С. В. Чуракова, Об относительной управляемости линейных систем с переменным и распределенным запаздыванием, *Дифференц. уравнения*, 1969, том 5, номер 6, 1068–1075

ИЮНЬ 1969 г., ТОМ V, № 6

УДК 517.949.22

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. В. ЧУРАКОВА

Пусть движение объекта описывается уравнением

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x\big(t - h(t)\big) + c(t)\,u(t), \qquad t \geqslant t_0, \\ x_{t_0}(\cdot) = \{\varphi(\theta), \quad \theta \in [t_0 - h(t_0),\ t_0]\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь x — n-вектор, $u(t)$ — скалярная функция (управление), $A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ — непрерывные достаточное число раз дифференцируемые матричные функции соответствующих размерностей, $h(t)$, $h(t) > 0$ — непрерывно-дифференцируемая скалярная функция (запаздывание), причем $\dfrac{dh(t)}{dt} < 1$, $x_{t_0}(\cdot)$ — начальное состояние системы (1), $\varphi(\theta)$ — кусочно-непрерывная n-мерная вектор-функция, заданная на начальном множестве $[t_0 - h(t_0),\ t_0]$.

Система (1) называется относительно управляемой, если для каждого начального состояния $x_{t_0}(\cdot)$ можно построить кусочно-непрерывное управление $u(\cdot) = \{u(t),\ t \in [t_0,\ t_1]\}$, переводящее систему (1) в положение $x(t_1) = x(t_1,\ x_{t_0}(\cdot),\ u(\cdot)) = 0$ за конечный промежуток времени $t_1 - t_0$.

Понятие управляемости было введено Р. Е. Калманом [1] для обыкновенных систем (без запаздывания). Управляемость систем с запаздыванием рассмотрена в работах [2—5]. В [4, 5] показано, что при исследовании относительной управляемости фундаментальную роль играет так называемое определяющее уравнение, которое определенным образом составляется по известной правой части уравнения движения. В случае линейной автономной системы $(A(t) \equiv A,\ B(t) \equiv B,\ c(t) \equiv c,\ h(t) \equiv h)$ определяющее уравнение имеет вид

$$q_k(s) = Aq_{k-1}(s) + Bq_{k-1}(s - h),\ k \geqslant 1,\ s \in (-\infty,\ +\infty),$$

$$q_0(s) = \begin{cases} c, & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Для неавтономной системы с постоянным запаздыванием $(h(t) \equiv h)$ это уравнение задается на полуплоскости $t \geqslant t_0$, $s \in (-\infty,\ +\infty)$:

$$q_k(s,\ t) = A(t)\,q_{k-1}(s,\ t) + B(t)\,q_{k-1}(s - h,\ t - h) - \\ - \frac{\partial q_{k-1}(s,\ t)}{\partial t}, \quad k \geqslant 1,$$

$$q_0(s,\ t) = \begin{cases} c(t), & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

В настоящей работе показано, что в линейных системах с переменным запаздыванием область, над которой строятся решения определяющего уравнения, принадлежит функциональному пространству.

Итак, рассмотрим множество функций $\Theta_\alpha = \{\theta_i(t),\ t \geqslant t_0,\ i = 0,\ \pm 1, \ldots, \pm \alpha\}$, элементы которого вычисляются по рекуррентной формуле $\theta_i(t) = r(\theta_{i-1}(t))$, $\theta_0(t) = t$. Здесь $r(t)$ — функция, обратная к $\nu(t) = t - h(t)$. При сделанных выше предположениях функция $r(t)$ существует и является строго монотонной.

Нетрудно доказать следующие свойства функций $\theta_i(t)$:

1) $\theta_i(r(t)) \equiv r(\theta_i(t))$,

2) $\theta_{p+i}(t) \equiv \theta_p(\theta_i(t))$.

При $i = 0$ эти тождества очевидны. Пусть они верны для произвольного k. Тогда

$$\theta_{k+1}(r(t)) = r[\theta_k(r(t))] = r[r(\theta_k(t))] = r(\theta_{k+1}(t)),$$

$$\theta_{p+k+1}(t) = r[\theta_{p+k}(t)] = r[\theta_p(\theta_k(t))] = \theta_p[r(\theta_k(t))] = \theta_p(\theta_{k+1}(t)).$$

Из второго свойства следует, что $\theta_p(\theta_i(t)) \equiv \theta_i(\theta_p(t))$.

