O. O. Badmaev, About the properties of spaces $C_p(X)$ close to Frechet–Urysohn property, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2024, Number 87, 5–10

DOI: 10.17223/19988621/87/1

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 87
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 515.1 MSC: 54D20
doi: 10.17223/19988621/87/1

О свойствах пространств $C_p(X)$, близких к свойству Фреше–Урысона

Олег Олегович Бадмаев

Томский государственный университет, Томск, Россия, badmaev1995@bk.ru

Аннотация. По аналогии со свойством Фреше–Урысона введены в рассмотрение свойства n-Фреше–Урысона и ω-Фреше–Урысона пространств $C_p(X)$. Изучена связь этих свойств со свойствами γ'_n и γ'_ω пространства X. В частности, установлено, что свойство γ'_ω пространства X равносильно свойству ω-Фреше–Урысона пространства $C_p(X)$, а также что из свойства n-Фреше–Урысона следует γ'_n.

Ключевые слова: ω-покрытие, γ-свойство, свойство Герлича–Надя, свойство Фреше–Урысона, γ'_k-свойство, свойство Линделефа, свойство ω-Фреше–Урысона, свойство n-Фреше–Урысона

Благодарности: Автор благодарен А.В. Осипову за интерес к этой работе и полезные обсуждения.

Для цитирования: Бадмаев О.О. О свойствах пространств $C_p(X)$, близких к свойству Фреше–Урысона // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 5–10. doi: 10.17223/19988621/87/1

Original article

About the properties of spaces $C_p(X)$ close to Frechet–Urysohn property

Oleg O. Badmaev

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, badmaev1995@bk.ru

Abstract. This paper deals with relationships between topological properties of Tykhonoff spaces X and properties of their functional spaces $C_p(X)$. Tykhonoff spaces X are supposed to have the property γ'_k or γ'_ω, which are defined in the terms of k-saturated

(respectively, saturated) ω-covers. We define for an arbitrary integer n the n-Fréchet–Urysohn property and ω-Fréchet–Urysohn property of the space $C_p(X)$ in such a manner that 1-Fréchet–Urysohn is the known Fréchet–Urysohn property, n-Fréchet–Urysohn implies both (n+1)-Fréchet–Urysohn, and ω-Fréchet–Urysohn property. We prove that the γ'_ω- property of X is equivalent to ω-Fréchet–Urysohn property of $C_p(X)$ and, consequently, X is Lindelöf if and only if $C_p(X)$ is ω-Fréchet–Urysohn. We also prove that for each integer n the property γ'_n of X follows from the n-Fréchet–Urysohn property of $C_p(X)$, as well as the inverse slightly weaker theorem.
Keywords: ω-cover, γ-property, Gerlits–Nagy property, Fréchet Urysohn property, γ'_k-property, Lindelöf property, ω-Fréchet–Urysohn, n-Fréchet–Urysohn

Acknowledgments: The author is grateful to Alexander V. Osipov for his interest in this work and useful discussions.

For citation: Badmaev, O.O. (2024) About the properties of spaces $C_p(X)$ close to Frechet–Urysohn property. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 5–10. doi: 10.17223/19988621/87/1

Введение

В работе [1] для тихоновских пространств введены в рассмотрение топологические свойства γ'_n (n = 1, 2, …) и γ'_ω, последовательно (с ростом номера n) ослабляющие классическое γ-свойство. В данной статье устанавливается связь свойств γ'_n, γ'_ω пространства X с некоторыми свойствами пространства непрерывных функций $C_p(X)$, аналогичными свойству Фреше–Урысона.

Все топологические пространства предполагаются тихоновскими. Все рассматриваемые покрытия нетривиальны, т.е. не содержат всё топологическое пространство как элемент. Запись $n \in \omega$ означает, что n – натуральное число.

Следующие два понятия широко известны (см. напр.: [2. Гл. II, § 3])

Определение 1. Скажем, что последовательность подмножеств $\eta = \{A_n\}_{n\in\omega}$ пространства X сходится к X (пишем $A_n \underset{n\to\infty}{\to} X$ или $\eta \to X$), если произвольная точка $x \in X$ принадлежит всем членам последовательности η, начиная с некоторого (зависящего от x) номера.

