Р. Р. Ашуров, Асимптотика спектральных функций некоторых эллиптических операторов, *Дифференц. уравнения*, 1982, том 18, номер 4, 621–625

АПРЕЛЬ 1982 г., ТОМ XVIII, № 4

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

Р. Р. АШУРОВ

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Введение. Пусть $A_0(D)$ — формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор с постоянными вещественными коэффициентами, т. е. $A_0(D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha$.

Обозначим через A_0 оператор, действующий в $L_2(R^n)$, с областью определения $C_0^\infty(R^n)$ по правилу $A_0u=A_0(D)u(x)$, $u\in C_0^\infty(R^n)$. Известно, что оператор A_0 имеет единственное самосопряженное расширение $\hat{A}_0$ в $L_2(R^n)$, спектральная функция которого имеет вид

$$\theta_0(x,\ y,\ \lambda)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{A_0(\xi)<\lambda}\exp(i\langle x-y,\ \xi\rangle)\,d\xi.$$

Здесь $A_0(\xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha\xi^\alpha$ — полный символ оператора A_0. Пусть, далее, $B(x,\ D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant l} b_\alpha(x)D^\alpha$ — произвольное симметричное дифференциальное выражение, где $b_\alpha\in C^\infty(R^n)$ такие, что $b_\alpha(x)=O(1)$ для любого $|\alpha|\leqslant l$, $l<m$. Соответствующий оператор с областью определения $C_0^\infty(R^n)$ обозначим через B.

В данной работе рассматривается эллиптический дифференциальный оператор $A=A_0+B$ и оценивается разность между спектральной функцией $\theta(x,\ y,\ \lambda)$ произвольного самосопряженного расширения $\hat{A}$ оператора A в $L_2(R^n)$ и спектральной функцией $\theta_0(x,\ y,\ \lambda)$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $l<m-\frac{n}{2}$. Тогда если $l\neq m-2n$, то при $\lambda\to\infty$ имеет место равномерная по $x,\ y\in R^n$ оценка*

$$\theta(x,\ y,\ \lambda)=\theta_0(x,\ y,\ \lambda)+O\left(\lambda^{\frac{1}{m}\left(n-\frac{m-l}{2}\right)}\right)+O(1). \quad (1)$$

В случае, когда $l=m-2n$, остаток в формуле (1) есть $O(\ln\lambda)$.

Приведем одно важное следствие из теоремы 1. Пусть Ω — произвольная область из R^n. В $L_2(\Omega)$ рассмотрим оператор $\tilde{A}$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$, действующий по правилу $\tilde{A}u=A(x,\ D)u(x)$, где $A(x,\ D)=A_0(D)+B(x,\ D)$, $u\in C_0^\infty(\Omega)$.

Обозначим через $\tilde{\theta}(x,\ y,\ \lambda)$ спектральную функцию произвольного самосопряженного расширения оператора $\tilde{A}$ в $L_2(\Omega)$. Пусть $\tilde{\theta}^s(x,\ y,\ \lambda)$ — средние Рисса порядка $s\geqslant 0$ спектральной функции $\tilde{\theta}(x,\ y,\ \lambda)$.

Следствие 1. *Пусть $l<m-n$, $0\leqslant s<\frac{n-1}{2}$, x_0 — произвольная* *внутренняя точка области Ω. Тогда существует множество положительной меры $E \subset \Omega$ такое, что выполняется неравенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{1}{m}\left(\frac{n-1}{2}-s\right)} \int_E |\tilde{\theta}^s(x_0, y, \lambda)|\, dy > 0.$$

Отметим, что для произвольного эллиптического оператора второго порядка этот результат был впервые получен В. А. Ильиным [1], а в случае $m > 2$ для операторов с постоянными коэффициентами А. К. Пулатовым [2].

§ 1. ОЦЕНКА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Всюду далее будем предполагать, что $m > n$. Обозначим символом $G(x, y; z)$ функцию Грина оператора $\hat{A} - z$, т. е. ядро резольвенты $\hat{G} = (\hat{A} - z)^{-1}$. Соответствующую оператору $\hat{A}_0$ функцию Грина обозначим через $G_0(x, y; z)$, а резольвенту оператора $\hat{A}_0$ обозначим символом $\hat{G}_0$.

