})$ ;
2. Функция  $\tilde{\phi}|_k$  ограничена в области  $\text{Im } Z > c > 0$ .

Можно определить два представления кольца Гекке  $\mathcal{H}(P_1)$  параболической подгруппы  $P_1(\mathbb{Z})$  на пространстве коэффициентов Фурье-Якоби. Первое представление — это представление  $\mathcal{H}(P_1)$  на пространстве всех модулярных форм Якоби веса  $k$

$$\tilde{f}_m \rightarrow \tilde{f}_m(Z)|_k X = \sum_i a_i \mu(g_i)^{2k-3} J(g_i, Z)^{-k} \tilde{f}_m(g_i(Z)),$$

где  $X = \sum_i a_i P_1(\mathbb{Z}) g_i \in \mathcal{H}(P_1)$ ; второе — представление на пространстве коэффициентов Фурье-Якоби:

$$f_m|_k X = \text{коэффициент Фурье-Якоби с номером } m \text{ функции } F|_k X.$$

Следующая лемма легко следует из данного определения.

**Лемма 1.4.** Пусть  $f_1(\tau, z)$  — коэффициент Фурье-Якоби модулярной формы  $F$ , тогда выполняются следующие равенства:

$$f_m(\tau, z)|_k T_+(n) = \tilde{f}_{mn}|_k T_+(n) \exp(-2\pi i m \omega),$$

$$f_m(\tau, z)|_k T_-(n) = \begin{cases} \tilde{f}_{m/n}|_k T_-(n) \exp(-2\pi i m \omega), & \text{если } m \equiv 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как и в следствии 1.2 предложения 1.1 мы можем построить ряд Дирихле с эйлеровым произведением, используя разложение предложения 1.3 (см. формулу в заключительной части статьи [G8]).

**Следствие 1.5.** Пусть дана модулярная форма Зигеля веса  $k$

$$F\left(\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}\right) = \sum_{m \geq 1} f_m(\tau, z) \exp(2\pi i m\omega).$$

Предположим, что  $F$  является собственной функцией всех операторов Гекке. Выберем натуральное число  $l$  такое, что  $f_l \neq 0$  и что коэффициенты Фурье-Якоби  $f_{l/d}$  модулярной формы  $F$  равны нулю для всех делителей  $d > 1$  индекса  $l$ . Тогда для любого комплексного  $s$  с достаточно большой вещественной частью выполняется следующее тождество:

$$L(2s - 2k + 4, \chi_l) \sum_{n \geq 1} f_{ln}(\tau, z) |kT_+(n) n^{-s} = f_l(\tau, z) Z_F(s),$$

где  $L(2s - 2k + 4, \chi_l)$  —  $L$ -функция Дирихле, и  $\chi_l$  — главный характер по модулю  $l$ .

**Доказательство.** Формальный степенной ряд

$$\sum_{\delta \geq 0} T_+(p^\delta) t^\delta$$

является  $j_+$ -образом ряда Гекке группы  $GL_2$  (см. (0.4)) и, следовательно, рациональной функцией. Ее знаменатель — правый множитель локального многочлена Гекке  $Q_p^{Sp}(t)$ . Как и в доказательстве следствия 1.2, можно получить следующее тождество в кольце формальных степенных рядов при помощи леммы 1.4 и предложения 1.3

$$\begin{aligned} Q_{p,F}^{Sp}(t) \sum_{\delta \geq 0} f_{lp^\delta} |kT_+(p^\delta) t^\delta T_+(p^\delta) t^\delta &= f_l |kQ_p^{Sp}(t) (1 - T_+(p)t + p\Lambda_+(p)t^2)^{-1} \\ &= f_l |k(1 - T_-(p)t + p\Lambda_-(p)t^2) (1 + p(\nabla_p - p\Delta_p)t^2) \\ &= f_l(\tau, z) |k(1 + p(\nabla_p - p\Delta_p)t^2) \\ &= \begin{cases} (1 - p^{2k-4}t^2) f_l, & \text{если } l \equiv 0 \pmod{p}, \\ f_l, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно применить эти тождества последовательно для всех простых  $p$ .

Так же, как и в (0.5) и (1.3), мы можем переписать сумму в правой части последнего тождества, используя бесконечное эйлерово произведение, связанное с  $j_+$ -вложением  $L$ -функции Гекке (см. (0.4))

$$\sum_{n \geq 1} f_{ln}(\tau, z) |kT_+(n) n^{-s} = f_l(\tau, z) |k \prod j_+(1 - T(p)p^{-s} + pT(p,p)p^{-2s})^{-1}.$$

Можно использовать представление последнего следствия для построения аналитического продолжения спинорной  $L$ -функции зигелевых модулярных форм (см. [Gr-12]).

Согласно известному классическому изоморфизму, группа  $SL_2/\{\pm E_2\}$  изоморфна группе  $SO(1, 2)$ , а группа  $Sp_2/\{\pm E_4\}$  — группе  $SO(2, 3)$ , и мы можем рассматривать разложения предложений 1.1 и 1.3 как разложение локальной дзета-функции ортогональной группы  $SO(1, 2)$  сигнатуры  $(1, 2)$  в параболическом расширении, отвечающем параболической подгруппе ранга один и как разложение дзета-функции группы  $SO(2, 3)$  в параболическом расширении, отвечающем параболической подгруппе ранга два. В следующих параграфах мы построим аналоги этих разложений для произвольных ортогональных групп над локальным полем.

## §2. Кольца Гекке параболических подгрупп

Пусть  $V$  конечномерное векторное пространство над полем  $\mathcal{K}$ , снабженное  $\varepsilon$ -эрмитовой формой  $S$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Это означает, что  $S$  невырожденное полуторалинейное отображение  $V \times V \rightarrow \mathcal{K}$  такое, что  $S(xu, yv) = \bar{x}S(u, v)y$ ,  $S(v, u) = \overline{S(u, v)}$  для любых  $u, v \in V$ ,  $x, y \in \mathcal{K}$ , и из условия  $S(u, V) = 0$  следует, что  $u = 0$ . Мы будем рассматривать следующие четыре случая:

- $(SO)$ :  $\mathcal{K} = \mathbb{k}$ ,  $\varepsilon = 1$  и  $S$  — симметрическая, билинейная;
- $(Sp)$ :  $\mathcal{K} = \mathbb{k}$ ,  $\varepsilon = -1$  и  $S$  — знакопеременная, билинейная;
- $(U)$ :  $\mathcal{K}$  — квадратичное расширение,  $\varepsilon = 1$  и  $S$  — эрмитовая;
- $(U^+)$ :  $\mathcal{K}$  — алгебра с делением над  $\mathbb{k}$ ,  $\varepsilon = 1$   
и  $S$  — кватернионная эрмитовая форма.

Конечно порожденный  $\mathcal{O}$ -модуль  $L$  в  $V$  называется решеткой, если  $\mathcal{K}L = V$ . Решетка  $L$  называется  $\mathfrak{P}^\ell$ -целой ( $\ell \in \mathbb{Z}$ ), если выполняются следующие два условия (см. [S], [H-S]):

- (1)  $S(u, v) \in \mathfrak{P}^\ell$  для любых  $(u, v) \in L \times L$ ;
- (2) для любого  $u \in L$  существует  $x \in \mathfrak{P}^\ell$  такой, что  $S(u, u) = \varepsilon x + \bar{x}$ .

Решетка  $L$  называется  $\mathfrak{P}^\ell$ -максимальной, если она максимальная в множестве  $\mathfrak{P}^\ell$ -целых решеток.

Согласно результатам Эйхлера [E], Брюа [B], Шимуры [Sh3] и Сатаке [S], существует система векторов  $\{e_i, e'_i\}$  такая, что  $\sum_{i=1}^{\nu} \mathcal{K}e_i$  является максимальным изотропным подпространством пространства  $V$ ,  $S(e_i, e_j) = S(e'_i, e'_j) = 0$ ,  $S(e_i, e'_i) = 1$  для любых  $i, j$  и

$$L = \sum_{i=1}^{\nu} \mathcal{O}e_i + \sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{P}^{\ell} e'_i + L_0^{(\ell)},$$

где  $L_0^{(\ell)}$  — единственная  $\mathfrak{P}^\ell$ -максимальная решетка в анизотропном подпространстве  $V_0 = (\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{K}e_i + \sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{K}e'_i)^{\perp}$ , а именно

$$L_0^{(\ell)} = \{x \in V_0 : S(x, x) \in \text{tr}_{\varepsilon}(\mathfrak{P}^{\ell})\}, \quad (2.1)$$

где для любого  $x \in \mathcal{K}$

$$\mathrm{tr}_\varepsilon(x) = \varepsilon x + \bar{x}. \quad (2.2)$$

Зафиксируем  $\mathfrak{P}^\ell$ -максимальную решетку  $L$  в  $V$  и выберем  $\mathfrak{D}$ -базис  $(f_1, \dots, f_{n_0})$  решетки  $L_0^{(\ell)}$ . Мы будем отождествлять элементы пространства  $V$  с координатными столбцами в базисе  $(e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_1, \dots, e'_1)$  и форму  $S$  с ее матрицей в этом базисе

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_\nu \\ 0 & S_0 & 0 \\ \varepsilon I_\nu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(u, v) = u^* S v, \quad u, v \in \mathcal{K}^{2\nu+n_0}.$$

Мы напомним, что  $n_0 = 0$  в случае симплектической группы,  $0 \leq n_0 \leq 4$  в случае ортогональной группы,  $0 \leq n_0 \leq 2$  для унитарной группы  $0 \leq n_0 \leq 1$  и для групп  $U^+$ .

Мы определим унитарную (ортогональную, симплектическую) группы  $G$  и  $G_0$  как связную компоненты групп

$$G' = \{g \in GL_{2\nu+n_0}(\mathcal{K}) : S[g] = \mu(g)S, \quad \mu(g) \in \mathcal{K}^\times\},$$

$$G'_0 = \{g \in GL_{n_0}(\mathcal{K}) : S_0[g] = \mu_0(g)S_0, \quad \mu_0(g) \in \mathcal{K}^\times\}.$$

Для группы  $G$  мы определим целый положительный индекс  $f$

$$f\mathbb{Z} = \mathrm{ord}_p \mu(G). \quad (2.3)$$

Для максимальной решетки  $L$  определена максимальная открытая компактная подгруппа

$$U = \{u \in G : uL = L\} = \left\{ u \in G : u, u^{-1} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{P}^\ell & \mathfrak{P}^\ell & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы введем следующие стандартные подгруппы (см. статью Сатаке [S]): связную  $k$ -замкнутую подгруппу  $H$ , состоящую только из полупростых элементов, и  $k$ -унипотентную подгруппу  $N$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} d_0 I_\nu (D^*)^{-1} I_\nu & & \\ & D_0 & \\ & & D \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} d_0 \in \mathcal{K}^\times, D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_\nu), d_i \in \mathcal{K}^\times \\ D_0 \in G_0, \mu_0(D_0) = d_0 \end{array} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} I_\nu (X^*)^{-1} I_\nu & * & * \\ 0 & E_{n_0} & * \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Хорошо известно, что  $G = UHN = UHU$ .

Мы обозначим через  $P_m$  параболическую подгруппу группы  $G$ , состоящую из элементов, сохраняющих изотропное подпространство  $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$

$$P_m = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in G, A \in \text{GL}_m(\mathcal{K}) \right\}.$$

$S_{\nu-m}$  — ограничение формы  $S$  на пространство  $L_{\nu-m} \otimes \mathcal{K}$  с решеткой

$$L_{\nu-m} = \mathcal{D}e_{m+1} + \dots + \mathcal{D}e_\nu + \mathcal{D}f_1 + \dots + \mathcal{D}f_{n_0} + \mathfrak{P}^l e'_\nu + \dots + \mathfrak{P}^l e'_{m+1}. \quad (2.4)$$

Мы можем параметризовать элементы группы  $P_m$  следующим стандартным образом. Если  $w \in P_m$ , тогда

$$\begin{aligned} w = \gamma \cdot n &= [A, 0, 0, B] \cdot [E_m, X, Z, E] \\ &= \begin{pmatrix} \mu(B)I_m(A^{-1})^*I_m & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_m & -\varepsilon I_m X^* S_{\nu-m} & I_m Z \\ 0 & E_{2n+n_0} & X \\ 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A \in \text{GL}_m(\mathcal{K}), \quad B \in G(S_{\nu-m}) \quad (\text{группа преобразований индекса Витта } \nu - m), \\ X \in M_{2n+n_0, m}(\mathcal{K}), \quad Z \in M_m(\mathcal{K}) \quad (n = \nu - m), \end{aligned}$$

где выполняется следующее тождество:  $\varepsilon Z + Z^* + S_{\nu-m}[X] = 0$ . Мы введем следующие обозначения:

$$[A, X, Z, B] = \begin{pmatrix} \mu(B)I_m(A^{-1})^*I_m & -\varepsilon I_m(A^{-1})^* X^* S_{\nu-m} B & I_m Z \\ 0 & B & X \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$A \in \text{GL}_m(\mathcal{K}), \quad B \in G(S_{\nu-m}), \quad X = (x_1, \dots, x_m) \in M_{2(\nu-m)+n_0, m}(\mathcal{K}), \quad Z \in M_m(\mathcal{K}),$$

удовлетворяющие следующему тождеству

$$\varepsilon A^* Z + Z^* A + S_{\nu-m}[X] = 0.$$

Пусть  $U_m = P_m \cap U$  — компактная подгруппа группы  $P_m$ .

**Лемма 2.1.** *Элементы*

$$\gamma = [E_m, X, Z_X + Z, E_{2(\nu-m)+n_0}],$$

где  $X = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $x_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) — вектор решетки  $\mathfrak{P}^{-l} L_{\nu-m}$ ,  $Z_X$  — произвольная матрица в  $M_m(\mathfrak{P}^{-l})$ , удовлетворяющая тождеству

$$\text{Tr}_\varepsilon(Z_X) + S_{\nu-m}[X] = 0 \quad (\text{Tr}_\varepsilon(Y) = \varepsilon Y + {}^t \bar{Y}),$$

и  $Z$  — произвольная  $\mathfrak{P}^{-\ell}$ -целая матрица с  $\text{Tr}_\varepsilon(Z) = 0$ , образуют унитарную подгруппу  $NU_m$  компактной группы  $U_m$ .

**Доказательство.** Разложим столбец  $x_i$  матрицы  $X$  на три части, отвечающие  $(e_j)$ -,  $(f_i)$ -,  $(e'_j)$ -компонентам стандартного базиса  $L_{\nu-m}$ . Согласно определению группы  $U_m$ ,

$${}^t x_i = ({}^t x'_i, {}^t x_i^{(0)}, {}^t x''_i) \in ((\mathfrak{P}^{-\ell})^{\nu-m}, (\mathfrak{P}^{-\ell})^{n_0}, (\mathfrak{O})^{\nu-m}), \quad Z_X, Z \in M_m(\mathfrak{P}^{-\ell}),$$

и для любого  $1 \leq i \leq m$

$$\text{tr}_\varepsilon(z_{ii}^X) + \text{tr}_\varepsilon((x'_i)^* I_m x''_i) = -S_0[x_i^{(0)}].$$

Следовательно,  $S_0[x_i^{(0)}] \in \text{tr}_\varepsilon(\mathfrak{P}^{-\ell})$  и  $x_i^{(0)} \in L_0^{(-l)} = \mathfrak{P}^{-\ell} L_0^{(l)}$ . Для любого  $x_i \in \mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) существует  $z_{ii}^X \in \mathfrak{P}^{-\ell}$ , удовлетворяющий приведенному выше равенству. Для любого  $z_{ij}^X \in \mathfrak{P}^{-\ell}$  мы можем определить

$$-z_{ji}^X = \varepsilon z_{ij}^X + x_i^* S_{\nu-m} x_j \in \mathfrak{P}^{-\ell},$$

следовательно, существует подходящая матрица  $Z_X$ . Лемма доказана.

Пары  $(U, G)$ ,  $(P_m, U_m)$  являются парами Гекке (см. §1). Хорошо известно, что  $UP_m = G$ , следовательно, лемма о вложении из §1 выполняется для пар Гекке  $(U, G)$ ,  $(U_m, P_m)$ . Мы будем отождествлять кольцо  $\mathcal{H}(U, G)$  с его образом  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  при вложении

$$\text{Im} : \mathcal{H}(U, G) \hookrightarrow \mathcal{H}(U_m, P_m). \quad (2.6)$$

Структура колец Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$  для максимально компактных групп  $U$  была определена Сатаке в [S]. Кольцо  $\mathcal{H}$  является коммутативным кольцом, изоморфным кольцу  $W_G$ -симметричных многочленов ( $W_G$  — группа Вейля группы  $G$ ). Напомним определение этого изоморфизма.

Произвольный левый смежный класс  $U_m g$  для  $g \in P_m$  содержит некоторый элемент треугольного вида

$$U_m g = U_m \mathbb{D}(\mathbf{d}) N,$$

где  $(\mathbf{d}) = (d_0; d_1, \dots, d_\nu) \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$ ,

$$\mathbb{D}(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \mu(\mathbf{a})^{d_0} I_m (D^*(\mathbf{d}))^{-1} I_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^{d_0} & 0 \\ 0 & 0 & D(\mathbf{d}) \end{pmatrix}, \quad D(\mathbf{d}) = \text{diag}(\Pi^{d_1}, \dots, \Pi^{d_\nu}), \quad (2.7)$$

$\mathbf{a}$  обозначает элемент группы  $G_0$  с  $\text{ord}_p \mathbf{a} = f$  (см. (2.3)) и  $N$  — верхнетреугольная унитарная матрица. Если размерность  $n_0$  анизотропной решетки  $L_0$  равна нулю, то мы положим  $\mu(\mathbf{a}) = \pi$ . Определен следующий гомоморфизм (сферическое отображение) кольца  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  в кольцо многочленов  $\mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}]$ :

$$\Phi_\nu \left( \sum_{i,l} a_{il} U_m \mathbb{D}(\mathbf{d}_i) N_{il} \right) = \sum_{i,l} a_{il} \prod_{j=0}^{\nu} (x_j \mathfrak{q}^{-j})^{d_{ij}},$$

где  $q$  число элементов поля  $\mathcal{D}/\mathfrak{F}$  и  $\mathbf{d}_i = (d_{i1}, \dots, d_{i\nu})$ .

Мы обозначим через  $W_\nu$  группу, порожденную перестановками переменных  $(x_1, \dots, x_\nu)$  и преобразованиями

$$w_i = \langle x_0 \mapsto x_0(\mathbf{p}^A x_i)^{ef}, \quad x_i \mapsto \mathbf{p}^{-2A} x_i^{-1}, \quad x_j \mapsto x_j \ (j \neq 0, i) \rangle, \quad (1 \leq i \leq \nu),$$

где  $e$  индекс ветвления поля  $\mathcal{K}$ ,  $f$  индекс (2.3) группы  $G$  и

$$A = \begin{cases} 0 & \text{для группы } Sp, \quad \frac{n_0}{2} - 1 & \text{для группы } O, \\ \frac{n_0 - 1}{e} & \text{для группы } U, \quad n_0 - \frac{1}{2} & \text{для группы } U^+. \end{cases} \quad (2.8)$$

Если  $G$  — ортогональная группа с  $n_0 = 0$ , то в этом случае группа  $W_\nu$  порождена всеми перестановками переменных и преобразованиями  $w_i w_j$  ( $1 \leq i < j \leq \nu$ ).