Системе (1) поставим в соответствие уравнение, заданное на прямом произведении множеств $(-\infty, +\infty) \times \Theta_\infty$:

$$q_k(s,\ \theta_i(t)) = \Big[A(\theta_i(t))q_{k-1}(s,\ \theta_i(t)) + B(\theta_i(t)) \times$$

$$\times\, q_{k-1}(\nu(s),\ \theta_{i-1}(t)) - \frac{\partial q_{k-1}(s,\ \theta_i(t))}{\partial \theta_i}\Big] \frac{d\theta_i(t)}{dt}, \quad k \geqslant 1, \tag{2}$$

$$q_0(s,\ \theta(t)) = \begin{cases} c(\theta(t)), & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнение (2) с начальным условием (3) назовем определяющим уравнением системы управления (1). Вектор-функцию $q_k(s, t)$, вычисленную в силу (2) и совпадающую с (3) в случае $k = 0$, будем называть k-тым решением уравнения (2). Заметим, что при каждом фиксированном k решение определяющего уравнения $q_k(s, t) \equiv 0$ при всех $s \in (-\infty, +\infty)$, за исключением, может быть, точек $s = \theta_i(0)$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Обозначим через $\pi_\alpha(t)$ (α — неотрицательное целое число) матрицу, составленную из ненулевых значений решений $q_i(s, \theta_\alpha(t))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, уравнения (2) при $s \in [0, \theta_\alpha(0)]$

$$\pi_\alpha(t) = \{q_i(s,\ \theta_\alpha(t)),\ i = 0, 1, \ldots, n-1,\ s \in [0,\ \theta_\alpha(0)]\}.$$

Определяющее уравнение (2) назовем невырожденным при данном α, если можно указать такой момент времени t^*, $t^* \geqslant t_0$, при котором ранг матрицы $\pi_\alpha(t^*)$ равен n. Будем говорить, что определяющее уравнение невырождено, если оно невырождено хотя бы при одном α, $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$.

Решение уравнения (1) можно представить по формуле Коши в виде

$$x(t) = F(t,\ t_0)\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{r(t_0)} F(t,\ \tau)B(\tau)\varphi(\nu(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} F(t,\ \tau)c(\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

$$\frac{\partial F(t,\ \tau)}{\partial \tau} = -F(t,\ \tau)A(\tau) - F(t,\ r(\tau))B(r(\tau))\dot{r}(t),\quad \tau < t,$$

$$F(t, \tau) \equiv \begin{cases} E, & \tau = t - 0, \\ 0, & \tau = t + 0, \end{cases} \quad F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau > t.$$

Пусть t_1 — некоторое фиксированное число, g — произвольный n-вектор. Введем вспомогательную функцию $\psi(\tau, g) = (g, F(t_1, \tau)c(\tau))$. Покажем, что эта функция связана с решениями определяющего уравнения (2) следующим образом:

$$\psi^{(i)}(\tau, g) = (-1)^i \left(g, \sum_{k=0}^{i} F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right) q_i\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right)\right), \tag{5}$$

$$i = 0, 1, \ldots$$

Действительно, при $i = 0$ равенство (5) очевидно. Далее, по индукции: пусть равенство выполнено для $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Покажем, что оно имеет место и при $i = p$. Вычислим

$$\psi^{(p)}(\tau, g) = (-1)^{p-1}\Bigg(g, \sum_{k=0}^{p-1}\Bigg[\frac{dF\left(t_1, \theta_k(\tau)\right)}{d\tau} q_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right) +$$

$$+ F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right)\frac{dq_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right)}{d\tau}\Bigg]\Bigg) =$$

$$= (-1)^p \Bigg(g, \sum_{k=0}^{p-1}\Bigg\{\Bigg[F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right) A\left(\theta_k(\tau)\right) +$$

$$+ F\left(t_1 \theta_{k+1}(\tau)\right) B\left(\theta_{k+1}(\tau)\right)\frac{dr\left(\theta_k(\tau)\right)}{d\theta_k}\Bigg] q_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right) -$$

$$- F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right)\frac{dq_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right)}{d\theta_k(\tau)}\Bigg\}\frac{d\theta_k(\tau)}{d\tau}\Bigg) =$$

$$= (-1)^p \Bigg(g, \sum_{k=0}^{p-1} F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right)\Bigg[A\left(\theta_k(\tau)\right) q_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right) -$$

$$- \frac{dq_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right)}{d\theta_k(\tau)}\Bigg]\frac{d\theta_k(\tau)}{d\tau} + \sum_{k=1}^{p} F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right) B\left(\theta_k(\tau)\right) \times$$

$$\times q_{p-1}\left(\theta_{k-1}(0), \theta_{k-1}(\tau)\right)\frac{d\theta_k(\tau)}{d\theta_{k-1}}\frac{d\theta_{k-1}(\tau)}{d\tau}\Bigg).$$

