Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

М. И. ГОРДИН

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО БЫСТРОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 13 VII 1970)

1. Если измеримое преобразование T вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ несингулярно (т. е. таково, что из $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ следует, что $\mu(T^{-1}(A)) = 0$), то равенство

$$\int_A V_\mu g(x)\,\mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} g(x)\,\mu(dx), \quad A \in \mathfrak{M},$$

определяет в $L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ линейный оператор V_μ.

Положим $\mathfrak{M}^n = T^{-n}(\mathfrak{M})$ $(n \geqslant 0)$, и пусть E^n — оператор условного математического ожидания (у.м.о) относительно $\mathfrak{M}^n$.

Пусть, далее, $W(f, A)$ — колебание функции f на множестве A и пусть $|f|_W = W(f, X)$. Если S — такой линейный оператор в L_∞, что $S(C) \subset C$ (C — подпространство постоянных), то через $|S|_W$ обозначается норма индуцированного S оператора $\tilde{S}$ на пространстве L_∞ / C, снабженном нормой $|\ \ |_W$.

2. Здесь предполагается, что T — эндоморфизм (т. е. сохраняющее меру преобразование) пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$. Пусть задана некоторая σ-алгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{M}$. Положим $\mathfrak{C}_k^l = \bigvee_{p=k}^{l} T^{-p}(\mathfrak{C})$ *, если $l \geqslant k \geqslant 0$, и пусть $\mathfrak{C}_k^l = \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — тривиальная σ-алгебра), если $k > l \geqslant 0$. Пусть далее $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{C}_0^{n-1}$ $(n \geqslant 0)$, а E_n — оператор у.м.о. относительно $\mathfrak{M}_n$. Символы I и E обозначают единичный оператор и оператор интегрирования по мере P. Положим при $k \geqslant 0$

$$r(k) = \sup_{n \geqslant 0} |V_P^k (I - E_k) V_P^n E_{n+k}|_W.$$

Теорема 1. *Пусть эндоморфизм T и σ-алгебра $\mathfrak{C}$ таковы, что*

$$\varlimsup_{k \to \infty} (r(k))^{1/k} < 1, \quad r(0) < 1.$$

Если для функции $f \in L_\infty$ конечна при некотором β $(\beta > 1,\ \beta^{-1} > \varlimsup_{k\to\infty} (r(k))^{1/k}$ полунорма

$$\rho_\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |V_P^k (I - E_k) f|_W,$$

то при $n \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|V_P^n f - Ef|_\infty \leqslant L l^{-\lambda n} \rho_\beta(f),$$

где $L > 0$ и $\lambda > 0$ зависят лишь от чисел $r(k)$ и β.

---

* Знаками $\bigvee$ и $\bigwedge$ обозначаются операции взятия наименьшей верхней грани и пересечения некоторого семейства σ-алгебр.

Следствие 1. (*Равномерное сильное перемешивание.*) *Если* $A \in \mathfrak{M}_n$, $B \in \mathfrak{M}^{k+n}$, *то при* $n \geqslant 0$

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant L^1 l^{-\lambda n} P(B).$$

Следствие 2. *Если* $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{M}$, *то* $\bigwedge_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$ (*т. е. T — точный эндоморфизм* ([1])).

Некоторая модификация теоремы 1 справедлива в случае, когда T — автоморфизм (т. е. обратимый эндоморфизм) пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ и заданы две последовательности σ-алгебр $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{M}^n$, причем $\mathfrak{M}_n \subset T^{-1}(\mathfrak{M}_n) = \mathfrak{M}_{n+1}$, а $\mathfrak{M}^n \supset T^{-1}(\mathfrak{M}^n) = \mathfrak{M}^{n+1}$.

3. Пусть T — измеримое преобразование вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Сформулируем условия, фигурирующие в приводимых ниже результатах.

I. Предположим, что задано разбиение X на конечное или счетное число множеств $A_i \in \mathfrak{M}$ положительной меры, находящихся во взаимно однозначном соответствии с элементами i некоторого множества I, причем T несингулярно и взаимно однозначно отображает каждое множество A_i на $T(A_i)$ и, кроме того, $T(A_i)$ измеримо, а обратное отображение f_i: $T(A_i) \to A_i$ измеримо и несингулярно.

