B. A. Dubrovin, Finite band linear differential operators and Abelian varieties,
Uspekhi Mat. Nauk, 1976, Volume 31, Issue 4, 259–260

КОНЕЧНОЗОННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АБЕЛЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Б. А. Дубровин

Настоящая заметка посвящена исследованию периодической и почти периодической задачи для нелинейных уравнений математической физики, связанных с матричными линейными дифференциальными операторами, естественно возникающих после работ В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [1]. При этом имелись в виду две цели: с одной стороны, применение к теории самих нелинейных уравнений и к спектральной теории линейных операторов, а с другой — к теории абелевых многообразий по схеме работы [5]. Наши методы являются дальнейшим развитием методов работы С. П. Новикова [2], автора [3], [6], А. Р. Итса и В. Б. Матвеева [4] по периодической и почти периодической задаче для уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) и оператора Штурма — Лиувилля.

Мы рассматриваем оператор $L = d/dx + U(x)$, где $U(x)$ — матрица $n \times n$, периодическая по x с периодом T, причем $u_i^i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Для оператора L ставится задача на собственные значения

$$(1) \qquad L\psi = EA\psi, \qquad \psi(x+T, E) = e^{p(E)}\psi(x, E),$$

где E — комплексный спектральный параметр, $A = (a_i \cdot \delta_{ij})$ — постоянная диагональная матрица, $a_i \neq a_j$, $\sum\limits_i a_i = 0$. Если $U(x)$ — почти периодическая, то граничное условие задачи (1) следует заменить таким: группа периодов логарифмической производной координат ψ совпадает с группой периода $U(x)$. Из работы автора и С. П. Новикова [5] естественно вытекает

Определение 1. Потенциал $U(x)$ называется *конечнозонным* относительно задачи (1), если собственные функции задачи (1) продолжаются по E до мероморфной функции на римановой поверхности Г конечного рода. Поверхность Г называется тогда *спектром* задачи (1).

С каждой задачей (1) мы свяжем серию динамических систем на многообразии потенциалов U (назовем их уравнениями типа КдФ), коммутирующих между собой и поэтому допускающих представление Лакса [7] $\dot{L} = [M, L]$ (M — дифференциальный оператор). В работе С. П. Новикова [2] было найдено другое представление таких систем — на матрицах n-го порядка, полиномиально зависящих от E:

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Lambda - \frac{\partial}{\partial t}Q = [\Lambda, Q], \quad \frac{\partial}{\partial t}T = [\Lambda, T].$$

Здесь T — матрица монодромии задачи (1). Соответствующие стационарные уравнения имеют представление

$$(3) \qquad \frac{d}{dx}\Lambda = [\Lambda, Q], \qquad [\Lambda, T] = 0$$

и оказываются вполне интегрируемыми конечномерными гамильтоновыми системами по аналогии с [2]. Их решения $U(x)$ оказываются конечнозонными потенциалами. Пусть π — фактор-группа группы всех диагональных невырожденных матриц n-го порядка по подгруппе скалярных. Группа π действует на потенциалах по правилу $U \to \pi^{-1}U\pi$.

Теорема. *Совокупность конечнозонных потенциалов с данным спектром* Г *изоморфна пространству главного* π*-расслоения над многообразием Якоби* $J(\Gamma)$ *римановой поверхности* Г.

Матричные элементы потенциала U дают сечения указанного расслоения, но не алгебраические, а с существенными особенностями. Вся совокупность конечнозонных потенциалов расслаивается со слоем π над многообразием модулей якобианов $\{J(\Gamma)\}$.

Уравнение $\lambda' = [\lambda, Q]$, где $Q = U - EA$ имеет единственное решение в виде ряда $\lambda = B + \lambda_1/E + \lambda_2/E^2 + \ldots$, $B = (b_i \delta_i^j)$, $\lambda_i = \lambda_i(B, u, u', \ldots, u^{(i)})$.