**Теорема Сатаке** (см. [S], теорема 3.). *Отображение  $\Phi_\nu$  является  $\mathbb{Q}$ -изоморфизмом кольца Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$  на кольцо многочленов  $\mathbb{Q}^{W_\nu}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}]$ , инвариантных относительно группы  $W_\nu$ .*

Как было показано в §1, кольца Гекке параболических подгрупп имеют значительно более сложную структуру. Кольцо  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  содержит делители, следовательно, ядро гомоморфизма  $\Phi_\nu$  не пусто. Определим специальное подпространство  $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$  всех диагональных классов в „параболическом расширении“  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  (см. обозначения (2.5))

$$\mathcal{DM}(U_m, P_m) = \left\{ \sum_i a_i U_m [A_i, 0, 0, B_i] U_m \in \mathcal{H}(U_m, P_m) \right\}. \quad (2.9)$$

Мы назовем элементы пространства  $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$  регулярными элементами. Основанием этого определения является следующая

**Лемма 2.2.** *Ограничение гомоморфизма  $\Phi_\nu$  на подпространство  $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$  — инъективно.*

**Доказательство.** Группа  $U_m$  совпадает с полупрямым произведением трех подгрупп: группы  $\tilde{U}^{(\nu-m)}$ , которая изоморфна группе  $U^{(\nu-m)}$ , сохраняющей решетку  $L_{\nu-m}$ ,

$$\tilde{U}^{(\nu-m)} = \{ [E_m, 0, 0, \gamma] : \gamma \in U^{(\nu-m)} \},$$

группы  $\widetilde{GL}_m = \{ [A, 0, 0, E] : A \in GL_m(\mathcal{D}) \}$ , изоморфной группе  $GL_m(\mathcal{D})$  и нормальной унипотентной подгруппы  $NU_m$ , описанной в лемме 2.2. Возьмем произвольный двойной класс  $U_m \mathbf{D} U_m$ , где  $\mathbf{D} = [A, 0, 0, B]$ . При помощи стандартных вычислений мы получаем следующее разложение этого класса:

$$U_m \mathbf{D} U_m = \sum_{i,j,h} U_m \mathbf{D} n_i \gamma_j \alpha_h, \quad (2.10)$$

где элементы  $n_i$ ,  $\gamma_j$ , и  $\alpha_h$  задают разложения следующих классов

$$U^{(\nu-m)}BU^{(\nu-m)} = \sum_j U^{(\nu-m)}B\gamma_j, \quad GL_m(\mathcal{D})AGL_m(\mathcal{D}) = \sum_h GL_m(\mathcal{D})A\alpha_h,$$

$$NU_m\mathbf{D}NU_m = \sum_i NU_m\mathbf{D}n_i.$$

Мы можем определить следующую коммутативную диаграмму гомоморфизмов линейных пространств

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DM}(U_m, P_m) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{H}(U^{(\nu-2)}) \times \mathcal{H}(GL_m(\mathcal{D})) \\ \Phi_\nu \downarrow & & \Phi_{\nu-2} \downarrow \times \Phi_m \\ \mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}] & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_{\nu-m}^{\pm 1}] \times \mathbb{Q}[x_{\nu-m+1}^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}], \end{array}$$

где  $\Phi_\nu$ ,  $\Phi_{\nu-m}$  и  $\Phi_m$  — сферические отображения соответствующих колец Гекке,

$$\tilde{\Phi}(U_m\mathbf{D}U_m) = \|\ NU_m \setminus NU_m\mathbf{D}NU_m \| (U^{(\nu-m)}BU^{(\nu-m)}, GL_m(\mathcal{D})AGL_m(\mathcal{D})),$$

и  $\text{id}$  — тождественное вложение кольца. Двойные классы, участвующие в приведенной диаграмме, являются линейно независимыми элементами соответствующих колец Гекке, следовательно, двойные классы типа  $U_m\mathbf{D}U_m$  линейно независимы. Лемма 2.2 доказана.

Определяемое ниже пространство  $\mathcal{C}(U_m, P_m) \subset \mathcal{DM}(U_m, P_m)$  будет играть в дальнейшем важную роль. Это пространство всех элементов, которые могут быть записаны в виде суммы *диагональных левых смежных классов*

$$\mathcal{C}(U_m, P_m) = \left\{ \sum_i a_i U_m[A_i, 0, 0, B_i] \in \mathcal{H}(U_m, P_m) \right\}. \quad (2.11)$$

Это пространство не пусто. Например, обратимый элемент из центра кольца  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$

$$\Delta = U_m\pi E_{2\nu+n_0}U_m \quad (2.12)$$

и элемент

$$\Lambda_m = U_m \begin{pmatrix} \overline{\Pi}E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_{2(\nu-m)+n_0} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi^{-1} \end{pmatrix} U_m = U_m \begin{pmatrix} \overline{\Pi}E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_{2(\nu-m)+n_0} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

принадлежат пространству  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  при любом  $m \geq 1$ . Для  $m = \nu$  мы определим элемент

$$\Pi = U_m \begin{pmatrix} \pi^j E_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & 0 \\ 0 & 0 & E_\nu \end{pmatrix} U_m,$$

где  $f$  и  $a$  определены в (2.3) и (2.7). Если  $f = 2$  в случае ортогональной группы, то  $\Pi = \Delta \cdot \Lambda_\nu$ , но для групп с  $f = 1$   $\Pi$  — это новый элемент.

**Лемма 2.3.**  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  — коммутативное кольцо без делителей нуля.

**Доказательство.** Из определения умножения в кольце  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  ясно, что  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  является его подкольцом. Из леммы 2.2 следует, что  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  изоморфно подкольцу кольца  $\mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}]$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.4.** *Отображения*

$$\begin{aligned} - : GL_m(\mathcal{D}) A GL_m(\mathcal{D}) &\rightarrow U_m[A^{-1}, 0, 0, E]U_m = [\mathbf{A}]_- \in \mathcal{C}(U_m, P_m), \\ + : GL_m(\mathcal{D}) A GL_m(\mathcal{D}) &\rightarrow U_m[A, 0, 0, E]U_m = [\mathbf{A}]_+ \in \mathcal{C}(U_m, P_m)^* \end{aligned}$$

являются гомоморфными вложениями целого кольца  $\mathcal{G}$  группы  $GL_m(\mathcal{K})$  в кольцо  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ , где

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_i a_i GL_m(\mathcal{D}) A_i GL_m(\mathcal{D}) ; A_i \in M_m(\mathcal{D}), a_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

**Доказательство.** Вычислим разложение двойного класса  $[\mathbf{A}]_-$  в сумму левых смежных классов (см. (2.10)). В обозначениях леммы 2.1 выполняется

$$[E_m, -XA, Z_{XA}, E][A^{-1}, 0, 0, E][E_m, X, Z_X + Z, E] = [E_m, 0, Z', E][A^{-1}, 0, 0, E],$$

где  $Z' \in M_m(\mathfrak{P}^{-\ell})$ . Это означает, что  $NU_m[A^{-1}, 0, 0, E]NU_m = NU_m[A^{-1}, 0, 0, E]$ , и из (2.10) следует, что  $[\mathbf{A}]_- \in \mathcal{C}(U_m, P_m)$ .

Чтобы доказать утверждение леммы относительно отображения „+“ мы можем использовать антиавтоморфизм  $*$  (см. предложение 3.1.7 [A1])

$$* : U_m g U_m \rightarrow U_m g^{-1} U_m \quad (2.14)$$

— кольца Гекке  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  (левое и правое умножения задают одну и ту же структуру кольца Гекке). Очевидно, что  $\pm$ -отображения являются двойственными относительно этого антиавтоморфизма.

Произвольный двойной класс  $U^{(\nu-m)} B U^{(\nu-m)}$  относительно максимальной компактной подгруппы  $U^{(\nu-m)}$ , определяемой решеткой  $L_{\nu-m}$ , содержит диагональный элемент. Мы обозначим максимальный порядок элементарных делителей  $\pi^{d_i}$  ( $m+1 \leq i \leq \nu$ ) этого элемента через  $d(B)$ .

Введем так называемое „четное“ кольцо Гекке, состоящее из всех элементов с тривиальным  $\mu$ -порядком (см. определение группы  $\Gamma$ )

$$\mathcal{H}^{(0)}(U, G) = \left\{ H = \sum_i a_i U h_i \in \mathcal{H}(U, G) : \mu(h_i) \in \mathfrak{o}^\times \right\}.$$

Можно определить два вложения этого кольца в кольцо Гекке  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ .

**Лемма 2.5. Отображения**

$$\begin{aligned} - : U^{(\nu-m)} B U^{(\nu-m)} &\rightarrow U_m[\pi^{-d(B)} E_m, 0, 0, B] U_m \in \mathcal{C}(U_m, P_m), \\ + : U^{(\nu-m)} B U^{(\nu-m)} &\rightarrow U_m[\pi^{+d(B)} E_m, 0, 0, B] U_m \in \mathcal{C}(U_m, P_m)^* \end{aligned}$$

являются гомоморфными вложениями кольца Гекке  $\mathcal{H}^{(0)}(U^{(\nu-m)}, G^{(\nu-m)})$  в кольцо  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ , где группа  $U^{(\nu-m)}$  состоит из элементов, сохраняющих решетку  $L_{\nu-m}$  (см. (2.4)).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы и данные гомоморфизмы двойственны относительно антиавтоморфизма  $*$ .

Следующая лемма может быть легко получена из определений и разложения (2.10).

**Лемма 2.6.** *Линейное пространство  $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$  является  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ -модулем.*

### §3. Кольца Гекке параболических подгрупп ранга один

Этот параграф посвящен случаю параболических подгрупп ранга один. Основная цель Введения колец Гекке параболических подгрупп была объяснена на примере группы  $SL_2$  в §1: многочлены над кольцом Гекке группы  $G$  раскладываются на множители над кольцом Гекке ее параболической подгруппы  $P$ . Чтобы вычислить множители этого разложения, мы можем воспользоваться явными формулами для коэффициентов многочленов Гекке, соответствующих локальной стандартной  $L$ -функции, найденными в работе автора [G1] для  $SO$ -,  $SU$ - и  $Sp$ -групп. В этом параграфе мы рассмотрим случай ортогональной группы и ее параболической подгруппы ранга один. Для удобства читателей мы приведем также доказательства необходимых результатов из [G1]. (Отметим, что эти доказательства несколько проще, чем оригинальные доказательства из [G1]).

Без ограничения общности (для ортогональной группы) мы можем ограничиться случаем  $\mathfrak{o}$ -целой решетки  $L$ . Мы полагаем

$$q(t) = \prod_{i=0}^{\nu} (1 - \mathfrak{p}^{-A} x_i^{-1} t) (1 - \mathfrak{p}^A x_i t) = \sum_{j=0}^{2\nu} (-1)^j q_j^{(\nu)} t^j,$$

где целое число  $A$  определено в (2.8). Коэффициенты этого многочлена принадлежат кольцу  $\mathbb{Q}^{W_\nu}[x_0, x_1, \dots, x_\nu]$ , следовательно, существует многочлен  $Q(t)$  над  $\mathcal{H}(U, G)$ , чей  $\Phi_\nu$ -образ равен  $q(t)$ , а именно

$$Q(t) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j Q_j^{(\nu)} t^j \in \mathcal{H}(U, G)[t] \quad \text{и} \quad \Phi_\nu(Q_j^{(\nu)}) = q_j^{(\nu)}. \quad (3.1)$$

Многочлен  $Q(t)$  отвечает стандартному представлению двойственной (в смысле Ленглендса) группы  $G^L$ , поэтому мы называем этот многочлен стандартным многочленом Гекке.

В следующей теореме описывается разложение стандартного многочлена Гекке в параболическом расширении, отвечающем группе  $U_1$ . В этой теореме мы используем инвариант *сигнатура*, определяемый следующим образом:

$$\text{если } H = U_1 \begin{pmatrix} \pi^a & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & \pi^d \end{pmatrix} U_1, \text{ тогда } s(H) = \frac{d-a}{2}.$$

**Теорема 1.** В кольце многочленов  $\mathcal{H}(U_1, P_1)[t]$  выполняется следующее равенство:

$$Q(t) = (1 - \mathfrak{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 t) S(t) (1 - \mathfrak{p}^{-A-\nu} \Lambda_1^* t),$$

где

$$S(t) = \sum_{j=0}^{2\nu-1} (-1)^j S_j^{(\nu)} t^j \in \mathcal{H}(U_1, P_1)[t] \text{ и } S_j^{(\nu)} = s_0(Q_j - \mathfrak{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 Q_{j-1}),$$

$s_0(H)$  обозначает при этом ту часть элемента  $H$ , которая имеет сигнатуру, равную нулю,  $\Lambda_1^*$  — образ элемента  $\Lambda_1$  относительно антиявтоморфизма  $*$  (см. (2.13) и (2.14)), а константа  $A$  определена в (2.8).

Можно написать явные формулы для коэффициентов  $S_j^{(\nu)}$  в терминах образующих кольца  $\mathcal{H}(U, G)$  (см. теорему 2).

Чтобы доказать эту теорему, нам нужна более детальная информация об образующих  $\Pi_{k,m}$  кольца Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$ . Положим

$$D_{k,m} = \text{diag}(\pi^{-1} E_k, E_m, E_{n_0}, E_m, \pi E_k) \quad \text{и} \quad \Pi_{k,m} = U D_{k,m} U, \quad (3.2)$$

где  $k + m = \nu$ . Это определение должно быть слегка изменено в случае группы  $SO(\nu, \nu)$  ( $n_0 = 0$ ), а именно  $\Pi_{k,0} = U D_{k,0} U + U \text{diag}(\pi, D_{k-1,0}, \pi^{-1}) U$ . Элементы  $\Pi_{k,m}$  являются образующими кольца  $\mathcal{H}(U, G)$  (см. [S]).

В статье [G1] образы элементов  $\Pi_{k,m}$  при сферическом отображении были вычислены в виде линейной функции от стандартных симметрических функций, и были получены следующие формулы коэффициентов  $Q_j^{(\nu)}$  многочлена Гекке (см. теорему 2 в [G1]).

**Лемма 3.1.** Для  $j \leq \nu$

$$Q_j^{(\nu)} = C_{j,\nu} \sum_{k=0}^j U_{j-k,\nu-j} \Pi_{k,\nu-k},$$

где  $C_{j,\nu} = \mathfrak{p}^{-jA+(\nu-j)-\langle \nu \rangle}$  и  $\langle a \rangle = a(a+1)/2$ . Рациональные коэффициенты  $U_{j-k,\nu-j}$  задаются формулами

$$U_{s,\delta} = (-1)^s \sum_{r=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^r \frac{\lambda_{s-2r}(\mathfrak{p})}{\varphi_{s-2r}(\mathfrak{p})} \sum_{t=0}^r (-1)^t \mathfrak{p}^{t(n_0+\delta+t-1)} \frac{(\mathfrak{p}^{\delta+t+1} - 1) \dots (\mathfrak{p}^{\delta+s} - 1)}{\varphi_t(\mathfrak{p}) \varphi_{r-t}(\mathfrak{p}^2)},$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_v(\mathbf{p}) &= (\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - 1)(\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - \mathbf{p}) \dots (\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - \mathbf{p}^{v-1}), & \lambda_0(\mathbf{p}) &= 1, \\ \varphi_v(\mathbf{p}) &= (\mathbf{p} - 1) \dots (\mathbf{p}^v - 1), & \varphi_0(\mathbf{p}) &= 1,\end{aligned}$$

$n_0$  — размерность анизотропной части решетки  $L$ , и

$$\ell_0 = \dim_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}} L_0/L_0^{(1)} \quad (\text{см. (2.1)}).$$

В частности,  $U_{0,\delta} = 1$  для любого  $\delta$ .

**Замечание 1.** Параметр  $\ell_0$  ( $0 \leq \ell_0 \leq n_0$ ) совпадает с числом  $\mathfrak{o}^\times$ -единиц в диагональной форме  $S_0(2 \notin \mathfrak{p})$ . В частности,  $\ell_0 = n_0$  в случае хорошей редукции ( $\det S_0 \in \mathfrak{o}^\times$ ).

**Замечание 2.** Выполняется

$$\lambda_{n_0-\ell_0+1}(\mathbf{p}) = 0,$$

следовательно, внешняя сумма в формуле для  $U_{s,\delta}$  содержит один, два или три члена. В случае разложимой группы можно существенно упростить эти формулы. Для  $n_0 = \ell_0 = 1$  (группа  $SO(2n+1)$ )

$$U_{2l,\delta} = \frac{\varphi_{2l+\delta}(\mathbf{p}^2)}{\varphi_{l+\delta}(\mathbf{p}^2)\varphi_l(\mathbf{p}^2)}, \quad U_{2l+1,\delta} = 0$$

и для  $n_0 = \ell_0 = 0$  (группа  $SO(2n)$ )

$$U_{2l,\delta} = \frac{(\mathbf{p}^\delta + 1)\varphi_{2l+\delta}(\mathbf{p}^2)}{(\mathbf{p}^{\delta+2l} + 1)\varphi_{l+\delta}(\mathbf{p}^2)\varphi_l(\mathbf{p}^2)}, \quad U_{2l+1,\delta} = 0$$

(см. [G1], окончание параграфа 1).

**Замечание 3.** В [G1] (см. тождество (1.28) и лемму 1.4) были доказаны следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}U_{s,\delta} &= (0)\mathbf{p}^s U_{s,\delta-1} + (2)\mathbf{p}^{s+2\delta+n_0-1} U_{s-2,\delta+1} - (\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - 1)U_{s-1,\delta} \\ &\quad - \mathbf{p}^{n_0-\ell_0} \text{IS}_{2(s+\delta-1)+\ell_0} U_{s-2,\delta},\end{aligned}$$

где  $\text{IS}_{2n+\ell_0}$  — число ненулевых изотропных векторов в квадратичном пространстве над конечным полем  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$

$$\text{IS}_{2n+\ell_0} = \left\| \left\{ h \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^n \times L_0/L_0^{(1)} \times (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^n : \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & S_0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix} [h] \in 2\mathfrak{p} \right\} \right\| - 1,$$

и в случае  $\delta = 0$  в правой части формулы отсутствует первый член, а второй имеет коэффициент два.