Оценим разность $G(x, y; z) - G_0(x, y; z)$.

Поскольку $G_0(x, y; z) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int \dfrac{\exp(i\langle x-y, \xi\rangle)}{A_0(\xi) - z}\, d\xi$, то

$$\begin{aligned} (A(x, D) - z)\, G_0(x, y; z) &= \delta(x-y) + H(x, y; z), \\ (A(y, D) - z)\, G_0(x, y; z) &= \delta(x-y) + H'(x, y; z), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$H(x, y; z) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|\leqslant l} b_\alpha(x) \int \frac{\xi^\alpha \exp(i\langle x-y, \xi\rangle)}{A_0(\xi) - z}\, d\xi,$$

$$H'(x, y; z) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha(y) \int \frac{\xi^\alpha \exp(i\langle x-y, \xi\rangle)}{A_0(\xi) - z}\, d\xi.$$

Обозначим через $D(T)$ область определения оператора T. Пусть $\hat{H}$ и $\hat{H}'$ — интегральные операторы соответственно с ядрами $H(x, y; z)$ и $H'(x, y; z)$, причем $D(\hat{H}) = L_2(R^n)$ и $D(\hat{H}') = D(\hat{A})$. Тогда, поскольку $\hat{A}$—самосопряженныи оператор, соотношения (2) могут быть переписаны в виде $(\hat{A} - z)\hat{G}_0 = 1 + \hat{H}$, $\hat{G}_0(\hat{A} - z) = 1 + \hat{H}'$. Отсюда, так как $\hat{G} = (\hat{A} - z)^{-1}$, имеем $\hat{G}_0 = \hat{G}_0(\hat{A} - z)\hat{G} = \hat{G} + \hat{H}'\hat{G}$; $\hat{G}_0 = \hat{G}(\hat{A} - z)\hat{G}_0 = \hat{G} + \hat{G}\hat{H}$. Следовательно,

$$\hat{G} - \hat{G}_0 = -\hat{G}\hat{H} = \hat{H}'\hat{G}\hat{H} - \hat{G}_0\hat{H}. \tag{3}$$

Прежде чем переходить к оценке функций Грина, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $l < m - \dfrac{n}{2}$. Тогда для преобразования Фурье функции $F(\xi) = \dfrac{\xi^\alpha}{A_0(\xi) - z}$, $|\alpha| = l$, имеет место оценка*

$$\|\hat{F}\|_{L_2(R^n)} \leqslant C d(z)^{-1/2} |z|^{\frac{l}{m} + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где $d(z)$—расстояние до положительной оси, $C > 0$.

Буквой C далее будем обозначать положительные константы, не обязательно одни и те же.

Без ограничения общности всюду далее будет предполагаться, что $A_0(\xi) > 1$ для любого $\xi \in R^n$.

Доказательство. Из равенства Парсеваля имеем

$$\|\hat{F}\|_{L_2(R^n)} = \|F\|_{L_2(R^n)} \left(\int_1^\infty \frac{1}{|\lambda - z|^2} \, d \int_{A_0(\xi)<\lambda} |\xi^\alpha|^2 d\xi \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{m} \int_1^\infty \frac{\lambda^{\frac{1}{m}-1}}{|\lambda - z|^2} \int_{A_0(\xi)=\lambda} |\xi^\alpha|^2 d\sigma_\xi d\lambda \right)^{1/2} \leqslant C \left(\int_1^\infty \frac{\lambda^{\frac{2l+n}{m}-1}}{|\lambda - z|^2} d\lambda \right)^{1/2}, \qquad (5)$$

где $d\sigma_\xi$—элемент поверхности $\{A_0(\xi) = \lambda\}$.