Определение 2. Семейство η подмножеств пространства X называется ω-покрытием этого пространства, если для каждого конечного множества $K \subset X$ существует $U \in \eta$ такое, что $K \subset U$.

Приведем также для удобства читателя определения понятий, введенных в [1] и активно используемых в дальнейшем.

Определение 3. Пусть η – произвольное семейство открытых подмножеств пространства X. Скажем, что η' является n-насыщенным семейством для η, если $\eta' = \{\bigcup_{i\le m} U_i : U_i \in \eta, m \le n\}$. Скажем, что η' является насыщенным семейством для η, если $\eta' = \{\bigcup_{i\le m} U_i : U_i \in \eta, m \in \omega\}$.

Очевидно, что если η – ω-покрытие пространства X, то его n-насыщенное (насыщенное) семейство η' также является ω-покрытием X для любого $n \in \omega$.

Определение 5. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_n, если для любого открытого ω-покрытия η пространств X, в его n-насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_k\}_{k\in\omega}$ такая, что $B_k \underset{k\to\infty}{\to} X$. При этом само пространство X будем называть γ'_n-пространством.

Определение 6. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_ω, если для любого открытого ω-покрытия η пространства X, в его насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_k\}_{k\in\omega}$ такая, что $B_k \underset{k\to\infty}{\to} X$. При этом само пространство X будем называть γ'_ω-пространством.

Обратимся теперь к пространствам непрерывных функций.

Определение 7. Скажем, что в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство ω-Фреше–Урысона, если для любого подмножества A из $C_p(X)$ и для любой функции $f \in \overline{A}$ существует последовательность $A' = \left\{A_k\right\}_{k\in\omega}$, состоящая из конечных подмножеств в A такая, что для любой окрестности $W = W(f, K, \varepsilon) \subset C_p(X)$ существует такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \ge n_0$ и для каждой точки $x \in K$ найдется функция $g_x \in A_n$ такая, что $|g_x(x) - f(x)| < \varepsilon$.

В [1] получена следующая характеризация свойства Линделёфа пространства X:

Теорема 8 [1]. Пространство X линделёфово тогда и только тогда, когда X является γ'_ω-пространством.

В то же время А.В. Осипов охарактеризовал свойство Линделёфа пространства X некоторым свойством пространства $C_p(X)$. Напомним, что множество $A \subseteq C_p(X)$ называется n-плотным в $C_p(X)$, если $A \cap W \ne \varnothing$ для каждой стандартной окрестности $W = W(f, x_1, \dots, x_m, \varepsilon)$ в $C_p(X)$, где $m \le n$.

Теорема 9 [3]. Пространство X линделёфово тогда и только тогда, когда каждое 1-плотное множество в $C_p(X)$ содержит счетное 1-плотное подмножество.

Установим теперь один из основных результатов данной работы.

Теорема 10. Пусть X является тихоновским пространством, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в пространстве X выполнено свойство γ'_ω;

(2) в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство ω-Фреше–Урысона.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1) Пусть η является ω-покрытием пространства X. Через η' обозначим насыщенное семейство для η. Для каждого $U \in \eta'$ построим семейство $A_U = \bigcup_{i=1}^{k} A_{W_i}$, где $A_{W_i} = \left\{ f \in C_p(X) \mid \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \subset W_i \right\}$, $U = W_1 \cup \ldots \cup W_k$ и $W_i \in \eta$ для всех $i = \overline{1,k}$. Положим $A = \cup\left\{A_U \mid U \in \eta'\right\}$, тогда $f_0 \in \overline{A}$, где $f_0 \equiv 1$. Так как выполнено условие (2), то существует последовательность $A' = \left(A_i\right)_{i\in\omega}$ конечных подмножеств $A_i \subset C_p(X)$, такая как в определении 7. Для каждого $k \in \omega$

и каждого $f \in A_k$ зафиксируем $W_f \in \eta$ такое, что $\overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \subset W_f$, и положим $U_k = \cup\{W_f \mid f \in A_k\}$. Ясно, что $U_k \in \eta'$.