Для заданного вектора  $h \in L_m \otimes k$  (см. (2.4)) ранга  $2m + n_0$  над локальным полем  $k$

$${}^t h = ({}^t h_1, {}^t h_0, {}^t h_2), \quad h_1, h_2 \in M_{m,1}(k), \quad h_0 \in M_{n_0,1}(k),$$

и  $l = \nu - 1 - m$  мы полагаем

$$\Pi_{l,m}^{(0)}(h) = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -{}^t h_2 I_m & -{}^t h_0 S_0 & -{}^t h_1 I_m & 0 & -\frac{1}{2} \|h\| \\ \pi^{-1} E_l & 0 & E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & E_{n_0} & 0 & 0 & h_1 \\ & & & & E_m & 0 & h_0 \\ & & & & & \pi E_l & h_2 \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} U_1, \quad (3.3)$$

где

$$\|h\| = S_m[h], \quad S_m = \text{diag}(I_m, S_{n_0}, I_m).$$

Мы должны изменить это определение в случае  $m = 0$  для ортогональной группы без анизотропной части ( $n_0 = 0$ ). В этом случае

$$\Pi_{\nu-1,0}^{(0)}(0) = U_1 \text{diag}(1, D_{\nu-1,0}, 1) U_1 + U_1 \text{diag}(1, \pi, D_{\nu-2,0}, \pi^{-1}, 1) U_1.$$

Следующая лемма следует из определений и леммы 2.1 о структуре унитарной подгруппы  $NU_1$ .

**Лемма 3.2.** Для произвольного заданного  $h \in \pi^{-1} L_m$  такого, что  $h \notin L_m$ , имеет место следующее разложение элемента  $\Pi_{l,m}^{(0)}(h)$  в сумму левых смежных классов относительно подгруппы  $U_1$ :

$$\Pi_{l,m}^{(0)}(h) = \sum_{\epsilon, x, \psi} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\epsilon {}^t h S_m & 0 & -\frac{1}{2} \|\epsilon h\| \\ \pi^{-1} E_l & 0 & E_{2m+n_0} & 0 & \pi^{-1} x \\ & & & \pi E_l & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{\psi},$$

где элементы  $x_i \in \mathfrak{o}$  столбца  ${}^t x = (x_1, \dots, x_l)$  размерности  $l$  пробегает систему представителей из  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ , элемент  $\epsilon$  пробегает все попарно не сравнимые по модулю  $\mathfrak{p}$  единицы, а  $\psi$  пробегает систему представителей из левых смежных классов элемента

$$\Pi_{l,m} = \sum_{\psi} U_1^{\nu-1} D_{l,m} \psi$$

(см. (3.2)) в кольце Гекке ортогональной группы ранга  $\nu - 1$  квадратичной формы  $S_{\nu-1}$ .  $\tilde{\psi}$  — вложение элемента  $\psi$  в ортогональную группу ранга  $\nu$   $\tilde{\psi} = \text{diag}(1, \psi, 1)$ .

**Следствие.** Двойной класс  $\Pi_{l,m}^{(0)}(h)$  зависит только от подпространства  $\langle h \rangle_{\mathfrak{p}}$  векторного пространства  $\pi^{-1}L_m/L_m$  над конечным полем  $k_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ .

**Лемма 3.3.** Элемент  $\Pi_{k,m}$ , где  $t = \nu - k$ , следующим образом раскладывается в кольце Гекке  $\mathcal{H}(U_1, P_1)$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{k,m} = & \Pi_{k-1,m}^- + \Pi_{k-1,m}^+ + \Pi_{k,m-1}^{(0)}(0) \\ & + \sum_{\substack{\langle h \rangle_{\mathfrak{p}} \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0 \neq 0}} \Pi_{k-1,m}^{(0)}(h_0) + \sum_{\substack{\langle h \rangle_{\mathfrak{p}} \in \pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1} \\ S_{m+1}[h] \in 2\mathfrak{p}^{-1} \\ h = (h_1, h_0, h_2) \neq (0, h_0, 0)}} \Pi_{k-2,m+1}^{(0)}(h), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где элементы  $\Pi_{k,m}^{(0)}(h)$  определены в (3.3), элементы  $\Pi_{k-1,m}^{\pm}$  — образы образующих  $\Pi_{k-1,m}$  при вложении „минус“ из леммы 2.5, ранг решетки  $L_{m+1}$  и формы  $S_{m+1}$  равен  $2(m+1) + n_0$  (см. (2.4)), а суммирование в (3.4) ведутся по всем различным одномерным подпространствам, отвечающим линейным подпространствам над конечным полем  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ .

**Доказательство.** Двойной смежный класс  $\Pi_{k,m}$  состоит из всех матриц  $M$  таких, что матрица  $\pi M$  — целая и имеет ранг  $k$  над конечным полем  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ . Положим

$$\Pi_{k,m} = \sum_{D,d,h} U_1 \begin{pmatrix} d^{-1} & * & * \\ 0 & D & h \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Из условия целочисленности вытекает

$$d = \pi^{\pm 1} \text{ или } 1, \quad h \in \pi^{-1}L_{\nu-1}, \quad D = D_{k,\nu-k-1}.$$

Если  $d = \pi^{-1}$ , то  $h$  может быть приведено к нулю и, следовательно, получается „минус“-элемент  $\Pi_{k-1,m}^-$ . Если  $d = \pi$ , то используя двойственность  $*$  (см. (2.14)), мы получаем элемент  $\Pi_{k-1,m}^+$ . Если  $d = 1$ , то  $h$ -компонента может добавить  $+2$  или  $+1$  к  $k_{\mathfrak{p}}$ -рангу матрицы  $D$ . Условия

$$h \in \pi^{-1}L_{m+1}, \quad S_{m+1}[\pi h] \in 2\mathfrak{p}^{-1}$$

на параметр  $h$  во второй сумме в (3.4) эквивалентны условию целочисленности произведения  $\Delta \Pi_{k-2,m+1}^{(0)}(h)$ , где  $\Delta$  — элемент (2.12), вместе с предположением, что ранг этого произведения равен  $k$  для вектора  $h$  с „изотропной частью“, т.е. для  $h \neq (0, h_0, 0)$  (случай типа  $(+2)$ ). Элементы первой суммы в (3.4), умноженные на элемент  $\pi$ , целочисленные, потому что

$$L_0^{(-1)} = \{x \in V_0 : S(x, x) \in 2\mathfrak{p}^{-1}\}.$$

Легко доказать, что если  $h_0 \in L_0^{(-1)}$ , то  $S_0 h_0 \in L_0$ , и ранг элемента  $\Delta \Pi_{k-1,m}^{(0)}(h_0)$  равен  $k$  (случай типа (+1)). Лемма доказана.

В §2 был определен  $\mathcal{C}(U_1, P_1)$ -модуль  $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$  (см. (2.9)).

**Лемма 3.4.** Для образующих  $\Pi_{k,m}$  ( $m = \nu - k$ ) выполняется включение  $\Lambda_1 \Pi_{k,m} \in \mathcal{DM}(U_1, P_1)$ .

**Доказательство.** Элементы

$$\Lambda_1 \Pi_{k-1,m}^-, \quad \Lambda_1 \Pi_{k-1,m}^+, \quad \Lambda_1 \Pi_{k,m-1}^{(0)}$$

принадлежат  $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$ , так как это —  $\mathcal{C}(U_1, P_1)$ -модуль. Для элементов из (3.4) выполнится более сильное включение

$$I = \Lambda_1 \cdot \Pi_{l,m}^{(0)}(h) \in \mathcal{C}(U_1, P_1) \subset \mathcal{DM}(U_1, P_1). \quad (3.5)$$

Используя лемму 2.1, мы получаем следующее разложение

$$I = \sum_{\epsilon, x, \psi} U_1 D_{\epsilon, x, \psi} = \sum_{\epsilon, x, \psi} U_1 \begin{pmatrix} \pi & * & * & * & * \\ 0 & \pi^{-1} E_l & 0 & 0 & \pi^{-1} x \\ & & E_{2m+n_0} & 0 & \epsilon h \\ & & & \pi E_l & 0 \\ 0 & & & & \pi^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\psi},$$

где

$$\epsilon \in \mathfrak{o}^\times / \mathfrak{p}, \quad x \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^l, \quad \psi \in U^{(\nu-1)} \setminus U^{(\nu-1)} D_{l,m} U^{(\nu-1)},$$

а  $U^{(\nu-1)}$  — максимальная компактная группа, определенная решеткой  $L_{\nu-1}$  (см. (2.4)). Согласно определению,  $\pi h \in L_m$ , поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & E_l & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & E_{2m+n_0} & 0 & \pi \epsilon h \\ 0 & 0 & 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D_{\epsilon, x, \psi} = \text{diag}(\pi, \pi^{-1} E_l, E_{2m+n_0}, \pi E_l, \pi^{-1}),$$

и последний элемент принадлежит  $\mathcal{C}(U_1, P_1)$ .

**Доказательство теоремы 1.** Положим

$$R_-(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j R_j t^j = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (\mathfrak{p}^{-A-\nu} \Lambda_1)^i t^i \right) Q(t) \quad (3.6)$$

и докажем, что формальный степенной ряд  $R_-(t)$  является полиномом. По определению

$$\begin{aligned} R_j &= Q_j - \mathfrak{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 Q_{j-1} + \dots, & \text{если } j \leq 2\nu, \\ R_j &= (\mathfrak{p}^{-A-\nu} \Lambda_1)^{j-2\nu} Q_j + \dots, & \text{если } j > 2\nu. \end{aligned}$$

Коэффициенты многочлена  $Q(t)$  удовлетворяют следующему условию

$$Q_j^{(\nu)} = Q_{2\nu-j}^{(\nu)} \quad \text{для } 0 \leq j \leq 2\nu.$$

В соответствии с леммами 3.1, 3.2 и 3.4

$$R_{2\nu} = 1 - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 Q_1^{(\nu)} + \dots \in \mathcal{DM}(U_1, P_1), \\ R_{2\nu+j} \in \mathcal{DM}(U_1, P_1) \quad \text{для любого } j > 0.$$

Ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Phi(R_j) t^j = (1 - \mathbf{p}^{-A} x_\nu^{-1} t)^{-1} Q(t)$$

является многочленом от  $t$  степени  $2\nu - 1$ , согласно определению многочлена  $Q(t)$ . Ограничение сферического гомоморфизма  $\Phi$  на регулярный модуль  $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$  — инъективно, согласно лемме 2.2, следовательно,  $R_j = 0$  для  $j \geq 2\nu$ . Более того произведение (3.6) не содержит отрицательных степеней переменной  $x_\nu$ . Из лемм 2.5, 3.1, 3.3, 3.4 и включения (3.5) следует, что любой двойной смежный класс, имеющий отрицательную сигнатуру и принадлежащий коэффициенту  $R_j$ , лежит в регулярном кольце  $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$ , поэтому из  $\Phi(s_-(R_j)) = 0$  следует, что

$$s_-(R_j) = 0 \quad \text{для } 0 \leq j \leq 2\nu - 1,$$

где через  $s_-(R)$  обозначена та часть элемента  $R$ , которая имеет отрицательную сигнатуру. Это доказывает, что

$$Q(t) = (1 - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 t) R_-(t),$$

где  $R_-(t)$  — многочлен степени  $2\nu - 1$ , коэффициенты которого  $R_j$  имеют неотрицательную сигнатуру. Применяя антиавтоморфизм  $*$  (см. (2.14)), получаем

$$Q(t) = R_+(t)(1 - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1^* t),$$

где коэффициенты многочлена  $R_+(t)$  имеют неположительную сигнатуру. В качестве следствия из двух последних тождеств мы получаем следующее соотношение

$$S(t) = (1 - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 t)^{-1} R_+(t) = R_-(t)(1 - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1^* t)^{-1}.$$

Все коэффициенты первого произведения имеют неположительную сигнатуру, а коэффициенты при степенях  $t^j$  с  $j \geq 2\nu$  имеют отрицательную сигнатуру. Аналогичное утверждение верно и для второго произведения, если мы заменим термин „отрицательный“ на „положительный“. Следовательно,  $S(t)$  является многочленом степени  $2\nu - 1$ , коэффициенты которого состоят из двойных смежных классов сигнатуры ноль. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Коэффициенты  $S_j^{(\nu)}$  многочлена  $S(t)$  теоремы 1 задаются следующими формулами:

если  $j \leq \nu$ , то

$$S_j^{(\nu)} = C_{j,\nu} \sum_{i=0}^j \left[ (U_{j-i,\nu-j} - p^{2\nu-j+1+2A} U_{j-i-2,\nu-j+1}) \Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(0) \right. \\ \left. + U_{j-i-1,\nu-j} \sum_{\substack{\langle h_0 \rangle_p \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0 \neq 0}} \Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(h_0) \right. \\ \left. + U_{j-i-2,\nu-j} \sum_{\substack{\langle h \rangle_p \in \pi^{-1} L_{\nu-i-1}/L_{\nu-i-1} \\ S_{\nu-i-1}[h] \in 2p^{-1} \\ h=(h_1, h_0, h_2) \neq (0, h_0, 0)}} \Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(h) \right];$$

если  $j > \nu$ , то

$$S_j^{(\nu)} = C_{2\nu-j,\nu} \sum_{i=0}^{2\nu-j} \left[ (U_{2\nu-j-i,j-\nu} - p^{2\nu-j-i} U_{2\nu-j-i,j-\nu-1}) \Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(0) \right. \\ \left. + U_{2\nu-j-i-1,j-\nu} \sum_{\substack{\langle h_0 \rangle_p \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0 \neq 0}} \Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(h_0) \right. \\ \left. + U_{2\nu-j-i-2,j-\nu} \sum_{\substack{\langle h \rangle_p \in \pi^{-1} L_{\nu-i-1}/L_{\nu-i-1} \\ S_{\nu-i-1}[h] \in 2p^{-1} \\ h=(h_1, h_0, h_2) \neq (0, h_0, 0)}} \Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(h) \right],$$

где элементы  $\Pi_{i,\nu-i+1}^{(0)}(h)$  и индексы суммирования — те же самые, что и в лемме 3.3. Коэффициенты  $C_{j,\nu}$  и  $U_{s,\delta}$  определены в лемме 3.1.

**Доказательство.** В теореме 1 была получена следующая формула для коэффициентов многочлена  $S(t)$

$$S_j = s_0(Q_j - p^{-A-\nu} \Lambda_1 Q_{j-1}).$$

Часть коэффициента  $Q_j$ , имеющая сигнатуру 0, может быть вычислена в соответствии с леммами 3.1 и 3.3, а нулевая (в смысле сигнатуры) часть произведения  $\Lambda_1 Q_{j-1}$  является суммой членов типа  $\Lambda_1 \Pi_{k-1,m}^+$  (см. лемму 3.3), так как сигнатура — аддитивная функция. Используя равенство (2.10), легко доказать, что

$$\Lambda_1 \Pi_{k-1,m}^+ = p^{2\nu-k-1+n_0} \Pi_{k-1,m}^{(0)}(0).$$

Для завершения доказательства достаточно собрать члены с одним и тем же элементом  $h$  в  $\Pi_{i,\nu-i-1}^{(0)}(h)$  и учесть, что  $Q_j = Q_{2\nu-j}$  для  $j > \nu$ .

## §4. Кольцо Гекке параболической подгруппы ранга два

В этой главе мы рассмотрим случай параболической подгруппы  $P_2$  ортогональной группы  $G$ , состоящей из элементов, сохраняющих изотропное подпространство  $\langle e_1, e_2 \rangle$  (см. §2).

Ниже мы используем следующие обозначения: для произвольного двойного класса  $X = U_2 H U_2$  с  $\mu(H) = 1$

$$X = U_2 \begin{pmatrix} I_2^t A^{-1} I_2 & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} U_2,$$

мы определим сигнатуру  $X$

$$\text{sign}(X) = s(X) = \text{ord}_p(\det A) \quad (4.1)$$

(см. определение перед Теоремой 1). Мы обозначим через  $s_\delta(X)$  сумму всех двойных классов сигнатуры  $\delta$ , содержащихся в элементе  $X \in \mathcal{H}(U_2, P_2)$ . Все двойные классы вида

$$Y = U_2 \begin{pmatrix} E_2 & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix} U_2$$

образуют подкольцо кольца Гекке  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ , которое мы обозначим через

$$\mathcal{EH}(U_2, P_2). \quad (4.2)$$

Для группы  $P_2$  первый гомоморфизм леммы 2.4 задает вложение кольца Гекке группы  $GL_2$  в кольцо  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ . Через  $\mathbf{T}_-(\pi^l)$  мы обозначим образ элемента Гекке,  $T(\pi^l)$  (см. (0.1)):

$$\mathbf{T}_-(\pi^l) = \sum_{\substack{a+b=l \\ b \geq a \geq 0}} U_2 \text{diag} \left( \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix}, E_{2(\nu-2)+n_0}, \begin{pmatrix} \pi^{-b} & 0 \\ 0 & \pi^{-a} \end{pmatrix} \right) U_2.$$

В этих обозначениях образ диагонального класса  $T(\pi, \pi) = GL_2(\mathfrak{o}) \text{diag}(\pi, \pi) GL_2(\mathfrak{o})$  совпадает с элементом  $\Lambda_2$  кольца  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$  (см. (2.13) и (1.4))

$$\mathbf{T}_-(\pi, \pi) = \Lambda_2 = U_2 \text{diag}(\pi, \pi, E_{2(\nu-2)+n_0}, \pi^{-1}, \pi^{-1}).$$

Стандартный многочлен Гекке  $Q(t)$  (см. (3.1)) раскладывается, как и в случае группы  $P_1$ , в произведение трех множителей в параболическом расширении  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ . Первый и третий множители отвечают многочлену Гекке

$$Q^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}(\pi)t + p \mathbf{T}(\pi, \pi)t^2$$

группы  $GL_2$  (см. (0.4)).

**Теорема 3.** В кольце многочленов  $\mathcal{H}(U_2, P_2)[t]$  выполняется следующее разложение:

$$Q(t) = Q_-^{GL_2}(\mathfrak{p}^{-(A+\nu)} t) \cdot K(t) \cdot Q_+^{GL_2}(\mathfrak{p}^{-(A+\nu)} t),$$

где

$$Q_-^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}_-(\pi) t + \mathfrak{p} \Lambda_2 t^2, \quad Q_+^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}_+(\pi) t + \mathfrak{p} \Lambda_2^* t^2$$

являются  $\pm$ -вложениями многочлена Гекке группы  $GL_2$  в кольцо  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$  (см. лемму 2.4). Многочлен  $K(t)$  имеет степень меньшую или равную  $2\nu - 1$ , а его коэффициенты принадлежат кольцу  $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$  (см. (4.2)).

Можно получить явные формулы для коэффициентов „ядра“  $K(t)$  (см. теорему 4).

Как и в случае группы  $P_1$ , нам потребуется информация об образах образующих  $\Pi_{k,m}$  кольца Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$  (см. (3.2)) в параболическом расширении  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ . Мы обозначим через  $\| \cdot \|$  и  $\langle \cdot \rangle$  норму и скалярное произведение относительно квадратичной формы  $S_{\nu-1}$  (см. (2.4))

$$\|h\| = S_{\nu-1}[h], \quad \langle h_1, h_2 \rangle = {}^t h_1 S_{\nu-1} h_2. \quad (4.3)$$

Мы полагаем также  $h^\sharp = {}^t h S_{\nu-1}$ . Ранг формы  $S = S_{\nu-1}$  будет ясен из контекста.