Учитывая свойства решений определяющего уравнения (2), имеем

$$q_{p-1}\left(\theta_p(0), \theta_p(\tau)\right) \equiv 0 \text{ и } q_{p-1}\left(\theta_{-1}(0), \theta_{-1}(\tau)\right) \equiv 0.$$

Поэтому

$$\psi^{(p)}(\tau, g) = (-1)^p \Bigg(g, \sum_{k=0}^{p} F\left(t_1, \theta_k(\tau)\right)\Bigg[A\left(\theta_k(\tau)\right) q_{p-1}\left(\theta_k(0), \theta_k(\tau)\right) +$$

$$+ B\left(\theta_k(\tau)\right) q_{p-1}\left(\nu[\theta_k(0)], \nu[\theta_k(\tau)]\right) -$$

$$-\frac{dq_{p-1}(\theta_k(0),\ \theta_k(\tau))}{d\theta_k(\tau)}\Bigg]\frac{d\theta_k(\tau)}{d\tau}\Bigg) =$$

$$= (-1)^p\left(g,\ \sum_{k=0}^{p} F(t_1,\ \theta_k(\tau))\, q_p(\theta_k(0),\ \theta_k(\tau))\right),$$

что и требовалось доказать.

Из соотношений (5) следуют равенства

$$\psi^{(i)}(\theta_{-k}(t_1)-0,\ g) = \psi^{(i)}(\theta_{-k}(t_2)+0,\ g),\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

$$\psi^{(i)}_{-}(\theta_{-k}(t_1)-0,\ g) = \psi^{(i)}(\theta_{-k}(t_1)+0,\ g) + \qquad (6)$$

$$+ (-1)^i(g,\ q_i(\theta_k(0),\ t_1)),\quad i=k,\ k+1,\ \ldots,\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Закончив на этом предварительные выкладки, перейдем к изложению основного результата. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Система (1) относительно управляема, если ее определяющее уравнение невырождено.*

Доказательство. Пусть числа α, $\alpha \geqslant 0$, и t^*, $t^* \geqslant t_0$, таковы, что ранг матрицы $\pi_\alpha(t^*)$ равен n. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $t^* > t_0$, так как если ранг $\pi_\alpha(t_0)$ равен n, то вследствие непрерывной зависимости функций $q_k(s,\ \theta_\alpha(t))$ от t ранг $\pi_\alpha(t_0+\varepsilon)$ также равен n, если ε — достаточно малое положительное число.

Положим $t_1 = \theta_\alpha(t^*)$ и покажем, что система (1) относительно управляема на отрезке $[t_0,\ t_1]$. Условие $x(t_1) = 0$ при помощи формулы (4) приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} [F(t_1,\ \tau)\, c(\tau)]_i\, u(\tau)\, d\tau = \gamma_i,\quad i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (7)$$

Здесь через $[F(t_1,\ \tau)\, c(\tau)]_i$ обозначена i-тая компонента вектора $F(t_1,\ \tau)\, c(\tau)$, вектор $\gamma = \{\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n\}$ зависит лишь от начального состояния и коэффициентов системы (1).

Равенства (7) можно интерпретировать как задачу отыскания линейного функционала, определенного над пространством непрерывных функций и принимающего на элементах $[F(t_1,\ \tau)\, c(\tau)]_i$, $i=1,\ \ldots,\ n$, этого пространства заданные значения γ_i, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Известно [6], что последняя задача разрешима при любых γ_i, $i=1,\ \ldots,\ n$, в том и только том случае, если функции $[F(t_1,\ \tau)\, c(\tau)]_i$, $i=1,\ \ldots,\ n$, линейно независимы. Другими словами, указанные функции должны обладать следующим свойством: для любого вектора $g=\{g_1,\ \ldots,\ g_n\}$ с нормой $\|g\| = 1$, $\|g\|^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2$, должно иметь место следующее соотношение:

$$\psi(\tau,\ g) \equiv (g,\ F(t_1,\ \tau)\, c(\tau)) \not\equiv 0,\quad \tau \in [t_0,\ t_1].$$