Определение 2. *N-м уравнением типа КдФ* называется уравнение

$$(4) \qquad \dot{U} + [A, \lambda_{N+1}] = 0.$$

Уравнение (4) допускает представление Новикова (2), причем $\Lambda(E) = BE^k + \lambda_1 E^{k-1} + \ldots + \lambda_k$. Найдем стационарные решения уравнения (4). Рассмотрим алгебраическую кривую Γ: $R(W, E) = \det(W \cdot 1 - \Lambda(E)) = 0$. Кривая Γ не зависит от x и инвариантна относительно всех динамических систем вида (4). Ниже мы покажем, что система (3), получающаяся для определения стационарных решений уравнения (4), гамильтонова, отсюда по аналогии с [2] следует ее полная интегрируемость; коэффициенты полинома $R(W, E)$ дают полный набор коммутирующих полиномиальных интегралов системы (3). Из коммутативности $\Lambda T = T\Lambda$ теперь получаем, что собственные функции задачи (1) будут собственными векторами матрицы Λ, и, следовательно, их координаты ψ^j будут однозначными функциями на поверхности Γ. Определим матричнозначную функцию $\Psi_i^j(x, y, P)$, $P \in \Gamma$. Пусть E отлично от точки ветвления и $\psi_1(x, E), \ldots, \psi_n(x, E)$ — соответствующие собственные функции задачи (1). Выстроим их в матрицу $\psi_i^j(x, E)$. Пусть $\varphi_i^j(x, E)$ — обратная матрица. Тогда при $P = (E, k)$, k — номер листа, положим $\Psi_i^j(x, y, P) = \psi_k^j(x, E) \cdot \varphi_i^k(y, E)$. Пусть $g_i^j(x, P) = \Psi_i^j(x, x, P)$.

Утверждение 1. *Функция* $g(x, P)$: a) *периодична по* x, b) *алгебраична на кривой* Γ, c) *является «проектором» для матрицы* $\Lambda(E, x)$, *т. е.* $g^2 = g$, *значения* g *на разных листах ортогональны*, $\mathrm{Tr}_P\, g(x, P) = 1$, $\mathrm{Tr}_P\, W \cdot g(x, P) = \Lambda(E, x)$, d) $g' = [g, Q]$, e) $\delta p(E)/\delta u_i^j = -g_i^j$.

Из пунктов c) и e) вытекает гамильтоновость систем (3). На кривой Γ прообразом точки $E = \infty$ являются n упорядоченных точек; обозначим их $\{1\}, \ldots, \{n\}$. Пусть $\Sigma = \sum_i \{i\}$; ω_i — нормированный дифференциал второго рода с дивизором $2\{i\}$; $\mathbf{V}_i$ — его вектор периодов (см. [3], [6]), $\mathbf{V} = \sum_i a_i \mathbf{V}_i$.

Утверждение 2. *Функции* $\Psi_i^j(x, y, P)$ *мероморфны на* $\Gamma \setminus \Sigma$, *имеют полюсами дивизор* D_w *точек ветвления: дивизор нулей* $\Psi_i^j(x, y, P)$ *имеет вид* $d_i(y) + d^j(x)$, $\deg d_i = \deg d^j =$ *род* Γ, *причем на многообразии Якоби* $J(\Gamma)$ *имеют место соотношения*

$$d_i(x) + d^j(x) - D_w + 2\Sigma - \{i\} - \{j\} = 0,$$

$$d_i(x) - d_i(y) = d^j(y) - d^j(x) = \mathbf{V} \cdot (x - y).$$

Теорема легко следует из написанных утверждений. Явные формулы для потенциала и временная динамика будут опубликованы в ближайшее время в подробной работе.

Замечание. Для случая $n = 2$ (нелинейное уравнение Шрёдингера и модифицированное уравнение КдФ) близкие результаты были получены другим методом А. Р. Итсом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. 1, Функц. анализ 8:3 (1974), 43—53.

[2] С. П. Новиков, Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза. 1, Функц. анализ 8:3 (1974), 54—66.

[3] Б. А. Дубровин, Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов, Функц. анализ 9:1 (1975).

[4] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Об операторах Хилла с конечным числом лакун, Функц. анализ 9:1 (1975).

[5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза и Штурма—Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией, ДАН 219:3 (1974), 19—22.

[6] Б. А. Дубровин, Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных потенциалов, Функц. анализ 9:3 (1975).

[7] П. Д. Лакс, Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны, Математика 13:5 (1969), 128—150.

Поступило в Правление общества 11 марта 1975 г.