Согласно (2.5), элементы группы  $P_2$  параметризуются следующим образом:

$$[A, X, Z, B] = \begin{pmatrix} \mu(B) I_2 {}^t(A^{-1}) I_2 & -I_2 {}^t(A^{-1}) {}^t X S_{\nu-2} B & I_2 Z \\ 0 & B & X \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

где элементы

$$A \in GL_2(\mathfrak{k}), \quad B \in G(S_{\nu-2}), \quad X = (x_1, x_2) \in M_{2(\nu-2)+n_0, 2}(\mathfrak{k}), \quad Z \in M_2(\mathfrak{k})$$

удовлетворяют соотношению  ${}^t A Z + {}^t Z A + S_{\nu-2}[X] = 0$ . В частности, целый унипотентный элемент  $\gamma \in NU_2$  (см. лемму 2.1) равен

$$\gamma(X, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_2^\sharp & r & -\frac{1}{2} \|x_2\| \\ 0 & 1 & -x_1^\sharp & -\frac{1}{2} \|x_1\| & -r - \langle x_1, x_2 \rangle \\ & & E_{2(\nu-2)+n_0} & x_1 & x_2 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

с целыми векторами  $x_1, x_2 \in L_{\nu-2}$  и  $r \in \mathfrak{o}$ .

Определим теперь стандартные двойные классы в  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ . Для матрицы  $D_{l,m}$  с  $l + m = \nu - 2$ , определенной в (3.2), мы полагаем

$$\Pi_{l,m}^{(\alpha, \beta)} = U_2 \operatorname{diag}(\pi^{-\beta}, \pi^{-\alpha}, D_{l,m}, \pi^\alpha, \pi^\beta) U_2. \quad (4.5)$$

Согласно определению (2.14), антиавтоморфизма  $*$ ,  $\Pi_{l,m}^{(-\alpha,-\beta)} = (\Pi_{l,m}^{(\alpha,\beta)})^*$ .

Для любого вектора  $h$ , принадлежащего решетке  $L_m$  размерности  $2m + n_0$ , мы полагаем (см. (3.2) и (4.4))

$$\Pi_{l,m}^{(-1,0)}(h) = U_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\tilde{h}^\# & 0 & -\frac{1}{2}\|h\| \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{l,m} & 0 & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_2, \quad (4.6)$$

где  $\tilde{h}$  обозначает вложение пространства  $L_m \otimes k$  в пространство  $L_{\nu-2} \otimes k$   $\tilde{h} = {}^t(\underbrace{0, \dots, 0}_l, {}^t h, \underbrace{0, \dots, 0}_l)$  и  $\Pi_{l,m}^{(0,+1)}(h) = (\Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-h))^*$ . В определения (4.5) и (4.6) мы должны внести те же самые изменения, что и в определение (3.3), если  $m = 0$  и ортогональная группа не имеет анизотропной части (т.е.  $n_0 = 0$ ).

Следующая лемма является аналогом леммы 3.3.

**Лемма 4.1.** *Образ образующей  $\Pi_{k,m}$  ( $k + m = \nu$ ) кольца Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$  в кольце  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$  параболической подгруппы  $P_2$  имеет следующий вид:*

$$\Pi_{k,m} = \Pi_{k-2,m}^- + \Pi_{k-2,m}^+ + \Pi_{k-1,m-1}^{(0,-1)} + \Pi_{k-1,m-1}^{(0,+1)} + \Pi_{k-2,m}^{(-1,+1)} + \Pi_{k,m-2}^{(0)} \quad (4.7)$$

$$+ \Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(+2) + \Pi_{k-3,m+1}^{(0,+1)}(+2) \quad (4.8)$$

$$+ \Pi_{k-4,m}^{(0)}(+4) + \Pi_{k-2,m}^{(0)}(+2)$$

$$+ \Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(-1) + \Pi_{k-2,m}^{(0,+1)}(-1) + \Pi_{k-3,m}^{(0)}(+3) + \Pi_{k-1,m}^{(0)}(-1) \quad (4.9)$$

$$+ \Pi_{k-2,m}^{(0)}(-2) - \Pi_{k-2,m}^{(0)}(-1) - \Pi_{k-2,m}^{(0)}(0), \quad (4.10)$$

где элементы параболического расширения кольца Гекке определены в (4.5)–(4.6) и в приведенных ниже формулах:

$$\Pi_{k-2,m}^- = \Pi_{k-2,m}^{(-1,-1)}, \quad \Pi_{k-2,m}^+ = \Pi_{k-2,m}^{(+1,+1)}$$

— вложения элемента  $\Pi_{k-2,m}$  в  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$  и  $\mathcal{C}(U_2, P_2)^*$  (см. лемму 2.5);

$$\Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(+2) = \sum_{\substack{\langle h \rangle_p \in \pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1} \\ S_{m+1}[h] \in 2p^{-1} \\ h = (h_1, h_0, h_2) \neq (0, h_0, 0)}} \Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(h),$$

$$\Pi_{k-3,m+1}^{(0,+1)}(+2) = (\Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(+2))^*,$$

где суммирование ведется по всем одномерным подпространствам пространства над полем  $k_p$ :  $\pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1} \times \pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1}$  (см. лемму 3.3);

$$\Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(-1) = \sum_{\substack{\langle h_0 \rangle_p \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0 \neq 0}} \Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(h_0), \quad \Pi_{k-2,m}^{(0,+1)}(-1) = (\Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(-1))^*$$

и элементы типа  $\Pi_{l,m}^{(0)}(\pm\delta)$  для  $\delta = 0, 1, 2, 3, 4$  определены как суммы левых классов

$$\Pi_{l,m}^{(0)}(\pm\delta) = \sum_{\psi} \sum_{\substack{x_1, x_2 \in (\mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o})^l, \\ H, r}} U_2 D_{l,m}((x_1, x_2), H, r) \tilde{\psi}, \quad (4.11)$$

где в первой сумме

$$\tilde{\psi} = \text{diag}(E_2, \psi, E_2) \text{ и } \psi \in U^{(\nu-2)} \setminus U^{(\nu-2)} D_{l,m} U^{(\nu-2)},$$

а матрица  $D_{l,m}^{(0)}$  определена следующим образом (см. (4.3)):

$$D_{l,m}^{(0)}(X, H, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_2^\# & -{}^t x_2 I_l & r & -\frac{1}{2} \|h_2\| \\ 0 & 1 & 0 & -h_1^\# & -{}^t x_1 I_l & -\frac{1}{2} \|h_1\| & -r - \langle h_1, h_2 \rangle \\ & & \pi^{-1} E_l & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ & & 0 & E_{2m+n_0} & 0 & h_1 & h_2 \\ & & 0 & 0 & \pi E_l & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Суммирование в (4.11) ведется по  $r$  и матрицам  $H = (h_1, h_2)$  со следующими условиями на входящие в них элементы  $h_i \in \pi^{-1} L_m / L_m$ ,  $\frac{1}{2} \|h_i\| \in \mathfrak{p}^{-1}$ ,  $\langle h_1, h_2 \rangle \in \mathfrak{p}^{-1}$  и со следующим условием на ранг матрицы  $\pi S H$ , зависящий от индекса  $\delta$ :

$$\begin{array}{ll} \text{для } \delta = +2 & \left\{ \begin{array}{l} \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi S_{\nu-2} H = 1, \\ \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi H = 1, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, \end{array} \right. & \text{для } \delta = +3 & \left\{ \begin{array}{l} \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi S_{\nu-2} H = 1, \\ \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi H = 2, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, \end{array} \right. \\ \text{для } \delta = -1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi S_{\nu-2} H = 0, \\ \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi H = 1, \\ r = -\frac{1}{2} \langle h_1, h_2 \rangle, \end{array} \right. & \text{для } \delta = -2 & \left\{ \begin{array}{l} \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi S_{\nu-2} H = 0, \\ \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi H \leq 2, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, \end{array} \right. \\ \text{для } \delta = +4 & \left\{ \begin{array}{l} \text{rang}_{\mathfrak{p}} \pi S_{\nu-2} H = 2, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}. \end{array} \right. & \text{для } \delta = 0, & h_1 = h_2 = 0, \quad r = 0, \end{array}$$

Мы напоминаем, что необходимо внести стандартные изменения в эти определения в случае ортогональной группы с  $n_0 = 0$  (см. (3.2), (3.3)).

**Доказательство.** Как и в доказательстве леммы 3.3, мы должны найти все двойные классы  $X = U_2 H U_2$  в  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$  такие, что  $\text{rang}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}}(\Delta h) = k$ . Элементы (4.7) принадлежат регулярному модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$  и имеют ранг  $k$ . Существует только один регулярный элемент типа  $\Pi^{(-1,+1)}$ . Это следует из леммы 4.2, доказываемой ниже. Элемент (4.8) и два первых элемента в (4.9) соответствуют элементам из леммы 3.4. В элементе  $\Pi_{l,m}^{(0)}(\delta)$  параметр  $|\delta|$  равен числу, которое мы должны

добавить к  $k_p$ -рангу его диагональной части  $D_{l,m}$ , чтобы получить  $k_p$ -ранг, равный числу  $k$ . Отметим, что элементы типа (4.9) появляются только в случае плохой редукции, т.е. в случае, когда  $(\det S \in \mathfrak{p})$ . В случае хорошей редукции суммирование по  $r$  ведется только в элементах (4.10):

$$(4.10) = \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, r \neq 0} U_2 \left[ E_2, 0, \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix}, D_{k-2,m} \right] U_2 \quad (\text{если } \det S \in \mathfrak{o}^\times).$$

Для завершения доказательства леммы достаточно доказать следующую полезную лемму 4.2:

**Лемма 4.2.** *Если любая матрица из двойного смежного класса*

$$\Delta \Pi_{l,m}^{(-1,+1)}(X, r) = \Delta U_2 \left[ \begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}, 0, 0, D_{l,m} \right] \cdot \gamma(X, r) U_2,$$

где  $X = (x_1, x_2) \in M_{\nu-2,2}(k)$  и  $r \in k$  (см. (4.4)), является  $\mathfrak{o}$ -целой, то элемент  $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}(X, r)$  равен элементу  $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}$ .

**Доказательство.** Условие целочисленности эквивалентно следующим соотношениям

$$r \in \mathfrak{o}, \quad x_1 \in \pi^{-1}L_{\nu-2}, \quad S_{\nu-2}x_2 \in L, \quad \frac{1}{2}S_{\nu-2}[x_2] \in \mathfrak{o}.$$

Из последних двух условий следует, что  $x_2 \in L_{\nu-2}$ , тем самым класс  $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}(X, r)$  можно получить из диагонального класса  $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}$ , умножая его слева и справа только на унитарные матрицы, построенные по векторам  $x_1$  и  $x_2$ .

**Лемма 4.3.** *Для образующих  $\Pi_{k,m}$  ( $m = \nu - k$ ) кольца Гекке ортогональной группы выполняется следующее включение:*

$$\Lambda_2 \Pi_{k,m} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

**Доказательство.** Мы можем доказать эту лемму, используя разложение леммы 4.1 или индукцию по параболическому рангу (см. лемму 6.4). Как и в доказательстве леммы 4.1 выполняются следующие более строгие включения для некоторых компонент рассматриваемых образующих:

$$\Lambda_2 \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(h), \quad \Lambda_2 \Pi_{l,m}^{(0)}(\delta) \in \mathcal{C}(U_2, P_2).$$

**Доказательство теоремы 3.** Вначале мы вычислим слагаемое с отрицательной сигнатурой в коэффициентах

$$R_l = \mathfrak{p}^{-l(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^l) - \mathfrak{p}^{-(l-1)(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-1}) Q_1 + \dots + (-1)^l Q_l \quad (4.12)$$

формального степенного ряда

$$Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t) = \left( \sum_{k \geq 0} \mathbf{p}^{-k(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^k)t^k \right) \left( \sum_{i=0}^{2\nu} (-1)^i Q_i t^i \right),$$

где согласно лемме 3.1

$$Q_i = Q_i^{(\nu)} = C_{i,\nu} \sum_{j=0}^i U_{i-j,\nu-i} \Pi_{j,\nu-j}.$$

Сигнатуры  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ -компонент элемента  $Q_i$  равны  $\pm 2, \pm 1, 0$  для  $1 < i < 2\nu - 1$  и равны  $\pm 1, 0$  для  $i = 1, 2\nu - 1$  (см. (4.1)). По определению  $\text{sign}(\mathbf{T}_-(\pi^k)) = -k$ , следовательно,  $\text{sign}(R_l) \geq -l$ . Для любого  $j \geq 0$  однородная  $s_{-l+j}(R_l)$  часть элемента  $R_l$  сигнатуры  $(j - l)$  может быть вычислена по следующей формуле:

$$\begin{aligned} & (-1)^j s_{-l+j}(R_l) \\ &= \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-j}) \cdot s_0(Q_j) + \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j-2)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-j-2}) \cdot s_{-2}(Q_{j+2}) \\ &+ \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j+2)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-j+2}) \cdot s_{+2}(Q_{j-2}) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j-1)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-j-1}) \cdot s_{-1}(Q_{j+1}) \\ &- \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j+1)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-j+1}) \cdot s_{+1}(Q_{j-1}). \end{aligned}$$

Мы полагаем, что  $\mathbf{T}_-(\pi^b) = 0$  и  $Q_b = 0$  для  $b < 0$ . Согласно лемме 4.1, второе и третье слагаемые принадлежат регулярному (относительно сферического отображения  $\Phi$ )  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ -модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ . Используя хорошо известные соотношения в кольце Гекке группы  $GL_2$  и „минус“-вложение мы получаем

$$\mathbf{T}_-(\pi^a) \mathbf{T}_-(\pi^b) = \sum_{c \leq a} \mathbf{p}^c \mathbf{T}_-(\pi^{a+b-2c}) \Lambda_2^c.$$

Произведения  $\Lambda_2 \cdot s_0(Q_j)$  и  $\Lambda_2 \cdot s_{+1}(Q_j)$  принадлежат модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$  (см. лемму 4.3), следовательно, для любых  $l$  и  $j \leq l - 1$  выполняется

$$\begin{aligned} & (-1)^{j+1} s_{-l+j}(R_l) \\ & \equiv \mathbf{T}_-(\pi^{l-j-1}) (s_{-1}(Q_{j+1}) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi) s_0(Q_j) + \mathbf{p}^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2) s_{+1}(Q_{j-1})) \end{aligned}$$

( $\equiv$  обозначает сравнение по модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ ). Следующая лемма является основным утверждением в доказательстве теоремы 3.

**Лемма 4.4.** Для  $j \geq 0$ ,

$$s_{-1}(Q_{j+1}) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi) \cdot s_0(Q_j) + \mathbf{p}^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2) \cdot s_{+1}(Q_{j-1}) \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Предположим, что лемма доказана.  $\Phi$ -сферический образ произведения ряда  $Q_-^{GL_2}(t)^{-1}$  с многочленом не содержит отрицательных степеней переменных

$x_{\nu-1}, x_{\nu}$ , следовательно, сферический образ произвольной компоненты сигнатуры  $(-l+j)$  коэффициента  $R_l$  равен 0:  $\Phi(s_j(R_l)) = 0$ . Из леммы 4.4 следует, что  $s_{-l+j}(R_l) \in \mathcal{DM}(U_2, P_2)$ , следовательно,

$$s_{-l+j}(R_l) = 0 \quad \text{для } 0 \leq j \leq l-1,$$

так как отображение  $\Phi$  инъективно на модуле  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ . Тем самым мы доказали (по модулю леммы 4.4), что коэффициент  $R_l$  имеет неотрицательную сигнатуру. Из этого вытекает, что ряд  $Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)$  является на самом деле многочленом, так как сигнатура элементов  $T_-(\pi^l) = -l$  стремится к бесконечности. Вычислим степень этого многочлена.

Из определения (4.12) ясно, что  $\text{sign}(R_{2\nu+l}) < 0$  для  $l \geq 2$ , следовательно,  $R_{2\nu+l} = 0$  для  $l \geq 2$ . Для  $l = 1$  выполняется

$$R_{2\nu+1} = p^{-(A+\nu)}T_-(\pi)Q_{2\nu} - p^{-2(A+\nu)}T_-(\pi^2)Q_{2\nu-1} + \dots,$$

где  $Q_{2\nu} = 1$  и  $Q_{2\nu-1} = Q_1 = p^{-A-\nu}(\Pi_{1,\nu-1} + U_{1,\nu-1})$  (см. лемму 3.1). Лемма 4.1, в специальном случае  $k = 1$  и  $m = \nu - 1$ , дает  $\text{sign}(\Pi_{1,\nu-1}) \leq +1$ , следовательно,  $\text{sign}(R_{2\nu+1}) < 0$  и  $R_{2\nu+1} = 0$ . Для  $l = 0$  мы имеем

$$R_{2\nu} = 1 - p^{-(A+\nu)}T_-(\pi)Q_1 + p^{-2(A+\nu)}T_-(\pi^2)Q_2 + \dots \quad (Q_{2\nu-2} = Q_2),$$

откуда получается  $\text{sign}(R_{2\nu}) \leq 0$ . Мы доказали выше, что коэффициенты не содержат слагаемых с отрицательной сигнатурой. Однородная часть с сигнатурой 0 имеет вид

$$s_0(R_{2\nu}) = p^{-2(A+\nu)}T_-(\pi^2)s_{+2}(Q_2) - p^{-(A+\nu)}T_-(\pi) \cdot s_{+1}(Q_1) + 1.$$

Из формул для коэффициентов  $Q_2, Q_1$  (см. лемму 3.1) и леммы 4.1 о разложении элементов  $\Pi_{2,\nu-2}$  и  $\Pi_{1,\nu-1}$  следует, что

$$s_{+2}(Q_2), s_{+1}(Q_1) \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Из этого следует, что  $s_0(R_{2\nu})$  принадлежит регулярному модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ , потому что это  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ -модуль.  $\Phi$ -образ элемента  $R_{2\nu}$  равен 0, поэтому  $R_{2\nu} = 0$  и, следовательно, выполняется

$$\deg R(t) = \deg(Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)) \leq 2\nu - 1, \quad (4.13)$$

и более того, все коэффициенты этого многочлена имеют неотрицательную сигнатуру.

Используя антиавтоморфизм  $*$ , определенный в (2.14), и принимая во внимание соотношение  $Q_+^{GL_2} = (Q_-^{GL_2})^*$ , мы получаем, что коэффициенты полинома  $Q(t)Q_+^{GL_2}(t)^{-1}$  имеют неположительную сигнатуру. Это утверждение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{sign}(Q_+^{GL_2}(t)) &\geq 0, & \text{sign}(Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)) &\geq 0, \\ \text{sign}(Q_-^{GL_2}(t)) &\leq 0, & \text{sign}(Q(t)Q_+^{GL_2}(t)^{-1}) &\leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты произведения

$$K(t) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l K_l^{(\nu)} t^l = (Q_-^{GL_2}(t)^{-1} Q(t)) Q_+^{GL_2}(t)^{-1} = Q_-^{GL_2}(t)^{-1} (Q(t) Q_+^{GL_2}(t)^{-1})$$

имеют сигнатуру, равную 0. Следовательно,

$$K(t) = s_0(Q_-^{GL_2}(t)^{-1} Q(t)) = s_0(R(t)),$$

где в левой части последнего равенства мы берем только ту часть коэффициентов, которая имеет сигнатуру 0. Из этого равенства мы можем получить явные формулы для коэффициентов  $K_l^{(\nu)}$  „ядра“  $K(t)$  в терминах двойных классов

$$K_l^{(\nu)} = s_0(R_l) = s_0\left(\mathfrak{p}^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2) Q_{l-2} - \mathfrak{p}^{-(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi) Q_{l-1} + Q_l\right). \quad (4.14)$$

Из оценки (4.13) вытекает, что

$$\deg K(t) \leq \deg R(t) \leq 2\nu - 1.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 3 теперь достаточно доказать лемму 4.4.

