Ю. Я. Белов, Об одной линейной стационарной задаче динамики океана, *Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 1, 45–52

https://www.mathnet.ru/mzm6838

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

Ю. Я. Белов

В монографии [1] рассмотрен ряд математических моделей динамики океана. В предположении существования гладких решений для некоторых из них доказана единственность решения, даны алгоритмы численного решения. В данной заметке рассматривается одна из моделей — линейная модель динамики океана, учитывающая ветровые течения. Однозначная разрешимость исследуемой задачи доказывается методом эллиптической регуляризации.

Обозначим через Q исследуемую область Мирового океана: $Q = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega \subset E_2, \ H < z < 0\}$, где Ω — область с кусочно гладкой границей σ, $z = 0$ — поверхность океана, $z = H$ — рельеф дна океана. Пусть U — пространство, полученное замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества функций из $C^1(\bar{Q})$, равных нулю вблизи $\hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}$ — граница области Q без точек $z = 0$; V — пространство, полученное замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества функций из $C^1(\bar{Q})$, равных нулю вблизи поверхности $z = H$.

Для произвольной функции u из пространств U, V выполняется неравенство

$$\| u \|_{L_2(Q)} \leqslant d \| u_x \|_{L_2(Q)}, \qquad 0 < d = \text{const}, \tag{1}$$

где

$$u_x = ((\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2)^{1/2}.$$

Учитывая вид области Q, неравенство (1) можно доказать аналогично неравенству Пуанкаре — Фридрихса для $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ [1]).

1. Постановка задачи.

З а д а ч а. Найти решение (u, v, w, p, ρ) системы уравнений (см. [1])

$$
\begin{gathered}
\mu\Delta u + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lv = \frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
\mu\Delta v + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - lu = \frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
\mu_1\Delta\rho + \nu_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \Gamma w,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
&\partial u/\partial z = \tau_1/(\bar\rho\nu), \quad \partial v/\partial z = \tau_2/(\bar\rho\nu), \\
&\nu_1\,\partial\rho/\partial z = \gamma, \quad w = 0 \quad \text{при } z = 0, \\
&u = v = w = 0, \ \rho = \rho_0 \ \text{при } z = H, \\
&u = v = \partial\rho/\partial n = 0 \qquad \text{на } \sigma.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В формулах (2), (3) использованы следующие обозначения: $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, u, v, w— компоненты вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, τ_k $(k = 1, 2)$, γ, ρ_0— заданные функции переменных x, y; ν, μ — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентности, ν_1, μ_1— коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентной диффузии плотности соответственно ($0 < \nu, \nu_1, \mu, \mu_1$— константы), $\bar\rho$ — средняя по толще океана плотность воды, Γ — средний градиент плотности в океане, l — параметр Кориолиса, g — ускорение силы тяжести.

Для удобства введем следующие обозначения: $u = u_1$, $v = u_2$, $x = x_1$, $y = x_2$.

Предположим глубину рассматриваемого бассейна постоянной, $H = \text{const}$, $H < 0$. Предположим также, что функции τ_k принадлежат пространству $C^2(\bar\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

[1]) По поводу обозначений см., например, [2], [3].

и существует функция $\hat{\rho}$ из класса $C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющая условиям (3), т. е. $\nu_1 \partial\hat{\rho}/\partial z = \gamma$ при $z = 0$, $\hat{\rho} = \rho_0$ при $z = H$ и $\partial\hat{\rho}/\partial n = 0$ на σ.

В указанных предположениях существуют функции $\hat{u}_k \in C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющие условиям (3) на u_k и условию

$$\int_H^0 \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}\right) dz = 0.$$