Допустим противное: существует вектор g^0, $\|g^0\| = 1$, такой, что $\psi(\tau,\ g^0) \equiv 0$, $\tau \in [t_0,\ t_1]$, а следовательно, и

$$\psi^{(k)}(\tau,\ g^0) \equiv 0,\quad \tau \in [t_0,\ t_1],\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (8)$$

Рассмотрим последовательность точек $\theta_{-k}(t_1)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha$. При сделанных выше предположениях эта последовательность строго убывает и, кроме того, $\theta_{-\alpha}(t_1)=\theta_{-\alpha}(\theta_\alpha(t^*))=\theta_0(t^*)=t^*>t_0$. Поэтому все точки $\theta_{-k}(t_1)$, $k=0, 1, \ldots, \alpha$, принадлежат интервалу $(t_0, t_1]$.

Из соотношений (8) следует, что в каждой точке $\tau\in(t_0, t_1]$ имеют место равенства

$$\psi^{(i)}(\tau-0, g^0)=\psi^{(i)}(\tau+0, g^0)=0, \quad i=0, 1, \ldots, n-1,$$

в частности,

$$\psi^{(i)}\left(\theta_{-k}(t_1)-0, g^0\right)=\psi^{(i)}\left(\theta_{-k}(t_1)+0, g^0\right)=0,$$

$$i=0, 1, \ldots, n-1, \quad k=0, 1, \ldots, \alpha.$$

Учитывая это, из формул (6) получим

$$\left(g^0, q_i\left(\theta_k(0), t_1\right)\right)=0, \quad i=k, k+1, \ldots, n-1, \ k=1, \ldots, n-1. \quad (9)$$

Далее, рассматривая тождества (8) в момент $\tau=t_1$ и учитывая определения функций $\psi(\tau, g)$ и $F(t_1, \tau)$, приходим к соотношениям

$$\left(g^0, q_i\left(\theta_0(0), t_1\right)\right)=0, \quad i=0, 1, \ldots, n-1,$$

которые в совокупности с (9) означают, что

$$\left(g^0, q_i\left(\theta_k(0), t_1\right)\right)=0, \quad i=k, k+1, \ldots, n-1, \ k=0, 1, \ldots, n-1,$$

или, что то же самое,

$$\left(g^0, q_i\left(\theta_k(0), \theta_\alpha(t^*)\right)\right)=0, \quad (10)$$

$$i=k, k+1, \ldots, n-1, \quad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Очевидно, все вектор-столбцы матрицы $\pi_\alpha(t^*)$ содержатся среди векторов $q_i(\theta_k(0), \theta_\alpha(t^*))$, $i=k, k+1, \ldots, n-1$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Отсюда, помня, что по предположению норма $\|g^0\|=1$, заключаем, что равенства (10) могут иметь место лишь в случае, если ранг матрицы $\pi_\alpha(t^*)$ меньше n, что противоречит условию невырожденности определяющего уравнения (2).

Противоречие доказывает теорему.

Теорема обобщается и на случай системы (1) с несколькими управляющими воздействиями. Поскольку схема доказательства при этом остается прежней, укажем лишь на те изменения, которые вносятся наличием нескольких управлений.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x\left(t-h(t)\right)+C(t)u(t), \quad t\geqslant t_0, \quad (11)$$

в предположении, что $u(t)$ — r-мерная вектор-функция, а $C(t)$ — матрица размерности $n\times r$. В этом случае определяющее уравнение системы принимает вид

$$Q_k\left(s, \theta_i(t)\right)=\left[A\left(\theta_i(t)\right)Q_{k-1}\left(s, \theta_i(t)\right)+B\left(\theta_i(t)\right)Q_{k-1}\left(\nu(s), Q_{i-1}(t)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial Q_{k-1}\left(s, \theta_i(t)\right)}{\partial\theta_i}\right]\frac{d\theta_i(t)}{dt}, \quad k\geqslant 1, \quad (12)$$

$$Q_0\left(s, \theta(t)\right)=\begin{cases}C\left(\theta(t)\right), & s=0,\\ 0, & s\neq 0.\end{cases}$$

Определяющее уравнение (12) невырождено, если хотя бы при одном α, $0\leqslant\alpha\leqslant n-1$, ранг матрицы, составленной из ненулевых значений решений определяющего уравнения,

$$\pi_\alpha(t) = \{Q_i(s,\ \theta_\alpha(t)),\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ s \in [0,\ \theta_\alpha(0)]\}$$

равен n. Матрицу $\pi_\alpha(t)$ будем записывать еще в виде

$$\pi_\alpha(t) = \{[Q_i(s,\ \theta_\alpha(t))]^j,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ j = 1, \ldots, r,\ s \in [0,\ \theta_\alpha(0)]\}.$$

Здесь через Q^j обозначен j-тый вектор-столбец матрицы Q.