**Доказательство леммы 4.4.** Мы должны вычислить только нерегулярную часть суммы, определенной в лемме, а именно суммы

$$\mathfrak{p}^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2) \cdot s_{+1}(Q_{k-2}) - \mathfrak{p}^{-(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi) \cdot s_0(Q_{k-1}) + s_{-1}(Q_k). \quad (4.15)$$

Символ  $\equiv$  обозначает в этом доказательстве эквивалентность по модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$  регулярных элементов.

У нас есть точные формулы для коэффициентов  $Q_k^{(\nu)}$  многочлена Гекке (см. лемму 3.1)

$$Q_k^{(\nu)} = C_{k,\nu} \sum_{i=0}^k U_{i,\nu-k} \Pi_{k-i,\nu-k+i} \quad (0 \leq k \leq \nu).$$

Хорошо известное соотношение в кольце Гекке группы  $GL_2$  превращается после „минус“-вложения леммы 2.4 в соотношение

$$(\mathbf{T}_-(\pi))^2 = \mathbf{T}_-(\pi^2) + (\mathfrak{p} + 1)\Lambda_2.$$

Согласно лемме 4.3, мы имеем  $\Lambda_2 \Pi_{k,m} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2)$ , следовательно,

$$\mathbf{T}_-(\pi^2) s_{+1}(Q_{k-2}) \equiv (\mathbf{T}_-(\pi))^2 s_{+1}(Q_{k-2}).$$

Из леммы 4.1 о разложении в кольце  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$  мы получаем

$$\begin{aligned} s_{-1}(Q_k) &\equiv C_k \sum_{i=0}^k U_{i, \nu-k} [\Pi_{k-i-3, \nu-k+i+1}^{(0,-1)}(+2) + \Pi_{k-i-2, \nu-k+i}^{(0,-1)}(-1)], \\ s_{+1}(Q_{k-2}) &\equiv C_{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} U_{i, \nu-k+2} [\Pi_{k-i-5, \nu-k+i+3}^{(0,+1)}(+2) + \Pi_{k-i-4, \nu-k+i+2}^{(0,+1)}(-1)], \\ s_0(Q_{k-1}) &\equiv C_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} U_{i, \nu-k+1} [\Pi_{k-i-5, \nu-k+i+3}^{(0)}(+4) + \Pi_{k-i-4, \nu-k+i+2}^{(0)}(+3) \\ &\quad + \Pi_{k-i-3, \nu-k+i+1}^{(0)}(+2) + \Pi_{k-i-2, \nu-k+i}^{(0)}(-1) \\ &\quad + \Pi_{k-i-3, \nu-k+i+1}^{(0)}(-2) - \Pi_{k-i-3, \nu-k+i+1}^{(0)}(-1)]. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить первый и второй члены в (4.15), нам потребуется следующая таблица умножения:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0,+1)}(+2) &\equiv \mathbf{p}^{l+2m+n_0} \Pi_{l,m}^{(0)}(+2), \\ \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0,+1)}(-1) &\equiv \mathbf{p}^{l+2m+n_0+1} \Pi_{l,m}^{(0)}(-1), \\ \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0)}(+4) &= \mathbf{p}^{l+n_0-\ell_0+2} \text{Is}_{2m+\ell_0-2} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(+2), \\ \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0)}(+3) &= \mathbf{p}^{l+2} [(\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - 1) \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(+2) + \mathbf{p}^{n_0-\ell_0} \text{Is}_{2m+\ell_0} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-1)], \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $\ell_0$  и  $n_0 - \ell_0$  — размерности регулярной и нерегулярной частей решетки  $L_0$  (см. Замечание 1 после леммы 3.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0)}(+2) &\equiv \mathbf{p}^{l+2} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(+2), \\ \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0)}(-1) &\equiv \mathbf{p}^{l+1} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-1), \quad \mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0)}(-2) \equiv \mathbf{p}^{l+1+n_0-\ell_0} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Все эти тождества, проверяемые прямыми вычислениями, показывают, что в сумме (4.15) присутствуют только элементы типа  $\Pi_{l,m}^{(0,-1)}(\delta)$  с  $\delta = +2$  или  $-1$ . Следовательно, мы должны вычислить в сумме (4.15) коэффициенты при элементах

$$\Pi_{k-i-3, \nu-k+i+1}^{(0,-1)}(+2) \quad (\text{для } 0 \leq i \leq k-3), \quad \Pi_{k-i-2, \nu-k+i}^{(0,-1)}(-1) \quad (\text{для } 0 \leq i \leq k-2).$$

Используя приведенную выше таблицу умножения, мы вычислим сначала коэффициент для  $\delta = +2$ . Мы получаем

$$\begin{aligned} C_{k,\nu} \Pi_{k-i-3, \nu-k+i+1}^{(0,-1)}(+2) &[U_{i, \nu-k} + \mathbf{p}^{2\nu-2k+n_0+1} U_{i-2, \nu-k+2} \\ &\quad - \mathbf{p}^{n_0-\ell_0-i} \text{Is}_{2(\nu-k+i)+\ell_0} U_{i-2, \nu-k+1} \\ &\quad - \mathbf{p}^{-i} (\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - 1) U_{i-1, \nu-k+1} - \mathbf{p}^{-i} U_{i, \nu-k+1}], \end{aligned} \quad (4.18)$$

где первое слагаемое взято из элемента  $s_{-1}(*)$  (из его части с параметром  $(+2)$ ), второй — из  $s_{+1}(*)$  (из его части с  $(+2)$ ), а остальные взяты из слагаемых с параметрами  $(+4)$ ,  $(+3)$ ,  $(+2)$  в элементе  $s_0(*)$ . Коэффициенты  $U_{a,b}$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} U_{i,\nu-k+1} = & p^i U_{i,\nu-k} + p^{2\nu-2k+n_0+1} U_{i-2,\nu-k+2} \\ & - (p^{n_0-\ell_0} - 1) U_{i-1,\nu-k+1} \\ & - p^{n_0-\ell_0} \text{Is}_{2(\nu-k+i)+\ell_0} U_{i-2,\nu-k+1}, \end{aligned}$$

для  $a = i$ ,  $b = \nu - k + 1$  (см. Замечание 3 после леммы 3.1). Из этого тождества вытекает, что коэффициент в (4.18) равен 0. Та же рекуррентная формула показывает, что коэффициент при элементе  $\Pi_{k-i-2,\nu-k+i}^{(0,-1)}(-1)$  равен 0. Следовательно, лемма доказана для  $k \leq \nu$ .

Для  $k = \nu + 1$  доказательство аналогично. Нужно только принять во внимание, что  $Q_{\nu+1} = Q_{\nu-1}$ , и использовать „0“-форму ( $b = 0$ ) рекуррентного соотношения для  $U_{a,0}$ .

Предположим, что  $k > \nu + 1$ . Элементы  $\Pi_{l,m}^{(0)}(\delta)$  инвариантны относительно антиавтоморфизма  $*$ , следовательно, применяя  $*$  к тождеству (4.16), мы получаем

$$\Pi_{l,m}^{(0,-1)}(+2) (\mathbf{T}_-(\pi))^* \equiv p^{l+2m+n_0} \Pi_{l,m}^{(0)}(+2).$$

Умножая это тождество слева на  $\mathbf{T}_-(\pi)$  и используя (4.17), мы получаем

$$\mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(+2) (\mathbf{T}_-(\pi))^* \equiv p^{2\nu+n_0-2} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(+2).$$

Аналогично

$$\mathbf{T}_-(\pi) \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-1) (\mathbf{T}_-(\pi))^* \equiv p^{2\nu+n_0-2} \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-1).$$

Модуль  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$  —  $*$ -инвариантен, следовательно, из утверждения леммы для  $k \leq \nu$  вытекает, что элемент

$$W = s_{+1}(Q_k) + s_{-1}(Q_{k-2})(p^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2))^* - s_0(Q_{k-1})(p^{-(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi))^*$$

содержится в  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ -модуле  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ . Из того факта, что  $\mathbf{T}_-(\pi^2)$  принадлежит  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ , и из двух последних сравнений мы получаем, что произведение

$$p^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2) \cdot W \equiv s_{-1}(Q_{k-2}) + p^{-2(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^2) \cdot s_{+1}(Q_k) - p^{-(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi) \cdot s_0(Q_{k-1})$$

лежит в  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ . Это дает нам утверждение леммы для  $k > \nu$ , если мы заменим коэффициенты  $Q_k$  на  $Q_{2\nu-k}$ . Лемма 4.4 доказана.

В доказательстве теоремы 3 были получены точные формулы (4.14) для коэффициентов множителя  $K(t)$ . Сформулируем этот важный результат в виде отдельной теоремы.

**Теорема 4.** Коэффициенты  $K_l^{(\nu)}$  многочлена  $K(t) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l K_l^{(\nu)} t^l$  из теоремы 3 имеют следующий явный вид:  
для  $l \leq \nu$

$$\begin{aligned}
 K_l^{(\nu)} = C_{l,\nu} \sum_{j=0}^l \left\{ \right. & \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} [U_{l-j,\nu-l} - U_{l-j-2,\nu-l} \\
 & - (\mathbf{p} + 1) \mathbf{p}^{2\nu-l-j-2+n_0} U_{l-j-2,\nu-l+1} \\
 & \left. + \mathbf{p}^{4\nu-2l-2j+2n_0-3} U_{l-j-4,\nu-l+2} \right] \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (-1) [U_{l-j-1,\nu-l} - U_{l-j-2,\nu-l} \\
 & - \mathbf{p}^{2\nu-l-j-2+n_0} U_{l-j-3,\nu-l+1}] \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (-2) U_{l-j-2,\nu-l} \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (+2) [U_{l-j-2,\nu-l} \\
 & - \mathbf{p}^{2\nu-l-j-3+n_0} U_{l-j-4,\nu-l+1}] \\
 & \left. + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (+4) U_{l-j-4,\nu-l} + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (+3) U_{l-j-3,\nu-l} \right\},
 \end{aligned}$$

где  $C_{l,\nu}$  — коэффициент из леммы 3.1, а элементы  $\Pi_{j,m}(\delta)$  определены в лемме 4.1;

для  $l > \nu + 1$

$$\begin{aligned}
 K_l^{(\nu)} = C_{2\nu-l,\nu} \sum_{j=0}^{2\nu-l} \left\{ \right. & \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} [U_{2\nu-l-j,l-\nu} - U_{2\nu-l-j-2,l-\nu} \\
 & - (\mathbf{p} + 1) \mathbf{p}^{l-j-3+n_0} U_{2\nu-l-j,l-\nu-1} \\
 & \left. + \mathbf{p}^{2l-2j+2n_0-11} U_{2\nu-l-j,l-\nu-2} \right] \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (-1) [U_{2\nu-l-j-1,l-\nu} - U_{2\nu-l-j-2,l-\nu} \\
 & - \mathbf{p}^{l-j-4+n_0} U_{2\nu-l-j-1,l-\nu-1}] \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (+2) [U_{2\nu-l-j-2,l-\nu} \\
 & - \mathbf{p}^{l-j+n_0-5} U_{2\nu-l-j-2,l-\nu-1}] \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (-2) U_{2\nu-l-j-2,l-\nu} \\
 & + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (+4) U_{2\nu-l-j-4,l-\nu} \\
 & \left. + \Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)} (+3) U_{2\nu-l-j-3,l-\nu} \right\},
 \end{aligned}$$

и для  $l = \nu + 1$  мы должны заменить в первых квадратных скобках член  $p^{2l-2j+2n_0-11} U_{2\nu-l-j, l-\nu-2}$  на слагаемое  $p^{4\nu-2l-2j+2n_0-3} U_{l-j-4, \nu-l+2}$  ( $U_{a,b} = 0$  для  $a < 0$ ).

**Доказательство теоремы 4.** Предположим, что  $l$  меньше или равно  $\nu$ , тогда (см. (4.14))

$$K_l^{(\nu)} = p^{-2(A+\nu)} T_-(\pi^2) s_{+2}(Q_{l-2}) - p^{-(A+\nu)} T_-(\pi) s_{+1}(Q_{l-1}) + s_0(Q_l). \quad (4.19)$$

Явная форма элементов  $s_{+2}(Q_{l-2})$ ,  $s_{+1}(Q_{l-1})$  и  $s_0(Q_l)$  следует из леммы 3.1 и леммы 4.1. Первое слагаемое в  $K_l$  содержит произведения двух типов:  $T_-(1, \pi^2) \cdot \Pi_{k,m}^+$  и  $\Lambda_2 \cdot \Pi_{k,m}^+$ . Сферический образ коэффициента  $K_l$  не содержит нетривиальных степеней переменных  $x_{\nu-1}, x_\nu$ , следовательно, согласно лемме 4.2, нам не нужно вычислять элементы произведения

$$T_-(1, \pi^2) \Pi_{k,m}^+ = \text{const} \Pi_{k,m}^{(-1,+1)}.$$

Чтобы вычислить произведение с  $\Lambda_2$  нам потребуется следующее тождество:

$$\Lambda_2 \Pi_{k,m}^+ = p^{2\nu-2k+2n_0-6} \Pi_{k,m}^{(0)}(0),$$

которое является простым следствием представления (2.10). Делая замену в индексе суммирования, мы получаем, что с точностью до элементов типа  $\Pi_{k,m}^{(-1,+1)}$ , выполняется следующее равенство

$$p^{-2(A+\nu)} T_-(\pi^2) s_{+2}(Q_{l-2}) \equiv C_{l,\nu} \sum_{j=0}^{l-4} p^{4\nu-2l-2j+2n_0-3} U_{l-j-4, \nu-l+2} \Pi_{j, \nu-j-2}^{(0)}.$$

После умножения на элементы типа  $\Pi_{k,m}^{(0,+1)}$  на  $T_-(\pi)$  во втором слагаемом в (4.19) мы получаем элементы типа  $\Pi_{k,m}^{(0)}$  и  $\Pi_{k,m}^{(-1,+1)}$ :

$$\begin{aligned} T_-(\pi) \Pi_{k,m}^{(0,+1)} &= p^{2\nu-k+n_0-3} (p+1) \Pi_{k,m}^{(0)} + c_1 \Pi_{k,m}^{(-1,+1)}, \\ T_-(\pi) \Pi_{k,m}^{(0,+1)}(+2) &= p^{2\nu-k+n_0-4} \Pi_{k,m}^{(0)}(+2) + c_2 \Pi_{k,m}^{(-1,+1)}, \\ T_-(\pi) \Pi_{k,m}^{(0,+1)}(-1) &= p^{2\nu-k+n_0-3} \Pi_{k,m}^{(0)}(-1) + c_3 \Pi_{k,m}^{(-1,+1)}, \end{aligned}$$

так как  $T(\pi)^2 = T(1, \pi^2) + (p+1)T(\pi, \pi)$ . Нам не нужно следить за элементами  $\Pi_{k,m}^{(-1,+1)}$ , следовательно, произведение  $T_-(\pi) s_{+1}(Q_{l-1})$  дает нам

$$\begin{aligned} C_{l,\nu} \left( \sum_{j=0}^{l-2} (p+1) p^{2\nu-l-j-2+n_0} U_{l-j-2, \nu-l+1} \Pi_{j, \nu-j-2}^{(0)} \right. \\ \left. + \sum_{\delta=-1,+2} p^{2\nu-l-j+n_0-1-|\delta|} U_{l-j-2-|\delta|, \nu-l+1} \Pi_{j, \nu-j-2}^{(0)}(\delta) \right). \end{aligned}$$

Чтобы закончить доказательство теоремы в случае  $l \leq \nu$  остается добавить только часть элемента  $Q_l$ , имеющую сигнатуру 0. Для  $l > \nu + 1$  мы должны принять во внимание равенства

$$Q_l = Q_{2\nu-l}, \quad Q_{l-1} = Q_{2\nu-l+1}, \quad Q_{l-2} = Q_{2\nu-l+2}$$

в (4.19) (для  $l = \nu + 1$  мы имеем  $Q_{(\nu+1)-2} = Q_{\nu-1}$  в (4.19)) и использовать те же самые тождества, что и в случае  $l \leq \nu$ . Теорема доказана.

### §5. Группа Якоби

Обозначим через  $V'$   $n$ -мерное векторное пространство над локальным полем  $k$  и через  $S'$  — квадратичную форму на  $V'$ . Зафиксируем максимальную  $o$ -целую решетку  $L'$  в  $V'$ .

**Группой Гейзенберга**  $H$  размерности  $2n$  для квадратичной формы  $S'$  называется центральное расширение аддитивной группы  $n \times 2$ -матриц

$$H_{n,2} = \{[x, y, z] : x, y \in V', z \in k\}$$

с умножением определенным следующим образом:

$$[x, y, z] \cdot [x_1, y_1, z_1] = [x + x_1, y + y_1, z + z_1 + \frac{1}{2}(S'(x, y_1) - S'(y, x_1))].$$

Подгруппа  $Z = \{[0, 0, z] : z \in k\}$  является центром группы  $H_{n,2}$  и

$$H_{n,2}/Z \simeq V' \times V'.$$

Ортогональная группа  $G(S')$  квадратичной формы  $S'$  действует слева на группе  $H_{n,2}$ :

$$U[x, y, z] = [Ux, Uy, z].$$

Группа  $SL_2(k)$  действует на векторном пространстве, порожденном векторами  $x$  и  $y$ , следовательно, имеется правое действие группы  $SL_2(k)$  на группе  $H_{n,2}$ :

$$[x, y, z]A = [(x, y)A, z].$$

Мы можем определить теперь *группу Якоби*  $G^J$  как полупрямое произведение групп  $SL_2$ ,  $H_{n,2}$ , и  $G(S')$ . Следовательно,

$$J = \{(A, [X, z], U) : A \in SL_2(k), [X, z] \in H_{n,2}, U \in G(S')\},$$

и в группе  $G^J$  выполняется следующее равенство

$$(A, [X, z], U) \cdot (A_1, [X_1, z_1], U_1) = (AA_1, [[X, z]A_1 + U[X_1, z_1]], UU_1).$$

Мы используем следующие обозначения для стандартных элементов группы  $G^J$ :

$$[A]_2 = (A, 0, E_n), \quad [U]_n = (E_2, 0, U), \quad [X, z] = (E_2, [X, z], E_n).$$

В этих обозначениях выполняются равенства:

$$[A]_2[U]_n = [U]_n \cdot [A]_2, \quad [A]_2 \cdot [XA, z] = [X, z] \cdot [A]_2, \quad [U]_n \cdot [X, z] = [UX, z] \cdot [U]_n.$$

Центр группы  $G^J$  равен  $Z_{G^J} = (E_2, [0, z], E_n)$ , следовательно, группа  $G^J$  не является редуктивной. Определим компактную подгруппу

$$\Gamma^J = SL_2(\mathfrak{o}) \rtimes \Gamma_H \rtimes U(S')$$

группы  $G^J$ , равную произведению трех подгрупп  $SL_2(\mathfrak{o})$ ,

$$U(S') = \{ \gamma \in G(S') : \gamma L' = L' \}, \quad \Gamma_H = \{ [u, v, -\frac{1}{2}S'(u, v) + r] : u, v \in L', r \in \mathfrak{o} \}.$$

Из определений группы  $G^J$  и параболической подгруппы  $P_2$  ортогональной группы  $G(S)$  квадратичной формы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_2 \\ 0 & S' & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $S' = S_{\nu-2}$  в обозначениях §2, что  $G^J$  — подгруппа группы  $P_2$ . Точнее говоря, отображение

$$[A, [X, z], U] \rightarrow [A, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X] + zJ_2, U] \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является гомоморфным вложением группы  $G^J$  в группу  $P_2$  и группы  $\Gamma^J$  в группу  $U_2$  (см. (2.5) и (4.4)). Мы будем отождествлять  $J$ -группы с их образами относительно этого вложения.