Если $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ либо $\operatorname{Re} z > 0$ и $\lambda \notin \left(\frac{|z|}{2}, \, 2|z| \right)$, то $|\lambda| + |z| \leqslant \leqslant 5|\lambda - z|$. Поэтому соответствующий вклад в правую часть соотношения (5) может быть оценен величиной $C \left(\int_1^\infty \frac{\lambda^{\frac{2l+n}{m}-1}}{(\lambda + |z|)^2} d\lambda \right)^{1/2} = C' \, |z|^{\frac{n}{2m}+\frac{l}{m}-1}$, где постоянная $C' < \infty$, поскольку из условия $l < m - \frac{n}{2}$ следует сходимость интеграла. Последнее выражение меньше, чем правая часть в (5), так как $d(z) \leqslant |z|$.

Итак, остается оценить интеграл

$$I(z) = \int_{|z|/2}^{2|z|} \frac{\lambda^{\frac{2l+n}{m}-1}}{|\lambda - z|^2} d\lambda \leqslant C \, |z|^{\frac{2l+n}{m}-1} \int_{|z|/2}^{2|z|} \frac{d\lambda}{|\lambda - z|^2}$$

при $\operatorname{Re} z > 0$, так что $d(z) = |\operatorname{Im} z|$. Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda - z|^{-2} d\lambda = \pi |\operatorname{Im} z|^{-1}$, то имеем оценку $|I(z)| \leqslant C \, |z|^{\frac{2l+n}{m}-1} |\operatorname{Im} z|^{-1}$. Подставляя эту оценку в (5), получаем неравенство (4). Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следуют оценки

$$\sup_x \left(\int |G_0(x, y; z)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C d(z)^{-\frac{1}{2}} |z|^{\frac{n}{2m} - \frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

$$\sup_y \left(\int |H(x, y; z)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C d(z)^{-\frac{1}{2}} |z|^{\frac{n}{2m} + \frac{l}{m} - \frac{1}{2}}, \qquad (7)$$

$$\sup_x \left(\int |H'(x, y; z)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C d(z)^{-\frac{1}{2}} |z|^{\frac{n}{2m} + \frac{l}{m} - \frac{1}{2}}, \qquad (8)$$

где $l < m - \frac{n}{2}$.

Лемма 2. *Пусть $z \in Z_\varkappa = \{z \in C^1 \mid d(z) \geqslant |z|^\varkappa\}$, $\varkappa \geqslant \frac{l}{m}$. Тогда равномерно по x, $y \in R^n$ справедлива оценка $|G(x, y; z) - G_0(x, y; z)| \leqslant C d(z)^{-1} \times \times |z|^{\frac{n+l}{m}-1}$.*

Доказательство. Поскольку $\hat{G}$—ограниченный оператор в $L_2(R^n)$ с нормой $\|\hat{G}\| = \pi d(z)^{-1}$, то из соотношений (7) и (8) получаем следующую оценку для ядра интегрального оператора $\hat{H}' \hat{G} \hat{H}$: $|(\hat{H}' \hat{G} \hat{H})(x, y; z)| \leqslant \leqslant C d(z)^{-2} |z|^{\frac{2l+n}{m}-1}$.

Ядро интегрального оператора $\hat{G}_0 \hat{H}$ оценивается с помощью неравенства Гёльдера и соотношений (6), (7): $|(\hat{G}_0\hat{H})(x, y; z)| \leqslant Cd(z)^{-1}|z|^{\frac{n+l}{m}-1}$.

Теперь, поскольку $\varkappa \geqslant \frac{l}{m}$, утверждение леммы 2 следует из операторного равенства (3). Лемма 2 доказана.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 завершается применением к оценке, полученной в лемме 2, тауберовой теоремы Субханкулова (см. [3], гл. IV, теорема 4.1.2). Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема А. *Пусть $\psi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ — положительные возрастающие функции, определенные при $\lambda \geqslant 0$; $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) = 0$, если $0 \leqslant \lambda \leqslant a_1$, $a_1 > 0$ — постоянная, причем $\varphi(\lambda)$ дифференцируема и удовлетворяет условиям $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = \infty$ и для $\lambda > a_1$*

$$a\varphi(\lambda) < \lambda\varphi'(\lambda) < b\varphi(\lambda), \tag{9}$$

где a, b — положительные константы.