Для этого достаточно, например, взять $\hat{u}_k = [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)]\ \tau_k / (\nu\bar{\rho})$, где функция $\varphi_1(z) \in C^2$, равна нулю вблизи H и $\varphi_1'(0) = 1$, функция $\varphi_2(z)$ финитна в $(H, 0)$ и

$$\int_H^0 (\varphi_1 - \varphi_2)\, dz = 0.$$

Вследствие третьего уравнения системы (2) имеем

$$p = g\int_0^z \rho\, dz + \bar{\rho}\xi, \tag{4}$$

где

$$\xi = \xi(x_1, x_2) = \frac{1}{\bar{\rho}}\, p\,\Big|_{z=0}$$

— неизвестная функция. Из четвертого уравнения системы (2), учитывая условие $w|_{z=0} = 0$, получим

$$w = -\int_0^z \mathrm{div}_x u\, dz. \tag{5}$$

Здесь

$$\mathrm{div}_x u = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2.$$

Подставив (4), (5) в соответствующие уравнения системы (2) и сделав замену

$$u_k' = u_k - \hat{u}_k, \quad \rho' = \rho - \hat{\rho}, \tag{6}$$

сведем задачу (2), (3) к задаче

$$\mu\Delta u_k + \nu\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} l u_{3-k} =$$
$$= \frac{g}{\bar{\rho}}\int_0^z \frac{\partial\rho}{\partial x_k}\, dz + \frac{\partial\xi}{\partial x_k} + f_k, \qquad k = 1, 2, \tag{7}$$

$$\int_H^0 \mathrm{div}_x u\, dz = 0, \tag{8}$$

$$\mu_1\Delta\rho + \nu_1\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} + \Gamma\int_0^z \operatorname{div}_x u\, dz = f_3, \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \partial u_k/\partial z = \partial\rho/\partial z = 0 & \text{при} & z = 0, \\ u_k = \rho = 0 & \text{при} & z = H, \\ u_k = \partial\rho/\partial n = 0 & \text{на} & \sigma. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Здесь

$$f_k = -\mu\Delta\hat{u}_k - \nu\frac{\partial^2\hat{u}_k}{\partial z^2} + (-1)^k l\hat{u}_{3-k} + \frac{g}{\bar{\rho}}\int_0^z \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial x_k}\, dz,$$

$$f_3 = -\mu_1\Delta\hat{\rho} - \nu_1\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial z^2} - \Gamma\int_0^z \operatorname{div}_x \hat{u}\, dz$$

и для удобства обозначения опущен штрих у неизвестных u_k, ρ.

Пусть $\mathfrak{N}$ — линейное подпространство пространства $(U')^2$, состоящее из элементов L, удовлетворяющих условию: $\langle\langle L, \varphi\rangle\rangle = 0$ для всех $\varphi \in U^2$ таких, что

$$\int_H^0 \operatorname{div}_x \varphi\, dz = 0$$

($\langle\langle L, \varphi\rangle\rangle$ — значение $L \in (U')^2$ на $\varphi \in U^2$);
$\mathfrak{M} \overset{\text{def}}{\equiv} \{(u, \rho, L) \mid u \in (W_2^1(Q))^2,\ \ \rho \in W_2^1(Q),\ L \in (U')^2\}$, и пусть $\mathfrak{M}^0$ — подпространство пространства $\mathfrak{M}$, определенное следующим образом:

$$\mathfrak{M}^0 \overset{\text{def}}{\equiv} \{(u, \rho, L) \mid u \in U^2, \rho \in V, L \in \mathfrak{N}\}.$$

Введем билинейные формы

$$a(u, \varphi) = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{(L_2(Q))^2} + \mu\sum_{k=1}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)_{(L_2(Q))^2} + l\sum_{k=1}^2 (-1)^k(u_{3-k}, \varphi_k)_{L_2(Q)},$$

$$b(\rho, \chi) = \nu_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}, \frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_{L_2(Q)} + \mu_1\sum_{k=1}^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_k}, \frac{\partial\chi}{\partial x_k}\right)_{L_2(Q)},$$

определенные на $(W_2^1(Q))^2$ и $W_2^1(Q)$ соответственно [1]).