Группы  $(G^J, \Gamma^J)$  образуют пару Гекке (см. §2), и мы покажем ниже, что кольцо Гекке  $\mathcal{H}(\Gamma^J, G^J)$  соответствует некоторому подкольцу кольца  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ , а именно кольцу

$$S\mathcal{H}(U_2, P_2) = \left\{ \sum_i a_i U_2 [A, X, Y, B] U_2 ; \mu(B) = 1, \det A \in \mathfrak{o}^\times \right\},$$

где мы используем обозначения (2.5). В (4.2) было определено подкольцо

$$\mathcal{E}\mathcal{H}(U_2, P_2) = \left\{ \sum_i a_i U_2 [E_2, X, Y, B] U_2 ; \mu(B) = 1 \right\}$$

кольца  $S\mathcal{H}(U_2, P_2)$ . Для колец  $S\mathcal{H}(U_2, P_2)$  и  $\mathcal{H}(\Gamma^J, G^J)$  выполняется лемма о вложении из §1, следовательно, определено вложение

$$\text{Im}: S\mathcal{H}(U_2, P_2) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma^J, G^J).$$

В кольце  $\mathcal{H}(\Gamma^J, G^J)$  имеется больше нерегулярных двойных классов, но регулярные диагональные смежные классы в этих кольцах одни и те же.

Можно сказать, что подкольцо  $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$  является объектом, противоположным подкольцу  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ . Например, очевидно, что  $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$  инвариантно относительно антиавтоморфизма  $*$  (см. (2.14))

$$\mathcal{SH}(U_2, P_2) = \mathcal{SH}(U_2, P_2)^*.$$

Определим специальный элемент  $\nabla$  (см. пример, связанный с группой  $SL_2$  в §1) в  $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$

$$\nabla = \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}} U_2[E_2, 0, rJ_2, E] = U_2[E_2, 0, J_2, E]U_2 + U_2[E_2, 0, 0, E]U_2$$

и главный идеал

$$\mathcal{J} = \mathcal{SH}(U_2, P_2) \cdot \nabla.$$

**Лемма 5.1.** *Идеал  $\mathcal{J}$  является двусторонним идеалом кольца  $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$ . Этот идеал инвариантен относительно антиавтоморфизма  $*$ .*

**Доказательство.** Мы можем записать произвольный элемент идеала в следующем виде:

$$\mathcal{J} = \left\{ \sum_i a_i \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}} U_2([A_i, X_i, Y_i, B_i] \cdot [E_2, 0, rJ_2, E]) \in \mathcal{SH}(U_2, P_2) \right\}.$$

Первое утверждение леммы следует из правила умножения в  $P_2$ :

$$[E_2, 0, rJ_2, E] \cdot [A, X, Y, B] = [A, X, Y, B] \cdot [E_2, 0, (r \det A)J_2, E],$$

и так как  $\det A \in \mathfrak{o}^\times$ , то для любого  $H \in \mathcal{SH}(U_2, P_2)$  выполняется  $H\nabla = \nabla H$ . Второе утверждение леммы следует из тождества  $\nabla = \nabla^*$ . Лемма доказана.

Предположим для простоты формулировок, что  $2$  — единица кольца целых чисел локального поля  $k$ . В этом случае выполняется следующий критерий принадлежности двойного класса к идеалу  $\mathcal{J}$ .

**Лемма 5.2.** *Предположим, что двойной класс  $U_2HU_2 \in \mathcal{SH}(U_2, P_2)$  не может быть приведен к диагональной форме  $U_2HU_2 = U_2[A, 0, Z, B]U_2$  в случае „хорошей“ редукции квадратичной формы  $S$  ( $\det S_0 \in \mathfrak{o}^\times$ ), или не может быть приведен к виду*

$$U_2HU_2 = U_2[A, X, Z, B]U_2, \quad A = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^{-a} \end{pmatrix}, \quad X = (x_1, x_2),$$

где  $x_1 \in L_0^{(-1)}$  и  $x_2 \in \pi^{-a}L_0^{(-1)}$ , в общем случае. Тогда этот двойной класс принадлежит идеалу  $\mathcal{J}$

$$U_2HU_2 \in \mathcal{J}.$$

**Доказательство.** Возьмем элемент  $H = [A, 0, 0, B] \cdot [E_2, X, Z, E] \in P_2$  с  $A = \text{diag}(\pi^a, \pi^{-a})$  и  $B = \text{diag}(\pi^{b_3} \dots \pi^{b_\nu}, E_{n_0}, \pi^{-b_\nu} \dots \pi^{-b_3})$  и определим

$$\gamma(M) = [E_2, M, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[M], E] \in U_2 \quad \text{с } M = (m_1, m_2) \in L_{\nu-2} \times L_{\nu-2},$$

и предположим, что

$$m_1 \in L_{\nu-2} \cap \pi^a B^{-1} L_{\nu-2} \quad \text{и} \quad m_2 \in L_{\nu-2} \cap \pi^{-a} B^{-1} L_{\nu-2}.$$

Тогда выполняется

$$\gamma(-M) \cdot H \cdot \gamma(M) = H \cdot [E_2, 0, rJ_2, E], \quad (5.1)$$

где  $X = (x_1, x_2)$  и  $r = ({}^t m_1 S_{\nu-2} x_2 - {}^t x_1 S_{\nu-2} m_2) J_2$ . Если по крайней мере одна компонента  $(x_1, x_2)$  удовлетворяет условиям

$$x_1 \notin L_{\nu-2}^\# \cup \pi^a B^{-1} L_{\nu-2}^\#, \quad \text{или} \quad x_2 \notin L_{\nu-2}^\# \cup \pi^{-a} B^{-1} L_{\nu-2}^\#, \quad (5.2)$$

где  $L_{\nu-2}^\#$  — решетка, двойственная к решетке  $L_{\nu-2}$ , тогда можно выбрать  $m_1$  и  $m_2$  так, что элемент  $r$  в тождестве (5.1) не будет целым. Следовательно, для элементов  $H$  с таким  $X$

$$U_2 H U_2 = \mathfrak{p}^{-1} \sum_i \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}} U_2 H_i \cdot [E_2, 0, rJ_2, E] \in \mathcal{J}.$$

В нашем случае (см. §2)

$$L^\# = \bigoplus_{1 \leq i \leq \nu-2} \mathfrak{o} e_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq \nu-2} \mathfrak{o} e'_{\nu-2-i} \oplus S_0^{-1} L_0 = L_{\nu-2}^{(reg)} \oplus L_0^{(-1)}.$$

Предположим, что условие (5.2) выполнено. Если  $x_i = x_i^{(reg)} + x_i^{(-1)}$ , тогда  $x_i^{(reg)} \neq 0$  (это доказывает лемму в случае хорошей редукции) или  $x_1 \neq x_1^{(-1)}$ ,  $x_2 \neq x_2^{(-1)}$ . Лемма доказана.

Кольцо  $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$ , как и кольцо  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ , не является коммутативным и обладает делителями нуля. Например,  $\nabla^2 = \mathfrak{p} \nabla \Rightarrow \nabla(\nabla - \mathfrak{p}) = 0$ . Для двух элементов

$$\mathbf{T}_0(\pi) = U_2 \text{diag}(\pi, \pi^{-1}, E_{2(\nu-2)+n_0}, \pi, \pi^{-1}) U_2 \quad (5.3)$$

и

$$\Xi = \Pi_{0, \nu-2}^{(0)}(-1) = \sum_{\substack{X \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ \text{rank}_\nu(\pi X)=1}} U_2 [E_2, X, -\frac{1}{2} S_{\nu-2}[X], E]$$

мы имеем  $\mathbf{T}_0(\pi) \cdot \Xi \neq \Xi \cdot \mathbf{T}_0(\pi)$ .

В силу леммы 5.1 мы можем определить фактор-кольца

$$\begin{aligned} S\mathcal{H}^J &= S\mathcal{H}(U_2, P_2)/\mathcal{J}, \\ \mathcal{E}\mathcal{H}^J &= \mathcal{E}\mathcal{H}(U_2, P_2)/\mathcal{J} \cap \mathcal{E}\mathcal{H}(U_2, P_2) \subset S\mathcal{H}^J. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Мы назовем эти новые кольца *кольцами Гекке-Якоби*. Антиавтоморфизм  $*$  индуцирует антиавтоморфизмы колец  $S\mathcal{H}(U_2, P_2)$  и  $\mathcal{E}\mathcal{H}(U_2, P_2)$ , которые мы будем обозначать через  $*$ .

**Лемма 5.3.** *Для ортогональной группы с хорошей редукцией ( $\det S \in \mathfrak{o}^\times$ ) кольцо  $S\mathcal{H}^J$  является коммутативным. Если  $\text{ранг } m_0 = \dim_{\kappa_p} L_0^{-1}/L_0$  нерегулярной части формы  $S$  равен 1 (см. замечание 1 после леммы 3.1), то кольцо  $\mathcal{E}\mathcal{H}^J$  является коммутативным.*

**Доказательство.** Пусть форма  $S$  имеет хорошую редукцию. В силу леммы 5.2, любой двойной класс, не принадлежащий идеалу  $\mathcal{J}$ , имеет вид

$$H = U_2[A, X, Y, B]U_2 \quad \text{с } X = 0, Y = {}^t r J_2.$$

Если  $r = 0$ , то  $H^* = H$ , так как элементы  $\text{GL}_2(\mathfrak{o})\text{AGL}_2(\mathfrak{o})$  и  $U^{(\nu-2)}BU^{(\nu-2)}$  колец Гекке общей линейной группы и ортогональной группы ранга  $\nu-2$  инвариантны относительно  $*$ . Если  $r$  не принадлежит  $\mathfrak{o}$ , то тогда

$$[\alpha]_2^{-1}[A, 0, r J_2, B][\alpha] = [A, 0, \epsilon r J_2, B] \quad \left( \alpha = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

и выполняется следующее тождество:

$$H = \frac{1}{\mathfrak{p}-1} \left( \sum_{\epsilon \in \mathfrak{o}^\times/\mathfrak{p}} U_2[A, 0, \epsilon r J_2, B]U_2 - U_2[A, 0, 0, B]U_2 \right). \quad (5.5)$$

Следовательно,  $H = H^*$ . Мы доказали, что элементы кольца  $S\mathcal{H}^J$  инвариантны относительно антиавтоморфизма  $*$ , и, в частности,

$$H_1 \cdot H_2 = (H_1 \cdot H_2)^* = (H_2)^* \cdot (H_1)^* = H_2 \cdot H_1.$$

Предположим теперь, что квадратичная форма  $S$  имеет плохую редукцию и  $m_0 = 1$ . В этом случае произвольный двойной класс имеет форму

$$H = U_2[E_2, 0, r J_2, B]U_2 \quad \text{или} \quad H = U_2[E_2, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X] + r J_2, B]U_2,$$

где  $X = (x_1, x_2) \in L_0^{(-1)} \times L_0^{(-1)} = \pi^{-1}(\mathfrak{o} \times \mathfrak{o})$ . Если  $r = 0$ , то

$$H^* = U_2[E_2, -X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2 = U_2[E_2, +X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2.$$

Если  $r \neq 0$ , то для  $m_0 = 1$  вектор  $X$  может быть приведен к виду  $(0, x_2)$  при помощи умножения на элементы из  $U_2$ , и опять выполняется тождество типа (5.5).

Следовательно, мы доказали, что любой двойной класс в  $\mathcal{E}\mathcal{H}^J$  —  $*$ -инвариантен, и что такой класс равен, с точностью до константы  $\pm 1$ , диагональному классу или классу вида  $U_2[E_2, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2$ . Лемма доказана.

Применяя метод, использованный в случае ортогональной группы, можно доказать стандартные результаты о структуре кольца  $\mathcal{S}\mathcal{H}^J$  в регулярном случае.

**Лемма 5.4.** *В случае хорошей редукции кольцо  $\mathcal{S}\mathcal{H}^J$  порождено элементами*

$$J(\mathbf{T}_0(\pi)) \text{ и } \Pi_{i,j}^J = J(\mathbf{p}^{-i}\Pi_{i,j}^{(0)}(0)),$$

где  $\mathbf{T}_0(\pi)$  и  $\Pi_{i,j}^{(0)}(0)$  определены в (5.3), (4.11) (см. также (3.2)), которые являются алгебраически независимыми.

Структура коммутативного кольца  $\mathcal{E}\mathcal{H}^J$  в случае  $m_0 = 1$  немного более сложная. В лемме 5.3 мы доказали, что любой двойной класс из  $\mathcal{E}\mathcal{H}^J$  эквивалентен регулярно диагональному классу или классу типа  $U_2[E, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2$ , где  $X$  не сводится к нулю. Используя те же самые рассуждения, что и в доказательстве леммы 3.1 для группы  $P_2$ , мы получаем

$$\begin{aligned} & U_2[E, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2 \\ &= \sum_{\substack{Z \in BL_{\nu-2}/L_{\nu-2} \\ \gamma \in B^{-1}U^{(\nu-2)}B \setminus U^{(\nu-2)}}} \{U_2[E, BZ + X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X] - \frac{1}{2}S_{\nu-2}[Z], B] \cdot [E_2, 0, 0, \gamma]\} \\ &= \Xi \cdot [E_2, 0, 0, B]. \end{aligned}$$

Тождество

$$(\Xi + 1)^2 = \mathbf{p}^2$$

вытекает из

$$\begin{aligned} & \sum_{X \in L_0^{(-1)}/L_0} [E_2, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], E] \cdot \sum_{Y \in L_0^{(-1)}/L_0} [E_2, Y, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[Y], E] \\ &= \sum_{Z, X \in L_0^{(-1)}/L_0} [E_2, Z, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[Z] + \frac{1}{2}({}^t z_1 S_{\nu-2} x_2 - {}^t z_2 S_{\nu-2} x_1), E] \equiv \mathbf{p}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, в нерегулярном случае кольцо Гекке-Якоби является расширением полиномиального кольца.

В качестве следствия из построенной теории мы получаем следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2) & & \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2)^J & \\ & \pm \downarrow & & \mathrm{in} \downarrow & \\ \mathcal{H}(U, G) & \xrightarrow{\mathrm{Im}} & \mathcal{H}(U_2, P_2) & \xleftarrow{\mathrm{in}} & \mathcal{S}\mathcal{H}(U_2, P_2) \xrightarrow{J} \mathcal{S}\mathcal{H}^J \\ & & & \uparrow \mathrm{in} & \uparrow \mathrm{in} \\ & & & \mathcal{E}\mathcal{H}(U_2, P_2) & \xrightarrow{J} \mathcal{E}\mathcal{H}^J, \end{array}$$

где  $\text{Im}$  и  $\pm$  — вложения, определенные в (2.6) и в лемме 2.4,  $J$  обозначает стандартный эпиморфизм

$$J: \mathcal{SH}(U_2, P_2) \rightarrow \mathcal{SH}(U_2, P_2) / \mathcal{J} = \mathcal{SH}^J$$

кольца Гекке в кольцо Гекке-Якоби (см. (5.4)),  $\text{in}$  — вложение колец. В лемме 5.4 мы показали, что в регулярном случае кольцо Гекке-Якоби совпадает с произведением двух подколец

$$\mathcal{SH}(U_2, P_2) = \mathcal{EH}(U_2, P_2) \times \mathcal{H}(\text{SL}_2)^J.$$

В теоремах 2 и 3 из §4 были получены разложения стандартного многочлена Гекке  $Q(t)$  в кольце  $\mathcal{H}(U_2, P_2)$  параболической подгруппы, и было доказано, что коэффициенты ядра  $K(t)$  принадлежат подкольцу  $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$ . Следовательно, можно вычислить их  $J$ -образы в кольце Гекке-Якоби  $\mathcal{EH}^J$ . Мы докажем сейчас, что  $J$ -образ многочлена  $K(t)$  равен стандартной локальной дзета-функции группы Якоби  $\Gamma^J$ .