Множество положительной меры вида $\bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(A_{i_k})$ (n фиксировано) называется квазиинтервалом ранга n, а порожденная ими σ-алгебра обозначается через $\mathfrak{M}_n$. Если положить $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_1$, то ясно, что $\mathfrak{M}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathfrak{C})$.

Пусть $i^n = (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$. Положим

$$A_{i^n} = \bigcap_{k=1}^{n-1} T^{-k}(A_{i_k}), \quad f_{i^n}(x) = f_{i_1}(f_{i_2} \ldots (f_{i_n}(x)) \ldots).$$

Обозначим через J_{i^n} производную относительно μ меры μ_{i^n}, определенной равенством $\mu_{i^n}(A) = \mu(A_{i^n} \cap T^{-n}(A))$, $A \in \mathfrak{M}$. Мы будем называть квазиинтервал A ранга n невырожденным, если $\mu(T^n(A)) = 1$, и вырожденным, если $\mu(T^n(A)) < 1$. Совокупность всех квазиинтервалов ранга n обозначим через (n), а всех невырожденных квазиинтервалов ранга n — через $(n)_0$.

II. Существует такое $q > 0$, что при всех $n \geqslant 0$

$$\sum_{(n)_0} \mu(A_{i^n}) \geqslant q.$$

Если A_{i^n} — квазиинтервал ранга n, то положим

$$\bar{J}_{i^n} = \operatorname{ess} \sup_{x \in T^n(A_{i^n})} J_{i^n}(x), \quad \underline{J}_{i^n} = \operatorname{ess} \inf_{x \in T^n(A_{i^n})} J_{i^n}(x).$$

III. Существует такая постоянная C, что для всех $i^n \in I^n$ и $n \geqslant 0$

$$\bar{J}_{i^n} \leqslant C \underline{J}_{i^n}.$$

IV. Существует такая постоянная L, что для всех $n \geqslant 0$

$$\sum_{(n)} \bar{J}_{i^n} \leqslant L.$$

Пусть A_{i^n} — квазиинтервал ранга n. Символом (k, i^n) (соответственно $(k, \bar{i}^n)$) обозначается совокупность всех квазиинтервалов A_{j^k} ранга k, для которых $\mu(A_{j^k} | T^n(A_{i^n})) = 0$ (соответственно $\mu(A_{j^k} | T^n(A_{i^n}))\mu(A_{j^k} \cap T^n(A_{i^n})) = 0$).

Положим

$$d_k = \sup_{n\geqslant 0}\sum_{(n)}\bar{J}_{i^n}\sum_{(k,\,\overline{i^n})}\bar{J}_{i^k};\quad l_k = \sup_{n\geqslant 0}\sum_{(n)}\sum_{(k,\,i^n)}\bar{J}_{i^k}W(J_{i^n}, A_{i^k});$$

$$d'_k = \sup_{n\geqslant 0}\sup_{(n)}\sum_{(k,\,\overline{i^n})}\bar{J}_{i^k};\quad l'_k = \sup_{n\geqslant 0}\sup_{(n)}\sum_{(k,\,\overline{i^n})}\bar{J}_{i^k}W(J_{i^n}, A_{i^k})(\bar{J}_{i^n})^{-1}.$$

V. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d_k)^{1/k} < 1.$ V′. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(d'_k)^{1/k} < 1.$

VI. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(l_k)^{1/k} < 1.$ VI′. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(l'_k)^{1/k} < 1.$

VII. При некотором $r > 0$

$$\inf_{n\geqslant 0}\inf_{(n)}\mu(T^n(A_{i^n})) \geqslant r.$$

Теорема 2. *Пусть преобразование T и некоторое разбиение, порождающее σ-алгебру $\mathfrak{C}$, удовлетворяют условиям I—VI. Тогда справедливо следующее:*

1. *Существует в $L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ предел*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(k)}F_{i^k} = p,$$

причем $0 < C_1 \leqslant p \leqslant C_2 < \infty$, и мера P с плотностью p относительно μ — инвариантная мера преобразования T.

2. *Эндоморфизм T и σ-алгебра $\mathfrak{C}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. При этом $r(k) \leqslant M(d_k + l_k)$.*

3. *Пусть $g \in L_\infty$. Положим*

$$\sigma_\beta(g) = \sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\sum_{(k)}\bar{J}_{i^k}W(g, A_{i^k}).$$

Если $1 < \beta^{-1} > \max(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, d_k^{1/k}, \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, l_k^{1/k})$ *и* $\sigma_\beta(g) < \infty$, *то*

$$\left| V_P^n g - \int_X g(x)\,P(dx)\right|_\infty \leqslant Al^{-\lambda n}\sigma_\beta(g),$$

причем $A > 0$ и $\lambda > 0$ — постоянные, зависящие лишь от T, $\mathfrak{C}$ и β.