[1]) $(\rho, \chi)_{L_2(Q)} = \int_H^0\left\{\int_\Omega \rho\chi\, dx_1 dx_2\right\} dz.$

Определение. Решением задачи (7) — (10) в классе $\mathfrak{M}$ назовем такой элемент (u, ρ, L) из $\mathfrak{M}^0$, что

$$\int_H^0 \operatorname{div}_x u \, dz = 0 \tag{11}$$

и тождества

$$a(u, \varphi) = \frac{g}{\bar\rho}\left(\int_0^z \rho \, dz, \operatorname{div}_x \varphi\right)_{L_2(Q)} - \langle\langle L, \varphi\rangle\rangle - (f, \varphi)_{(L_2(Q))^2}, \tag{12}$$

$$b(\rho, \chi) - \Gamma\left(\int_0^z \operatorname{div}_x u \, dz, \chi\right)_{L_2(Q)} + (f_3, \chi)_{L_2(Q)} = 0 \tag{13}$$

выполняются для всех $\varphi \in U^2$, $\chi \in V$. Здесь $f = (f_1, f_2)$.

Замечание 1. Из принадлежности L подпространству $\mathfrak{N}$ следует, что, отождествив L с распределением из $(D'(Q))^2$, можно записать

$$L = \operatorname{grad}_x \xi \quad \text{и} \quad \partial\xi/\partial z = 0, \tag{14}$$

где $\xi \in D'(Q)$, $\operatorname{grad}_x \xi = (\partial\xi/\partial x, \partial\xi/\partial x_2)$. Действительно, так как

$$\hat{L} = (L_1, L_2, 0) \tag{15}$$

принадлежит $(W^{-1}(Q))^3$ (вследствие вложения U' в $W^{-1}(Q)$) и обращается в нуль на множестве всех соленоидальных и финитных в Q векторов $\hat\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, то (см. [4])

$$\hat{L} = (\partial\xi/\partial x_1, \partial\xi/\partial x_2, \partial\xi/\partial z), \qquad \xi \in D'(Q). \tag{16}$$

Из (15), (16) следует (14).

Замечание 2. Учитывая замечание 1, данное выше определение можно заменить ему эквивалентным. Именно, можно считать, что u, ρ, ξ принадлежат U^2, V, $D'(Q)$ соответственно и удовлетворяют системе (7) — (9), в смысле теории распределений (см., например, [3], [4]), причем элемент $(\partial\xi/\partial x_1, \partial\xi/\partial x_2)$ принадлежит $\mathfrak{N}$.

Замечание 3. Так как $w|_{z=0} = 0$, $w|_{z=H} = 0$, то (см. замену (5)) последнее условие учитывается в задаче (7) — (10) в виде соотношения (8).

2. Теоремы существования и единственности. Аппроксимируем задачу (7) — (10) задачей

$$\mu\Delta v_k^\varepsilon + \nu\frac{\partial^2 v_k^\varepsilon}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} l v_{3-k}^\varepsilon = \frac{g}{\bar\rho}\int_0^z \frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial x_k} dz + \frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_k} + f_k, \tag{17}$$

$$\int_0^H \operatorname{div}_x v^\varepsilon \, dz + \varepsilon \Delta \xi^\varepsilon = 0, \tag{18}$$

$$\mu_1 \Delta \rho^\varepsilon + \nu_1 \frac{\partial^2 \rho^\varepsilon}{\partial z^2} + \Gamma \int_0^z \operatorname{div}_x v^\varepsilon \, dz = f_3 - \Gamma \int_H^0 \operatorname{div}_x v^\varepsilon \, dz, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial v_k^\varepsilon/\partial z = \partial \rho^\varepsilon/\partial z = 0 \quad &\text{при} \quad z = 0, \\ v_k^\varepsilon = \rho^\varepsilon = 0 \quad &\text{при} \quad z = H, \\ v_k^\varepsilon = \partial \rho^\varepsilon/\partial n = 0 \quad &\text{на} \quad \sigma, \\ \xi^\varepsilon = 0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Определение. Решением задачи (17) — (20) назовем такой вектор $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$, что $v^\varepsilon \in U^2$, $\rho^\varepsilon \in V$, $\xi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и тождества

$$a(v^\varepsilon, \varphi) = \frac{g}{\bar\rho} \left(\int_0^z \rho^\varepsilon \, dz, \operatorname{div}_x \varphi \right)_{L_2(Q)} - \\ - (\operatorname{grad}_x \xi^\varepsilon, \varphi)_{(L_2(Q))^2} - (f, \varphi)_{(L_2(Q))^2}, \tag{21}$$

$$\left(\int_0^H \operatorname{div}_x v^\varepsilon \, dz, \psi \right)_{L_2(\Omega)} - \varepsilon \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{22}$$

$$b(\rho^\varepsilon, \chi) - \Gamma \left(\int_0^z \operatorname{div}_x v^\varepsilon \, dz + \int_H^0 \operatorname{div}_x v^\varepsilon \, dz, \chi \right)_{L_2(Q)} + \\ + (f_3, \chi)_{L_2(Q)} = 0 \tag{23}$$

выполняются для всех $\varphi \in U^2$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\chi \in V$.