**Теорема 5.** *Предположим, что ортогональная группа  $G(S)$  имеет хорошую редукцию, тогда стандартный многочлен Гекке  $Q(t)$ , определенный в (3.1), имеет разложение*

$$Q(t) = Q_-^{GL_2}(\mathfrak{p}^{-(A+\nu)} t) \cdot K(t) \cdot Q_+^{GL_2}(\mathfrak{p}^{-(A+\nu)} t).$$

Первый и второй члены являются  $\pm$ -вложениями многочленов Гекке  $Q^{GL_2}(t) = 1 - T(\pi)t + \mathfrak{p}T(\pi, \pi)t^2$ .  $J$ -образ многочлена  $K(t)$  вычисляется по следующей формуле:

$$K(t) = \sum_{i=0}^{2\nu-2} (-1)^i K_i t^i \equiv_{\mathcal{J}} (1 - \mathfrak{p}^{-n_0} t^2) \sum_{i=0}^{2(\nu-2)} (-1)^i Q_{i, \nu-2}^J(\mathfrak{p}^{-1} t)^i,$$

где для  $0 \leq i \leq \nu - 2$ ,

$$Q_{i, \nu-2}^J = \mathfrak{p}^{-iA + (\nu-2-i) - (\nu-2)} \sum_{k=0}^i U_{i-k, \nu-2-i} \Pi_{k, \nu-2-k}^J$$

(ср. с формулой для  $Q_i^{(\nu-2)}$  из леммы 3.1), и

$$\Pi_{k, \nu-2-k}^J = J(\mathfrak{p}^{-k} \Pi_{k, \nu-2-k}^{(0)}(0))$$

— образующие кольца  $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$  (см. лемму 5.4);  
а для  $i > \nu - 2$  мы полагаем

$$Q_{i, \nu-2}^J = Q_{i-\nu-2, \nu-2}^J.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 3 выполняется тождество

$$J(K_i) = \mathbf{p}^{-iA+\langle\nu-i\rangle-\langle\nu\rangle} \sum_{j=0}^i J(\Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)}) [U_{i-j,\nu-i} - U_{i-j-2,\nu-i} - (\mathbf{p}+1)\mathbf{p}^{2\nu-i-j-2+n_0}U_{i-j-2,\nu-i+1} + \mathbf{p}^{4\nu-2i-2j+2n_0-3}U_{i-j-4,\nu-i+2}],$$

и мы должны доказать только, что

$$K_i \equiv_{\mathcal{J}} \mathbf{p}^{-i} Q_{i,\nu-2}^J - \mathbf{p}^{-i-n_0+2} Q_{i-2,\nu-2}^J.$$

Обе части последнего равенства содержат одни и те же элементы  $J(\Pi_{j,\nu-j-2}^{(0)})$ , поэтому если мы сравним коэффициенты при этих элементах, то получим, что последнее равенство эквивалентно равенству

$$U_{i-j,\nu-i} - U_{i-j-2,\nu-i} - (\mathbf{p}+1)\mathbf{p}^{2\nu-i-j-2+n_0}U_{i-j-2,\nu-i+1} + \mathbf{p}^{4\nu-2i-2j+2n_0-3}U_{i-j-4,\nu-i+2} = \mathbf{p}^{i-j}U_{i-j,\nu-i-2} - \mathbf{p}^{2\nu-i-j-1}U_{i-2-j,\nu-i-2}.$$

После замены индексов суммирования и тривиальных преобразований мы получаем

$$\mathbf{p}^s U_{s,\delta} = U_{s,\delta+2} + \mathbf{p}^{2\delta+s+3} U_{s-2,\delta+2} - \mathbf{p}^{2\delta+s+n_0+2} (\mathbf{p}+1) U_{s-2,\delta+3} + \mathbf{p}^{4\delta+2s+2n_0+5} U_{s-4,\delta+4}, \quad (5.6)$$

где  $U_{s,\delta}$  — коэффициенты из леммы 3.1. В случае хорошей редукции мы получаем  $n_0 = l_0$  и  $\lambda_v(bbp) = 0$  для  $v > 0$  в формуле леммы 3.1. Следовательно,  $U_{s,\delta} \neq 0$  только для  $v = 2l$ . Для таких  $v$  выполняется следующая формула

$$U_{s,\delta} = (-1)^l \sum_{t=0}^l (-1)^t \mathbf{p}^{t(n_0+\delta+t-1)} \frac{(\mathbf{p}^{\delta+t+1} - 1) \dots (\mathbf{p}^{\delta+s} - 1)}{\varphi_t(\mathbf{p}) \varphi_{l-t}(\mathbf{p}^2)},$$

где

$$\varphi_v(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - 1) \dots (\mathbf{p}^v - 1), \quad \varphi_0(\mathbf{p}) = 1.$$

Члены в правой части (5.6) имеют общий множитель, следовательно, эта часть (5.6) равна

$$\begin{aligned} & (-1)^l \sum_{t=0}^l (-1)^t \mathbf{p}^{t(n_0+\delta+t-1)} \frac{(\mathbf{p}^{\delta+t+3} - 1) \dots (\mathbf{p}^{\delta+2l} - 1)}{\varphi_t(\mathbf{p}) \varphi_{l-t}(\mathbf{p}^2)} \\ & \times \left\{ \mathbf{p}^{2t} (\mathbf{p}^{\delta+2l+2} - 1) (\mathbf{p}^{\delta+2l+1} - 1) - (\mathbf{p}^{\delta+2l+3} - 1) (\mathbf{p}^{2l-2t} - 1) \mathbf{p}^{2t} \right. \\ & \left. - \mathbf{p}^{\delta+2l+t+1} (\mathbf{p}^{\delta+2l+1} - 1) (\mathbf{p}^t - 1) + \mathbf{p}^{2\delta+4l+3} (\mathbf{p}^t - 1) (\mathbf{p}^{t-1} - 1) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что компонента в скобках равна  $\mathbf{p}^{2l} (\mathbf{p}^{\delta+t+1} - 1) (\mathbf{p}^{\delta+t+2} - 1)$ , следовательно, мы доказали (5.6) и равенства для коэффициентов  $K_i$  с  $0 \leq i \leq \nu - 2$ . В случае  $i > \nu - 2$  доказательство аналогично.

## §6. Разложения многочленов Гекке в общем случае

В этом параграфе мы докажем общую теорему, которая объясняет существование разложений локальных дзета-функций, описанных в §3 и §4. Общая теорема даст нам и другие возможные приложения, например, разложение дзета-функции спинорного типа для классических групп. Для этого нам нужна более подробная информация о структуре кольца Гекке параболической подгруппы  $P_m$ .

Зафиксируем, как и в §2, произвольную максимальную решетку нормы  $\mathfrak{P}^\ell$  и параболическую подгруппу  $P_m$ . Мы полагаем

$$IG = \{g \in G : gL \subset L\}$$

и называем элемент  $H = \sum a_i U_P h_i$  целым, если  $h_i \in IG$  для всех  $h_i$ . Через

$$\mathcal{GH}(U_m, P_m)$$

мы обозначаем подкольцо всех целых элементов в  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ . Согласно теореме об элементарных делителях, для любого  $A \in GL_m(\mathcal{K})$  мы можем определить  $\mathfrak{P}$ -порядок  $d(A)$  матрицы  $A$

$$d(A) = \max_j d_j, \quad \text{если } GL_m(\mathcal{O}) A GL_m(\mathcal{O}) = GL_m(\mathcal{O}) \text{diag}(\Pi^{d_1}, \dots, \Pi^{d_m}) GL_m(\mathcal{O}).$$

Существует проекция кольца  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$  на коммутативную область целостности  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ .

**Лемма 6.1.** Для произвольного целого элемента  $H \in \mathcal{GH}(U_m, P_m)$

$$H = \sum_i a_i U_m h_i = \sum_i a_i U_m [A_i, X_i, Z_i, B_i] \quad (\text{см. обозначения (2.5)})$$

произведение  $\Lambda_m^d H$  принадлежит подкольцу  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  для произвольного  $d \geq \max_i d(A_i)$ .

**Доказательство.** Произвольный элемент  $h_i$  отображает решетку  $L$  в себя, следовательно,

$$h_i \in \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{P}^\ell & \mathfrak{P}^\ell & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

В частности,  $X_i \in (\mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m})^m$ . Матрица  $A_i^{-1} \Pi^d$  — целая, следовательно,  $X_i A_i^{-1} \Pi^d \in (\mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m})^m$  и  $X$ -часть элемента  $\Lambda_m^d h_i$  может быть приведена к нулю:

$$\Lambda_m^d U_m h_i = U_m [\Pi^{-d} A_i, 0, \bar{\Pi}^d Z + \varepsilon \bar{\Pi}^d S_{\nu-m} [X_i] + \tilde{Z} \Pi^{-d} A_i, B_i],$$

где  $\tilde{Z} = Z_{X_i, \Pi^{-d} A_i}$  (см. лемму 2.1). По определению решетки  $L$

$$X_i \Pi^{-d} A_i \in M_{2(\nu-m)+n_0}(\mathfrak{P}^{-\ell}),$$

следовательно, мы можем привести к нулю  $Z$ -часть последнего элемента при помощи левого умножения на матрицу  $[E, 0, *, E] \in U_m$ . Это доказывает лемму.

**Лемма 6.2.** Пусть  $m = \nu$ , тогда для любых  $H = U_\nu D U_\nu \in \mathcal{GH}(U_\nu, P_\nu)$  и  $d \geq \mu(D)$  произведение  $\Pi^d H$  принадлежит кольцу  $\mathcal{C}(U_\nu, P_\nu)$ .

**Доказательство.** Для доказательства леммы нам потребуется система представителей из левых классов элемента

$$H(n) = \sum_{UDU, \text{ord}_p \mu(D)=n} UDU,$$

где сумма берется по всем различным левым смежным классам. Мы будем придерживаться обозначений (2.7) и напомним, что  $e$  обозначает индекс ветвления поля  $\mathcal{K}$  над  $k$ , и  $f$  — индекс (2.3). Согласно результатам [H-S] (леммы 1-3), справедливо

$$H(n) = \sum_{\substack{0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_\nu \leq fe n \\ \phi \in GL_\nu(\mathcal{O}) \setminus GL_\nu(\mathcal{O}) D(\mathbf{d}) GL_\nu(\mathcal{O})}} \sum_{Z \in Z(\mathbf{d})} \sum_{X \in X(\mathbf{d})} U \begin{pmatrix} \mu_0(\mathfrak{a})^n I_\nu (D^*(\mathbf{d}))^{-1} I_\nu & -I_\nu (S_0 X D^{-1}(\mathbf{d}))^* \mathfrak{a}^n & I_\nu (Z + Z_X) \\ 0 & \mathfrak{a}^n & X \\ 0 & 0 & D(\mathbf{d}) \end{pmatrix} \tilde{\phi}. \quad (6.1)$$

Множества, по которым ведется суммирование, определены следующим образом:

$$X(\mathbf{d}) = \{ X = (x_1, \dots, x_\nu) \in M_{n_0, \nu}(\mathcal{K}) : x_i \in L_0^{(d_i - \ell)} / L_0^{(2d_i - \ell)} \},$$

где  $L_0^{(\delta)}$  — решетка (2.1),

$$Z(\mathbf{d}) = \left\{ Z = (z_{ij}) \in M_\nu(\mathcal{K}) : \begin{array}{l} \bar{z}_{ii} \Pi^{d_i} \in T^{(d_i - \ell)} / T^{(2d_i - \ell)} \\ z_{ij} \in \mathfrak{P}^{-\ell} / \mathfrak{P}^{d_j - \ell} \text{ для } i > j \\ \bar{z}_{ji} \Pi^{d_j} + \varepsilon \bar{\Pi}^{d_i} z_{ij} = 0 \end{array} \right\},$$

при этом

$$T^{(\delta)} = \mathfrak{P}^\delta \cap \text{Ker tr}_\varepsilon$$

и  $\text{tr}_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -след из (2.2). Элемент  $Z_X$  принадлежит  $M_\nu(\mathfrak{P}^{-\ell})$  и удовлетворяет тождеству

$$Z_X^* D(\mathbf{d}) + \varepsilon D(\mathbf{d})^* Z_X + S_0[X] = 0$$

(такой элемент существует для  $X \in X(\mathbf{d})$ ), а  $\tilde{\phi} = \text{diag}(I_\nu(\phi^*)^{-1} I_\nu, E_{n_0}, \phi)$ .

Легко проверить, что  $\pi T^{(\delta)} = T^{(\delta + e)}$  и  $\mathfrak{a} L_0^{(\ell)} = L_0^{(\ell + ef)}$ . Как следствие получаем

$$\begin{aligned} \pi^{nf}(\bar{z}_{ii} \Pi^{d_i}) &\in T^{(d_i - \ell + nef)} \subset T^{(2d_i - \ell)}, & \pi^{nf} z_{ij} &\in \mathfrak{P}^{nef - \ell} \subset \mathfrak{P}^{d_j - \ell}, \\ \mathfrak{a}^n x_i &\in L_0^{(nef + d_i - \ell)} \subset L_0^{(2d_i - \ell)}, \end{aligned}$$

и мы можем привести  $X$ - и  $Z$ -части любого левого класса в произведении  $\Pi \cdot H(n)$  к нулю. Тем самым мы получаем элемент из  $\mathcal{C}(U_\nu, P_\nu)$ . Лемма доказана.

Две предыдущие леммы дают нам следующее описание кольца  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ .

**Лемма 6.3.** Кольцо  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  совпадает с централизатором элемента  $\Lambda_m$  (или  $\Pi$ , если  $m = \nu$ ) в  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ :

$$\mathcal{C}(U_m, P_m) = \{ H \in \mathcal{H}(U_m, P_m) : H\Lambda_m = \Lambda_m H \}.$$

**Доказательство.** Так как кольцо  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  коммутативно (см. лемму 2.3) и  $\Lambda_m$  содержится в нем, то  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  содержится в централизаторе. Возьмем элемент  $H$ , коммутирующий с элементом  $\Lambda_m$ . Для достаточно большого натурального  $d$

$$H\Lambda_m^d = \Lambda_m^d H = \sum_i a_i U_m[A_i, 0, 0, B_i] \in \mathcal{C}(U_m, P_m).$$

Правое умножение на  $\Lambda_m^d$  не очень сильно изменяет элемент  $H$ :

$$U_m[A, X, Z, B] \cdot \Lambda_m = U_m[A\Pi^{-1}, X\Pi^{-1}, Z\Pi^{-1}, B];$$

следовательно, мы не сможем привести к нулю  $X$ - и  $Z$ -части левых смежных классов в правой части последнего равенства, если это было невозможно для класса  $U_m[A, X, Z, B]$ . Это доказывает, что  $H \in \mathcal{C}(U_m, P_m)$ . В случае элемента  $\Pi$  доказательство аналогично.

**Лемма 6.4.** Для образующих  $\Pi_{k, \nu-k}$  выполняется следующее включение:

$$\Lambda_m \Pi_{k, \nu-k} \in \mathcal{DM}(U_m, P_m).$$

**Доказательство.** Для  $k + l = \nu - 1$  положим

$$\Pi_{k, l}(h, z + z_h) = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h^* S_l & 0 & z + z_h \\ & \bar{\Pi}^{-1} E_k & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{2l+n_0} & 0 & h \\ & & & \Pi E_k & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} U_1,$$

$$\text{где } {}^t h = ({}^t h_1, {}^t h_0, {}^t h_2), \quad h_1, h_2 \in M_{l,1}(\mathcal{K}), \quad h_0 \in L_0 \otimes \mathcal{K}, \\ z \in \text{Ker tr}_\epsilon, \quad \text{tr}_\epsilon(z_h) = -S_l[h],$$

и в случае ортогональной группы с  $n_0 = 0$  мы должны учесть те же самые дополнения, что и в определении образующих кольца Гекке (см. (3.2), (3.3)).

Как и в лемме 3.3 мы можем доказать, что образующие  $\Pi_{k, \nu-k}$  следующим образом раскладываются в параболическом расширении  $\mathcal{H}(U_1, P_1)$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{k, \nu-k} &= \Pi_{k-1, \nu-k}^- + \Pi_{k, \nu-k-1}^+ + \Pi_{k, \nu-k}(0, 0) \\ &+ \sum_{\substack{h_0 \in L_0^{(-l-1)}/L_0^{(-l)} \\ z \in T^{(-l-1)}/T^{(-l)} \\ (h_0, z) \neq (0, 0)}} \Pi_{k-1, \nu-k}(h_0, z + z_{h_0}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{h \in \Pi^{-l-1} L_{\nu-k+1} / \Pi^{-l} L_{\nu-k+1} \\ S_{\nu-k+1}[h] \in \text{tr}_\epsilon(\mathfrak{P}^{-l-1}) \\ z \in T^{(-l-1)}/T^{(-l)} \\ h = (h_1, h_0, h_2) \neq (0, h_0, 0)}} \Pi_{k-2, \nu-k+1}(h, z + z_h), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где решетка  $T^{(6)}$  определена в (6.1), „ $\pm$ “ — стандартное вложение из леммы 2.4, а суммирование в (6.2) и (6.3) ведется только по различным двойным классам.

Элементы  $\Lambda_1 \Pi_{k-1, l}^-$ ,  $\Lambda_1 \Pi_{k-1, l}^+$  и  $\Lambda_1 \Pi_{k, l-1}(0, 0)$  принадлежат  $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$ , так как это —  $\mathcal{C}(U_1, P_1)$ -модуль. На самом деле первый и третий элементы принадлежат кольцу  $\mathcal{C}(U_1, P_1)$ . Для элементов (6.2) и (6.3) выполняется следующее более сильное включение:

$$I = \Lambda_1 \cdot \Pi_{k, l}(h, z + z_h) \in \mathcal{C}(U_1, P_1) \subset \mathcal{DM}(U_1, P_1).$$

Используя определение группы  $U_1$ , мы получаем, что элемент  $I$  равен сумме левых смежных классов типа

$$C = U_1 \left( \begin{array}{cccc|c} \bar{\Pi} & * & * & * & \bar{\Pi}(z' + z'_h) \\ 0 & \bar{\Pi}^{-1} E_k & 0 & 0 & x \\ & & E_{2l+n_0} & 0 & h' \\ & & & \Pi E_k & 0 \\ 0 & & & & \Pi^{-1} \end{array} \right) \text{diag}(1, \psi, 1),$$

где

$$x \in (\mathfrak{P}^{-\ell} / \mathfrak{P}^{1-\ell})^k \quad \text{и} \quad \psi \in U^{(k+l)} \setminus U^{(k+l)} \text{diag}(\bar{\Pi}^{-1} E_k, E_{2l+n_0}, \Pi E_k) U^{(k+l)}.$$

В обозначениях (2.5) выполняется равенство

$$[1, -{}^t(({}^t x, 0, 0) + (0, {}^t h', 0))\Pi, \bar{\Pi} z_h \Pi, E] \cdot C = [\Pi^{-1}, 0, \bar{\Pi}(z + z_h - \varepsilon z'_h), D_{k, l}].$$

Так как в (6.2) и (6.3)  $z, z_h \in \mathfrak{P}^{-\ell-1}$ , то можно привести к нулю  $z$ -часть последнего элемента. Это доказывает утверждение леммы для  $m = 1$ .

Используя это вычисление последовательно для различных размерностей, мы можем доказать лемму для  $m = 2, 3, \dots$ .

Предыдущие три леммы справедливы для любой параболической подгруппы  $P_m$  с  $1 \leq m \leq \nu$ . Для следующих трех значений  $m = 1, 2$  от  $\nu$  элементы  $\Lambda_m$  и  $\Pi$  имеют следующее важное свойство: эти элементы являются в некотором смысле алгебраическими элементами некоммутативного расширения  $\mathcal{H}(U_m, P_m) \supset \mathcal{H}(U, G)$ . Точнее, для этих значений  $m$  элементы  $\Lambda_m$  и  $\Pi$  — левые корни многочленов над кольцом  $\mathcal{H}(U, G)$ .