Покажем, что последовательность $U = \{U_k\}_{k\in\omega}$ является искомой. Пусть $x \in X$, тогда существует такое $n \in \omega$, что $A_k \cap W(f_0, x, 1) \neq \varnothing$ для всех $k \geq n$. Это означает, что существует функция $f \in A_k$, для которой $f(x) > 0$, следовательно, $x \in f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \subset W_f \subset U_k$. Поэтому $x \in U_k$ для всех $k \geq n$, что означает $U_k \underset{k\to\infty}{\to} X$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset C_p(X)$ с предельной функцией f_0. Обозначим через η_n семейство прообразов U_g интервала $I_n = \left(-1/n, 1/n\right)$ относительно функций вида $|f_0 - g|$, где $g \in A$. Покажем, что η_n является ω-покрытием пространства X. Пусть K – произвольное конечное подмножество в X. Так как $f_0 \in \overline{A}$, то существует функция $g \in A \cap W\left(f_0, K, \frac{1}{n}\right)$, а значит $|f_0 - g|(x) < \frac{1}{n}$ при $x \in K$. Таким образом, $K \subset \left(|f_0 - g|\right)^{-1}(I_n)$.

Для каждого $n \in \omega$ обозначим η_n' насыщенное семейство для η_n. Так как в пространстве X выполнено свойство γ_ω', то для каждого $n \in \omega$ существует последовательность $\zeta_n \subset \eta_n'$ такая, что $\zeta_n = \left(W_n^j\right)_{j\in\omega}$ и $\zeta_n \to X$. Пусть $H = \left(H_n\right)_{n\in\omega}$, где $H_n = \bigcup\limits_{i+j=n+1} W_i^j$. Рассмотрим $H_1 = W_1^1 = U_{g_1} \cup \ldots \cup U_{g_k}$, положим $A_1 = \left(g_1, \ldots, g_k\right)$. Аналогично рассмотрим множество

$$H_2 = W_2^1 \cup W_1^2 = (U_{g_1} \cup \ldots \cup U_{g_k}) \cup (U_{f_1} \cup \ldots \cup U_{f_h})$$

и положим $A_2 = \left(g_1, \ldots, g_k, f_1, \ldots, f_h\right)$. Продолжая процесс построения множеств A_n по множествам H_n, получим последовательность $A' = \left(A_n\right)_{n\in\omega}$.

Покажем, что последовательность A' искомая. Рассмотрим произвольную окрестность $W = W(f_0, K, \varepsilon)$ функции f_0, и пусть $x \in K$. Выберем $n \in \omega$ так, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Для последовательности ζ_n существует $k' \in \omega$ такое, что для всех $k \geq k'$ выполнено $x \in W_n^k$. Тогда при всех $l \geq k' + n + 1$ имеем $x \in H_l$. Следовательно, существует $f \in A_l$ такая, что $|f_0(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Таким образом, из теорем 8 и 10 мы получаем еще одну характеризацию свойства Линделёфа в дополнение к теореме 9.

Теорема 11. Пусть X – тихоновское пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) пространство X линделёфово;

(2) в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство ω-Фреше–Урысона.

Комбинируя теоремы 9 и 10, получаем:

Следствие 12. Пусть X – тихоновское пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в пространстве X выполнено свойство γ'_ω;

(2) каждое 1-плотное множество в $C_p(X)$ содержит счетное 1-плотное подмножество.

Далее мы рассматриваем свойства γ'_n и их связи со свойствами пространства $C_p(X)$.

Определение 13. Скажем, что в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство n-Фреше–Урысона, если для любого подмножества A из $C_p(X)$ и для любой функции $f \in \overline{A}$ существует последовательность $A' = \left(A_m\right)_{m\in\omega}$ состоящая из конечных подмножеств A мощности не более n такая, что для любой окрестности $W = W(f, K, \varepsilon) \subset C_p(X)$ существует такое натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для всех $k \geq k_0$ и для каждой точки $x \in K$ найдется функция $g_x \in A_k$, такая что $\left|g_x(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

Определение 14. Скажем, что в пространстве X выполнено свойство γ'_{sn}, если для любой последовательности $\left\{\eta_k\right\}_{k\in\omega}$, состоящей из ω-покрытий пространства X, можно для всех $k \in \omega$ так выбрать $U_k \in \eta'_k$, где η'_k – n-насыщенное семейство для η_k, что $U_k \underset{k\to\infty}{\to} X$.