Теорема 3. *Пусть преобразование T пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и разбиение пространства X удовлетворяют условиям I—III, V′, VI′ и VII. Тогда выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, если $g \in L_1(X, \mathfrak{M}, P)$ измерима относительно $\mathfrak{M}_k$, то при $n \geqslant 0$*

$$\left| E^{n+k}g - \int_X g(x)\,P(dx)\right|_\infty \leqslant Bl^{-\lambda n}|f|_1,$$

причем $B > 0$ и $\lambda > 0$ — постоянные, зависящие лишь от T и $\mathfrak{C}$.

Следствие 2. (Обобщенная теорема Кузьмина (ср. [2]).) *В условиях теоремы 2*

$$\left|\sum_{(n)}J_{i^n}g(f_{i^n}) - p\int_X g(x)\,\mu(dx)\right|_\infty \leqslant l^{-\lambda n}(A_1|g|_\infty + A_2\sigma_\beta(g)).$$

Следствие 3. (Плавное перемешивание.) *Если выполнены условия теоремы 3 и $A \in \mathfrak{M}_k$, $B \in \mathfrak{M}^{k+n}$, то при $n \geqslant 0$*

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant Cl^{-\lambda n}P(A)P(B)$$

Положим $\alpha_k = \sup\limits_{i\in I}\sup\limits_{(k)} W(\ln J_i, A_i^k \cap T(A_i))$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* I. *Если* $\alpha_0 < \infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (\alpha_k)^{1/k} < 1$, *то выполнено условие* III. *Если, кроме того, имеет место условие* IV, *то выполнено условие* VI'.

4. Здесь мы укажем применения теорем 2 и 3.

а. θ-разложения. Пусть $\theta > 1$. Положим $Tx = \theta x - [\theta x]$, $x \in [0, 1]$. Если μ — мера Лебега на $[0, 1]$, а $\mathfrak{C}$ — σ-алгебра, порожденная функцией $[\theta x]$, то применима теорема 2.

б. Преобразование Якоби — Перрона. Пусть X — s-мерный единичный куб Q^s с мерой Лебега μ. Положим

$$T(x_1, \ldots, x_s) = (x_2x_1^{-1} - [x_2x_1^{-1}], \ldots, x_sx_1^{-1} - [x_sx_1^{-1}], x_1^{-1} - [x_1^{-1}]).$$

Если $\mathfrak{C}$ — σ-алгебра, порожденная вектор-функцией $([x_2x_1^{-1}], \ldots$ $\ldots, [x_sx_1^{-1}]), [x_1^{-1}]$, то, используя теорему 4, можно проверить выполнение условий теоремы 3. Кроме того, можно показать, что плотность p инвариантной меры непрерывна в областях, полученных при разбиении Q^s всеми гиперплоскостями вида $x_r = x_{r'}$ $(1 \leqslant r, r' \leqslant s)$ и имеет разрывы на границах этих областей.

Отметим, что те же вопросы, связанные с преобразованием Якоби — Перрона, изучались в ([3], [4]). Однако содержащиеся там оценки таковы, что, например, остается открытым вопрос о применимости центральной предельной теоремы к измеримым относительно $\mathfrak{C}$ функциям из L_2. В то же время в доказательствах этих результатов имеются серьезные дефекты, а сами теоремы имеют условный характер: предполагается, что p имеет ограниченные частные производные во всем Q^s, что не так, поскольку у p имеются разрывы.

С помощью теорем 2—4 можно также усилить теоремы 1—3 из ([5]), но сейчас мы не будем на этом останавливаться.

Автор благодарит Ю. В. Линника, указавшего на задачи, связанные с преобразованием Якоби — Перрона.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
электроизмерительных приборов
Ленинград

Поступило
3 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 499 (1961). [2] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1949. [3] F. Schweiger, J. Reine u. Angew. Math., 232, 35 (1968). [4] M. S. Waterman, Some Ergodic Properties of Multi-dimensional F-expansions, Mich. Univ., 1969. Preprint. [5] М. И. Гордин, ДАН, 182, 1004 (1968).