Решение $(u^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$ задачи (17) — (20) удовлетворяет неравенству

$$\| v^\varepsilon \|_{U^2} + \| \rho^\varepsilon \|_V + \sqrt{\varepsilon} \, \| \xi^\varepsilon \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant c \left(\| f \|^2_{(L_2(Q))^2} + \| f_3 \|^2_{L_2(Q)} \right)^{1/2}, \tag{24}$$

где постоянная c зависит лишь от α, d, g, $\bar\rho$, Γ и не зависит от ε.

Неравенство (24) нетрудно получить, если положить $\varphi = v^\varepsilon$, $\psi = \xi^\varepsilon$, $\chi = g\rho^\varepsilon/\rho\Gamma$ в формулах (21), (22), (23) соответственно, а затем сложить полученные результаты, учитывая при этом неравенство (1) и интегрируя по частям члены

$$\left(\int_0^z \operatorname{grad}_x \rho^\varepsilon \, dz, v^\varepsilon \right)_{(L_2(Q))^2} \text{ и } (\operatorname{grad}_x \xi^\varepsilon, v^\varepsilon)_{(L_2(Q))^2}.$$

Вследствие неравенства (24) легко доказывается, например, методом Галеркина следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Решение* $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$ *задачи* (17) — (20) *существует и единственно.*

Из неравенства (24) вытекает существование подпоследовательности ε_k ($\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$) такой, что

$$v^{\varepsilon_k} \to u \quad \text{слабо в } U^2, \tag{25}$$

$$\rho^{\varepsilon_k} \to \rho \ \text{слабо в } V. \tag{26}$$

Из условий (21), (25), (26) следует, что

$$\mathrm{grad}_x \xi^{\varepsilon_k} \to L$$

слабо в $(U')^2$. Легко видеть, что L принадлежит $\mathfrak{N}$ и u, ρ, L удовлетворяют тождеству (12). Вследствие ограниченности $\sqrt{\varepsilon}\, \| \xi^\varepsilon \|_{W_2^1(\Omega)}$ (см. (24)), переходя в (22) к пределу по ε_k, получим, что

$$\left(\int_0^H \mathrm{div}_x u\, dz, \psi\right)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Так как ψ произвольно, то выполняется соотношение (11). Отсюда ясно, что u, ρ удовлетворяют условию (13). Следовательно, (u, ρ, L) есть решение задачи (7) — (10).

Возьмем $\varphi = u$, $\chi = g\rho/(\bar{\rho}\Gamma)$ в формулах (12), (13) соответственно и сложим полученные результаты. Учитывая принадлежность L пространству $\mathfrak{N}$ (т. е. соотношение $\langle\langle L, u\rangle\rangle = 0$), получим неравенство

$$\| u \|_{U^2} + \| \rho \|_V \leqslant c\,(\| f \|^2_{(L_2(Q))^2} + \| f_3 \|^2_{L_2(Q)})^{1/2},$$

откуда следует единственность компонент u, ρ решения задачи (7) — (10), а значит, и единственность L. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи* (7) — (10) *существует и единственно в классе* $\mathfrak{M}$.

С учетом замечаний 1, 2 имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Решение* (u, ρ, ξ) *задачи* (7) — (10) *в пространстве* $(W_2^1(Q))^2 \times W_2^1(Q) \times D'(Q)$ *существует. Компоненты* u, ρ *определяются единственным образом, компонента* ξ *определяется с точностью до аддитивной постоянной.*

Красноярский государственный университет

Поступило 6.X.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Марчук Г. И., Численное решение задач динамики атмосферы и океана, Л., Гидрометеоиздат, 1974.
[2] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973.
[3] Лионс Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., «Мир», 1972.
[4] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.