Условие (7) для системы (11) сводится к следующему:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{r} [F(t_1,\ \tau)\ C(\tau)]_i^s u_s(\tau)\, d\tau = \gamma_i,\quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{13}$$

Задача (13) имеет решение при любых γ_i, $i = 1, \ldots, n$, в том и только том случае, если среди $[F(t_1, \tau)\ C(\tau)]_i^s$ $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, r$, имеется n линейно независимых функций. Допустим, что система (11) не является относительно управляемой. Это значит, что можно указать такой вектор g^0, $\|g^0\| = 1$, что при всех s, $s = 1, \ldots, r$ будет иметь место тождество

$$\psi_s(\tau,\ g^0) = (g^0,\ [F(t_1,\ \tau)\ C(\tau)]^s) \equiv 0,\quad \tau \in [t_0,\ t_1].$$

Повторяя изложенные выше рассуждения, приходим к следующим соотношениям:

$$(g^0,\ [Q_i(\theta_k(0),\ \theta_\alpha(t^*))]^j) = 0,$$

$$i = k,\ k+1,\ \ldots,\ n-1,\quad j = 1,\ \ldots,\ r,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Но при $\|g^0\| = 1$ последние равенства могут быть выполнены лишь в случае, когда ранг матрицы $\pi_\alpha(t^*)$ меньше n, что противоречит условию теоремы. На этом доказательство теоремы заканчивается.

В заключение приведем достаточные условия относительной управляемости систем с распределенным запаздыванием (с последействием). Допустим, что движение объекта происходит по закону:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = \int_0^h K(s)\, x(t-s)\, ds + bu(t),\quad t \geqslant 0, \\ x_0(\cdot) = \{\varphi(\theta),\quad \theta \in [-h,\ 0]\}. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь, как и раньше, x — n-мерный вектор фазовых координат системы, $u(t)$ — скалярная функция (управление), h, $h > 0$, — постоянное число, b — постоянный вектор, $K(s)$ — $n \times n$-матрица, элементы которой суть непрерывные и достаточное число раз дифференцируемые функции на отрезке $[0,\ h]$ и тождественно равные нулю вне этого отрезка. Начальную функцию $\varphi(\theta)$, определенную на начальном отрезке $[-h,\ 0]$, считаем кусочно-непрерывной.

Решение уравнения (14) можно представить следующим образом:

$$x(t) = F(t,\ 0)\,\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{-\theta}^{h} F(t,\ s+\theta)\, K(s)\, ds\, \varphi(\theta)\, d\theta + \int_0^t F(t,\ \tau)\, bu(\tau)\, d\tau.$$

Функция $F(t,\ \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t,\ \tau)}{\partial \tau} = -\int_0^h F(t,\ \tau+s)\, K(s)\, ds,\quad \tau \leqslant t, \tag{15}$$

и начальным условиям

$$F(t, \tau)=\begin{cases}E, & \tau=t,\\ 0, & \tau>t.\end{cases}$$

Равенства (7) в случае системы (14) приобретают вид

$$\int_0^{t_1}[F(t_1, \tau)b]_i u(\tau)\,d\tau=\gamma_i, \quad i=1, \ldots, n. \tag{16}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (16) состоит в требовании линейной независимости функций $[F(t_1, \tau)b]_i$, $i=1, \ldots, n$.

Следуя описанной выше схеме, введем в рассмотрение уравнение

$$q_i(s, \tau)=\frac{dq_{i-1}(s, \tau)}{d\tau}+K(\tau)[q_{i-2}(s, 0)+q_{i-2}(s-h, h)], \tag{17}$$

$$i\geqslant 2, \quad s\in(-\infty, +\infty), \quad \tau\in[0, h],$$

$$q_0(s, 0)=\begin{cases}b, & s=0,\\ 0, & s\neq 0,\end{cases} \quad q_0(s, \tau)\equiv 0, \ \tau>0,$$

$$q_1(s, \tau)\equiv 0, \quad s\in(-\infty, +\infty),$$

которое назовем определяющим уравнением системы управления (14). Заметим, что при каждом фиксированном i решение определяющего уравнения $q_i(s, \tau)$ отлично от нуля лишь в конечном числе изолированных точек типа $s=\alpha h$, где α — целое неотрицательное число. В соответствии с принятыми выше предположениями заключаем, что векторы $q_i(s, \tau)$ непрерывны по τ на отрезке $[0, h]$ вместе со своими производными.