Несложно увидеть, что из свойства γ'_{sn} следует свойство γ'_n для всех $n \in \omega$.

Следующие утверждения напрямую вытекают из определений 7 и 13.

Предложение 15. (а) Свойство 1-Фреше–Урысона эквивалентно свойству Фреше–Урысона;

(б) Для любого $n \in \omega$ из свойства n-Фреше–Урысона следует свойство (n + 1)-Фреше–Урысона.

(в) Для любого $n \in \omega$ из свойства n-Фреше–Урысона следует свойство ω-Фреше–Урысона.

Ниже устанавливается, как свойства n-Фреше–Урысона связаны со свойствами γ'_n и γ'_{sn}.

Теорема 16. Пусть X – тихоновское пространство, тогда:

(1) если в $C_p(X)$ выполнено свойство n-Фреше–Урысона, то в X выполнено свойство γ'_n;

(2) если в X выполнено свойство γ'_{sn}, то в $C_p(X)$ выполнено свойство n-Фреше–Урысона.

Доказательство. (2) Рассмотрим произвольное подмножество A из $C_p(X)$ с предельной функцией f_0. Обозначим через η_k семейство прообразов U_g интервала $I_k = \left(-1/k, 1/k\right)$ относительно функций вида $\left|f_0 - g\right|$, где $g \in A$. Для каждого $k \in \omega$ обозначим η'_k n-насыщенное семейство для η_k. По условию для каждого $k \in \omega$ существует $U_k = U_{g_1} \cup \ldots \cup U_{g_n} \in \eta'_k$ такое, что последовательность $\xi = \left(U_k\right)_{k\in\omega}$ сходится к X. Положим $A_k = \left\{g_1, \ldots, g_n\right\}$.

Покажем, что последовательность $A' = (A_k)_{k\in\omega}$ является искомой. Зафиксируем произвольную окрестность $W = W(f_0, x, \varepsilon)$ функции f_0 и точку $x \in K$. Так как $U_k \underset{k\to\infty}{\to} X$, то существует $k_0 \in \omega$ такое, что для всех $k \geq k_0$ выполнено $K \subset U_k = W_{g_1^k} \cup \ldots \cup W_{g_n^k}$ и $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$. Значит, для некоторого $j \in \{1,...,n\}$ имеем $f_0(x) - g_j^k(x) \in I_k$, т.е. функция g_n^k – искомая.

(1) Данная импликация доказывается аналогично пункту (2) $\Rightarrow$ (1) теоремы 10. □

Известно, что свойства γ'_{s1} и γ'_1 эквивалентны [2. Теорема II.3.2], поэтому в связи с теоремой 16 представляет интерес следующий вопрос:

Вопрос 17. Верно ли, что из свойства γ'_n следует свойство γ'_{sn} при $n > 1$?

Еще один важный вопрос поставлен А.В. Осиповым:

Вопрос 18. Совпадают ли свойства Гуревича и γ'_n при $n > 1$?

Список источников

1. *Бадмаев О.О.* Об аддитивной модификации γ-свойства // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 5–11. doi: 10.17223/19988621/74/1
2. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М. : Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
3. *Osipov A.V.* Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram // Topology and its Applications. 2020. V. 278. Art. 107232. doi: 10.1016/j.topol.2020.107232

References

1. Badmaev O.O. (2021) Ob additivnoy modifikatsii γ-svoystva [On additive modification of the γ-property]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 5–11. DOI: 10.17223/19988621.
2. Arkhangel’skij A.V. (1992) *Topological function spaces*. *Mathematics and its applications, Soviet Series, vol. 78*. Dordrecht: Kluwer Academic.
3. Osipov A.V. (2020) Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram, *Topology and its Applications*. 278. 107232. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107232.

***Сведения об авторе*:**

Бадмаев Олег Олегович – аспирант кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: badmaev1995@bk.ru

***Information about the author*:**

Badmaev Oleg O. (PhD Student of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: badmaev1995@bk.ru

Статья поступила в редакцию 21.07.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 21.07.2023; accepted for publication 12.02.2024