Мы определим три многочлена от  $t$  над кольцом  $\mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}]$  степени  $2\nu, 2\nu(\nu - 1)$  и  $2^\nu$ :

$$q_\nu^{(1)}[t] = \prod_{i=0}^{\nu} (1 - p^{-A} x_i^{-1} t)(1 - p^A x_i t),$$

$$q_\nu^{(2)}[t] = \prod_{1 \leq i < j \leq \nu} (1 - p^{-2A} x_i^{-1} x_j^{-1} t)(1 - x_i^{-1} x_j t)(1 - x_i x_j^{-1} t)(1 - p^{2A} x_i x_j t),$$

$$q_\nu^{(\nu)}[t] = (1 - x_0 t) \prod_{k=1}^{\nu} \prod_{i_1 \leq \dots \leq i_k} (1 - (p^{kA} x_{i_1} \dots x_{i_k})^{\varepsilon} x_0 t),$$

где константы  $A, f$  определены в (2.8) и (2.3),  $e$  — индекс ветвления  $\mathcal{K}$  над  $k$ . Коэффициенты многочленов принадлежат кольцу  $\mathbb{Q}^{W_\nu}[x_0^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}]$ , следовательно, существуют три многочлена  $Q_\nu^{(1)}[t]$ ,  $Q_\nu^{(2)}[t]$  и  $Q_\nu^{(\nu)}[t]$  над  $\mathcal{H}(U, G)$ ,  $\Phi_\nu$ -образы которых равны соответственно  $q_\nu^{(1)}[t]$ ,  $q_\nu^{(2)}[t]$  и  $q_\nu^{(\nu)}[t]$ , точнее,

$$Q_\nu^{(m)}[t] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i Q_{i,\nu}^{(m)} t^i \quad \text{и} \quad q_\nu^{(m)}[t] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \Phi_\nu(Q_{i,\nu}^{(m)}) t^i.$$

Многочлен  $Q_\nu^{(1)}[t]$  соответствует стандартному представлению двойственной (в смысле Ленглендса) группы  $G^L$ ,  $Q_\nu^{(2)}[t]$  отвечает кососимметрическому квадрату  $\wedge^2$  стандартного представления, а  $Q_\nu^{(\nu)}[t]$  — спинорному представлению.

**Теорема 6.** *Элементы  $\Lambda_1, \Lambda_2$  и  $\Pi$ , с точностью до некоторых простых множителей, являются левыми корнями многочленов  $Q_\nu^{(1)}[t]$ ,  $Q_\nu^{(2)}[t]$  и  $Q_\nu^{(\nu)}[t]$ . Точнее говоря, справедливы равенства*

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \Lambda_1^i (\mathfrak{p}^{-A} \mathfrak{q}^{-\nu})^i Q_{i,\nu}^{(1)} = 0, \quad (6.4)$$

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j \Lambda_2^j (\mathfrak{p}^{-2A} \mathfrak{q}^{-2\nu+1})^j Q_{j,\nu}^{(2)} = 0, \quad (6.5)$$

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \Pi^k (\mathfrak{p}^{-e f \nu A} \mathfrak{q}^{-e f \nu(\nu+1)/2} \Delta^{-f})^k Q_{k,\nu}^{(\nu)} = 0, \quad (6.6)$$

где  $\Delta$  — элемент, определенный в (2.12), — является обратимым элементом кольца Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$ .

**Доказательство.** Из определения сферического отображения (см. §2) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(\Lambda_1) &= \mathfrak{q}^\nu x_\nu^{-1}, & \Phi_\nu(\Lambda_2) &= \mathfrak{q}^{2\nu-1} x_{\nu-1}^{-1} x_\nu^{-1}, & \Phi_\nu(\Pi) &= x_0, \\ \Phi(\Delta) &= \mathfrak{q}^{-e\nu(\nu+1)/2} x_0^{2/f} (x_1 \dots x_\nu)^e. \end{aligned}$$

Сферический  $\Phi$ -образ левой части (6.4) (соответственно (6.5)–(6.6)) равен нулю. Следовательно, достаточно доказать, что левая часть принадлежит модулю  $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$ , так как ограничение отображения  $\Phi$  на этот модуль — инъективно (см. лемму 2.2).

В лемме 3.1 были получены формулы для коэффициентов многочлена  $Q_\nu^{(1)}[t]$  в виде линейных функций образующих  $\Pi_{k,l}$  кольца Гекке. Согласно лемме 6.4, все слагаемые в (6.4) принадлежат модулю  $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$ , следовательно, (6.4) доказано.

Компоненты коэффициента  $Q_\nu^{(\nu)}$  являются слагаемыми элемента  $H(n)$  (см. (6.1)). В частности, все члены, входящие в сумму (6.6), принадлежат кольцу  $\mathcal{C}(U_\nu, P_\nu)$  в силу леммы 6.3, что доказывает тождество (6.6).

Для завершения доказательства теоремы нам потребуется следующий результат о представлении коэффициентов многочлена  $q_\nu^{(2)}(t)$ .

**Лемма 6.5.** *Запишем коэффициенты  $q_{l,\nu}^{(2)}$  многочлена  $q_\nu^{(2)}(t)$  как многочлен от коэффициентов  $q_{j,\nu}^{(1)}$  ( $W$ -симметрические функции) стандартного многочлена  $q_\nu^{(1)}[t]$*

$$q_{l,\nu}^{(2)} = F(q_{1,\nu}^{(1)}, \dots, q_{\nu,\nu}^{(1)}) = \sum_i b_l \prod_{j=1}^{\nu} (q_{j,\nu}^{(1)})^{a_{ij}}.$$

Тогда выполняется следующая оценка степени компонент этого представления

$$a_{i1} + 2(a_{i2} + \dots + a_{i\nu}) \leq l + 1.$$

**Доказательство.** Утверждение леммы имеет чисто комбинаторную природу. Если мы перепишем многочлен  $F(q_{1,\nu}^{(1)}, \dots, q_{\nu,\nu}^{(1)})$  как многочлен по переменным  $x_1, \dots, x_\nu$ , то сумма степеней переменных  $x_1$  и  $x_2$  (или любых двух других переменных), входящих в любой моном, меньше или равна  $l + 1$ . Это дает оценку леммы.

Коэффициенты стандартного многочлена Гекке  $Q^{(1)}(t)$  равны линейной форме от образующих  $\Pi_{k,m}$  (см. лемму 3.1 для ортогональной и теорему 2 работы [G1] для произвольной классической группы). В силу леммы 6.1 и леммы 6.4 произведение  $\Lambda_2^2 \Pi_{k,m}$  принадлежит коммутативному кольцу  $\mathcal{C}(U_2, P_2)$ , а произведение  $\Lambda_2 \Pi_{k,m} - \mathcal{C}(U_2, P_2)$ -модулю  $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ . Применяя аналог леммы 4.1 для произвольной классической группы, легко доказать, что для первого элемента  $\Pi_{1,\nu-1}$  выполняется более строгое включение

$$\Lambda_2 \Pi_{1,\nu-1} \in \mathcal{C}(U_2, P_2).$$

В случае коэффициентов многочлена  $Q^{(2)}(t)$  это дает нам следующие включения:

$$\Lambda_2 Q_{1,\nu}^{(1)} \in \mathcal{C}(U_2, P_2), \quad \Lambda_2^2 Q_{i,\nu}^{(1)} \in \mathcal{C}(U_2, P_2), \quad \Lambda_2 Q_{i,\nu}^{(1)} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Вместе с утверждением леммы 6.5 это доказывает включение

$$\Lambda_2^l \cdot Q_{l,\nu}^{(2)} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Теорема 6 полностью доказана.

Применяя теорему 6, мы можем получить следующий общий результат о разложении многочленов Гекке над кольцами Гекке, обобщающий теорему Андрианова о разложении многочленов Гекке в случае симплектической группы  $Sp_\nu$  и ее параболической подгруппы  $P_\nu$  (см. §3 [A1]). Ниже мы следуем методу из [A1].

**Теорема 7.** *Предположим, что  $m$  принимает одно из трех значений 1, 2, или  $\nu$ . Пусть дан многочлен  $P(t) = \sum_{i=0}^N P_i t^i$  над кольцом Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$  классической*

группы  $G$  ранга  $\nu$ . Предположим, что многочлен  $\Phi_\nu(P(t)) = \sum_{i=0}^N \Phi_\nu(P_i) t^i$  раскладывается в произведение двух многочленов  $f(t)$  и  $g(t)$

$$\Phi_\nu(P(t)) = \left( \sum_{i=0}^{N_1} f_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^{N_2} g_i t^i \right)$$

и что все коэффициенты  $f_i$  лежат в образе  $\Phi_\nu(\mathcal{C}(U_m, P_m))$ :

$$f_i = \Phi_\nu(F_i), \quad F_i \in \mathcal{C}(U_m, P_m) \quad \text{и} \quad f_0 = 1.$$

Тогда все коэффициенты  $g_j$  принадлежат образу  $\Phi_\nu(\mathcal{A}(U_m, P_m))$  модуля

$$\mathcal{A}(U_m, P_m) = \mathcal{C}(U_m, P_m) \cdot \mathcal{H}(U, G) \subset \mathcal{H}(U_m, P_m).$$

(Напомним, что мы отождествляем кольцо Гекке  $\mathcal{H}(U, G)$  максимально компактной группы  $U$  с его вложением в кольцо  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ ). Более того, для произвольных  $G_i$  в  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$  таких, что  $\Phi_\nu(G_i) = g_i$ , выполняется следующее разложение многочлена  $P(t)$ :

$$P(t) = \left( \sum_{i=0}^{N_1} F_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^{N_2} G_i t^i \right).$$

Разложения многочленов Гекке, построенные в §3–4, — это частные случаи разложений теоремы 7. Это следует из того, что коэффициенты многочленов

$$(1 - p^{-A-\nu} \Lambda_1) \quad \text{и} \quad Q_-^{GL_2}(t) = 1 - T_-(\pi)t + p\Lambda_2 t^2$$

в теоремах 1 и 3 принадлежат кольцу  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ .

Прежде чем доказывать теорему 7, мы сформулируем важное свойство определенного в этой теореме модуля  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ .

**Лемма 6.6.** *Ограничение сферического гомоморфизма  $\Phi$  на модуль  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$  инъективно. Более того, кольцо Гекке параболической подгруппы  $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ , рассматриваемое как векторное пространство, совпадает с прямой суммой двух подпространств:*

$$\mathcal{H}(U_m, P_m) = \mathcal{A}(U_m, P_m) \oplus \text{Ker } \Phi.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\tilde{\Lambda}$  элемент  $\Lambda_1, \Lambda_2$  или  $\Pi$  и через  $\tilde{Q}_{\nu,i}^{(m)}$  для  $m = 1, 2, \nu$  коэффициенты  $Q_{\nu,i}^{(m)}$  с дополнительными числовыми множителями, как в тождествах (6.4)–(6.6). Мы можем переписать эти тождества в виде

$$\tilde{\Lambda}^a = \sum_i (-1)^{i+1} \tilde{\Lambda}^{i+a} \tilde{Q}_{\nu,i}^{(m)} \quad (6.7)$$

для произвольного  $a \in \mathbb{Z}$ . Это соотношение может быть использовано для построения рекурсивной последовательности „отрицательных степеней“ элемента

$\tilde{\Lambda}$ : если  $\tilde{\Lambda}^{-b}$  уже определен, то  $\tilde{\Lambda}^{-b-1}$  определяется соотношением (6.7). Элементы  $\tilde{\Lambda}^{-b}$  обладают хорошими свойствами. Например, используя коммутативность колец  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  и  $\mathcal{H}(U, G)$ , можно доказать индукцией по  $-b$ , что для любых  $H \in \mathcal{H}(U, G)$  и  $a \geq 0$  со свойством  $\tilde{\Lambda}^a H \in \mathcal{C}(U_m, P_m)$ , выполняется равенство

$$\tilde{\Lambda}^a H \tilde{\Lambda}^{-b} = \tilde{\Lambda}^{a-b} H.$$

В частности,  $\tilde{\Lambda}^a \tilde{\Lambda}^{-b} = \tilde{\Lambda}^{a-b}$ . Опять используя коммутативность колец и указанные выше равенства, мы получаем, что для любого  $A \in \mathcal{A}(U_m, P_m)$   $\tilde{\Lambda}^a A \tilde{\Lambda}^{-a} = A$  для достаточно больших  $a$ . Это дает новое описание модуля  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(U_m, P_m) = \{A \in \mathcal{H}(U_m, P_m) : \tilde{\Lambda}^a A \tilde{\Lambda}^{-a} = A \text{ для достаточно больших } a\},$$

так как по определению (6.7)  $\tilde{\Lambda}^{-a} \in \mathcal{A}(U_m, P_m)$ .

Ограничение сферического отображения  $\Phi$  на кольцо  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  инъективно (см. лемму 2.2),  $\tilde{\Lambda}^a \tilde{\Lambda}^{-a} = 1$  для любого  $a$  и  $\Phi(\tilde{\Lambda}^{-a}) = \Phi(\tilde{\Lambda})^{-a} \neq 0$ , поэтому  $\Phi(A) \neq 0$ . Это доказывает первое утверждение леммы. Для доказательства второго достаточно отметить, что в представлении  $X = \tilde{\Lambda}^a X \tilde{\Lambda}^{-a} + (X - \tilde{\Lambda}^a X \tilde{\Lambda}^{-a})$  согласно леммам 6.1 и 6.2 первое слагаемое принадлежит  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ , а второе слагаемое принадлежит  $\text{Ker } \Phi$  для достаточно больших  $a$ . Лемма доказана.

Отметим, что три модуля  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ ,  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$  и  $\text{Ker } \Phi$  могут быть определены только в терминах элемента  $\tilde{\Lambda}$ . Для  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$  это сделано в лемме 6.3, для  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$  это сделано в доказательстве леммы 6.5, а для третьего модуля можно легко доказать, что

$$\text{Ker } \Phi = \{X \in \mathcal{H}(U_m, P_m) : \tilde{\Lambda}^a X = 0 \text{ для достаточно больших } a\}.$$

**Доказательство теоремы 7.** Предположим, что все  $F_i$  принадлежат коммутативной области целостности  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ . Так как  $\Phi$  инъективно на  $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ , то  $F_0 = 1$ . Обозначим через  $A_k$  коэффициенты формального степенного ряда  $F(t)^{-1}$ . Тогда справедливо

$$g(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_\nu(A_k) t^k \right) \left( \sum_{i=0}^N \Phi_\nu(P_i) t^i \right) = \left( \sum_{j=0}^{N_2} \Phi_\nu \left( \sum_{k+i=j} A_k P_i \right) t^j \right),$$

что доказывает первое утверждение теоремы. Так как  $\Phi$  инъективно на  $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ , то для любых  $G_j \in \mathcal{A}(U_m, P_m)$  таких, что  $g_j = \Phi_\nu G_j$ , выполняется

$$\sum_{i+j=k} F_i G_j \in \mathcal{A}(U_m, P_m) \quad \text{и} \quad P_k = \sum_{i+j=k} F_i G_j.$$

Теорема доказана.

## Список литературы

- [A1] Andrianov A. N., *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren der math. Wissenschaften, 286, Springer, Berlin etc., 1987.
- [A2] Andrianov A. N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2*, Russian Math. Survey **29** (1974), 45–116.
- [Br] Bruhat F., *Sur les representations des groupes classiques  $\varphi$ -adiques*, Amer. J. Math. **83** (1961), 321–338, 343–368.
- [E] Eichler M., *Quadratische Formen und Orthogonal Gruppen*, Grundlehren der math. Wissenschaften, 63, Springer, Berlin, etc., 1952.
- [E-Z] Eichler M., Zagier D., *The theory of Jacobi forms*, Progress in Math., 55, Birkhauser, Boston, etc., 1985.
- [F] Freitag E., *Siegelsche Modulformen*, Grundlehren der math. Wissensch., 254, Springer Verlag, Berlin, etc., 1983.
- [G1] Гриценко В. А., *Разложения многочленов Гекке классических групп*, Мат. сб. **137** (1988), 328–351; English transl. in Math. USSR Sbornik **65** (1990), **65** (1990), 333–356.
- [G2] Гриценко В. А., *Параболическое расширение кольца Гекке полной линейной группы*, 1, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **154** (1986), 35–46; English transl. in J. Soviet Math. **43** (1988), 2533–2539.
- [G3] Гриценко В. А., *Параболическое расширение кольца Гекке полной линейной группы*, 2, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **183** (1990), 56–77.
- [G4] Гриценко В. А., *Функции Якоби и Эйлеровы произведения для Эрмитовых модулярных форм*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **183** (1990), 77–123.
- [G5] Гриценко В. А., *Функции Якоби  $n$ -переменных*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **168** (1988), 32–45; English transl. in J. Soviet Math. **53** (1991), 243–252.
- [G6] Gritsenko V. A., *Dirichlet series with Euler product in the theory of modular forms with respect to the orthogonal groups*, Publication LOMI E-11-87, Nauka, Leningrad, 1987.
- [G7] Гриценко В. А., *Дзета-функция степени шесть для Эрмитовых модулярных форм рода два*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **154** (1986), 46–66; English transl. in J. Soviet Math. **43** (1988), 2540–2553.
- [G8] Гриценко В. А., *Действие модулярных операторов на коэффициентах Фурье-Якоби модулярных форм*, Мат. сб. **119** (1982), 248–277; English transl. in Math. USSR Sbornik **47** (1984), 237–268.
- [G9] Гриценко В. А., *Пространство Маасса для  $SU(2, 2)$ . Кольца Гекке и дзета-функции*, Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова **183** (1990), 68–77; English transl. in Proc. Steklov Inst. of Math. **183** (1991), 75–86.
- [G10] Gritsenko V. A., *Induction in the theory of zeta-functions*, Preprint 91-097, University Bielefeld, 1991.
- [G11] Gritsenko V. A., *Modular forms and moduli spaces of abelian and  $K3$  surfaces*, Preprint, University Göttingen, 1993.
- [G12] Gritsenko V. A., *Andrianov (Spin)  $L$ -function and Rankin-Selberg convolution*, Preprint, University Heidelberg, 1993.
- [H-S] Hina T., Sugano T., *On the local Hecke series of some classical groups over  $\varphi$ -adic fields*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), 133–152.
- [K-S] Kohlen W., Skoruppa N.-P., *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*, Invent. Math. **95** (1989), 449–476.
- [L] Langlands R. L., *Euler products*, Yale Univ. Press, 1971.
- [M] Murase A.,  *$L$ -functions attached to jacobi forms of degree  $n$ . Part 1. The basic identity*, J. reine angew. Mathem. **401** (1989), 122–156.
- [O] Oda T., *On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature  $(2, n-2)$* , Math. Ann. **231** (1977), 97–144.
- [P-S-R] Piatetski-Shapiro I., Rallis S.,  *$L$ -functions for the classical groups*, Explicit construction of automorphic  $L$ -function, Lecture Notes Math. 1254, Springer Verlag, Berlin, etc., 1987.

- [S] Satake I., *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic fields*, IHES Publ. Math. **18** (1963), 229–293.
- [Sh1] Shimura G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.
- [Sh2] Shimura G., *On modular correspondence for  $Sp(n, \mathbb{Z})$  and their congruence relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **49** (1963), 824–828.
- [Sh3] Shimura G., *Arithmetic of unitary groups*, Ann. of Math. **79** (1964), 369–409.
- [Sh4] Shimura G., *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. London Math. Society **31** (1975), 79–98.
- [Su] Sugano T., *On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on  $SO(2, g)$* , Automorphic Forms and Number Theory, Advanced Studied in Pure Math. 7, Springer Verlag, Berlin, etc., 1985, pp. 333–362.

С.-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН  
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 18 января 1993 г.