Положим

$$p_k(s, \tau)=$$
$$=q_k(s, \tau)+q_k(s-h, \tau+h).$$

Определяющее уравнение (17) будем называть невырожденным, если матрица

$$\pi=\{p_k(mh, 0),$$
$$k=0, 1, \ldots, 2n-2, \quad m=0, 1, \ldots, n-1\}$$

имеет ранг n.

В частном случае, когда $K(\tau)\equiv \mathrm{const}=K$, решения определяющего уравнения не зависят от τ: $q_i(s, \tau)\equiv q_i(s)$. Положив

$$q_0(0)=b, \ q_0(s)\equiv 0, \ s\neq 0, \ q_1(s)\equiv 0, \ s\in(-\infty, +\infty),$$

из формулы (17) получим

$$q_{2i}(jh)=C_i^j K^i b \text{ при } j=0, 1, \ldots, i, \quad i=0, 1, \ldots,$$

(C_i^j — биномиальные коэффициенты), $q_{2i}(s)\equiv 0$ при $s\neq jh$, $j=0, 1, \ldots, i$, и $q_{2i+1}(s)\equiv 0$ при $s\in(-\infty, +\infty)$, $i=0, 1, \ldots$. Условие невырожденности определяющего уравнения в этом случае преобразуется к виду: ранг $\{b, Kb, \ldots, K^{n-1}b\}=n$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если определяющее уравнение* (*17*) *невырождено, то система* (*14*) *относительно управляема.*

Доказательство. Пусть определяющее уравнение (17) невырождено. Покажем, что тогда при любых g, $\|g\| = 1$, имеет место соотношение

$$\psi(\tau, g) = \big(g, F(t_1, \tau) b\big) \neq 0, \quad \tau \in [0, t_1], \tag{18}$$

если число t_1 достаточно велико ($t_1 \gg nh$).

Из формул (18) и (15) следуют равенства

$$\psi^{(i)}(\tau, g) = (-1)^i \Big(g, \sum_{i=0}^{m} (-1)^{k+i} \Big\{ \int_{\tau}^{\tau+h} F(t_1, s+ih) q_{k+1}(ih, s-\tau)\, ds +$$

$$+ F(t_1, \tau+ih) p_k(ih, 0) \Big\}\Big), \quad \tau \in [t_1 - (m+1)h, t_1 - mh]$$

и

$$\psi^{(k)}(t_1 - mh - 0, g) = \psi^{(k)}(t_1 - mh + 0, g) + (-1)^{k+m} \big(g, p_k(mh, 0)\big).$$

Допустим, что система не является относительно управляемой. Это значит, что существует такой вектор g^0, $\|g^0\| = 1$, что

$$\psi(\tau, g^0) \equiv 0, \quad \tau \in [0, t_1].$$

В таком случае справедливы равенства

$$\psi^{(k)}(t_1 - mh - 0) = \psi^{(k)}(t_1 - mh + 0) = 0,$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2n-2, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Обращаясь к (19), заключаем, что тогда

$$\big(g^0, p_k(mh, 0)\big) = 0, \tag{20}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-2.$$

Однако по предположению множество $\{p_k(mh, 0),\ k = 0, 1, \ldots, 2n-2,\ m = 0, 1, \ldots, n-1\}$ содержит n линейно независимых векторов, и поэтому равенства (20) возможны лишь в случае $\|g^0\| = 0$, что противоречит высказанному выше предположению относительно вектора g^0. Это и доказывает справедливость теоремы.

Литература

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления Тр. Первого Международного конгресса ИФАК. Изд. АН СССР, 1960.
2. Красовский Н. Н. ПММ, **30**, вып. 5, 1966.
3. Куржанский А. Б. ПММ, **30**, вып. 6, 1966.
4. Кириллова Ф. М., Чуракова С. В. Дифференц. уравнения, **3**, № 3, 436—445, 1967.
5. Кириллова Ф. М., Чуракова С. В. ДАН СССР, **174**, № 6, 1260—1263, 1967.
6. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Науч. техн. изд-во Украины, Харьков, 1938.

Поступила в редакцию 29 февраля 1968 г.

Уральский филиал АН СССР