Пусть интегралы $F_1(z) = \int \frac{d\varphi(\lambda)}{\lambda - z}$, $F_2(z) = \int \frac{d\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ сходятся в области $z \in Z'_\varkappa = \{z \in C^1 \mid d(z) = |z|^\varkappa\}$, где $0 < \varkappa < 1$.

Если при $z \to \infty$ по области $Z'_\varkappa$ имеет место оценка $F_2(z) = F_1(z) + O(|z|^{-\delta})$, $\delta < 1$, то

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) + O\left(\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1-\varkappa}}\right) + O(\lambda^{1-\delta}). \tag{10}$$

Замечание 1. Утверждение теоремы остается справедливым и в случае, когда $\psi(\lambda)$ — неубывающая функция.

Действительно, поскольку функции $\tilde{\psi}(\lambda)$, $\tilde{\varphi}(\lambda)$, $\tilde{\psi}(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda) = 0$ при $\lambda \leqslant a_1$ и $\tilde{\psi}(\lambda) = \psi(\lambda) + M\lambda^\varepsilon$, $\tilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(\lambda) + M\lambda^\varepsilon$, $M > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, при $\lambda > a_1$ возрастающие и для них справедливы все требования теоремы, в частности (9) выполняется с некоторыми константами $a' \leqslant a$, $b' \geqslant b$, то для функций $\tilde{\psi}(\lambda)$ и $\tilde{\varphi}(\lambda)$, следовательно, и для функций $\psi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ имеет место оценка (10).

Замечание 2 (см. [3], замечание к гл. IV). При $\delta > 1$ оценка (9) записывается в виде $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) + O\left(\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1-\varkappa}}\right) + O(1)$. Если $\delta = 1$, то последнее слагаемое имеет вид $O(\ln \lambda)$.

Замечание 3. Если известно, что $\varphi'(\lambda) = O(\lambda^{-\nu})$, то в утверждении теоремы слагаемое $O\left(\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{1-\varkappa}}\right)$ имеет вид $O(\lambda^{\varkappa-\nu})$. Это следует из условия (9).

Из доказательства этой теоремы видно, что если функции $\varphi_\tau(\lambda)$, $\psi_\tau(\lambda)$ равномерно по параметру $\tau \in T$ удовлетворяют ее условию, то утверждение теоремы выполняется равномерно по параметру $\tau \in T$.

Пусть $P_1(z) = \int\limits_0^\infty \frac{d\theta_0(x, y, \lambda)}{\lambda - z}$ и $P_2(z) = \int\limits_0^\infty \frac{d\theta(x, y, \lambda)}{\lambda - z}$. Тогда в силу леммы 2

$$P_2(z) = P_1(z) + O(|z|^{-\delta}), \quad z \in Z'_\varkappa, \tag{11}$$

где $\delta = \varkappa + 1 - \frac{n+l}{m}$. Следовательно, $\overline{P}_2(z) = \overline{P}_1(z) + O(|z|^{-\delta})$, $P_2(\overline{z}) = P_1(\overline{z}) + O(|z|^{-\delta})$.

Положим $\psi(\lambda)=\theta(x, x, \lambda)+|\gamma|^2\theta(y, y, \lambda)+2\operatorname{Re}\gamma\theta(x, y, \lambda)$ и $\varphi(\lambda)= = \theta_0(x, x, \lambda)+|\gamma|^2\theta_0(y, y, \lambda)+2\operatorname{Re}\gamma\theta_0(x, y, \lambda)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{A_0(\xi)<\lambda}|\gamma- -\exp(i\langle x-y, \xi\rangle)|^2 d\xi$, где $\gamma\in C^1$, $|\gamma|<1$. Из последних двух оценок и из оценки (11) будем иметь

$$F_2(z)=F_1(z)+O(|z|^{-\delta}),\quad z\in Z'_\varkappa, \tag{12}$$

где $F_1(z)=\int\limits_0^\infty \frac{d\varphi(\lambda)}{\lambda-z}$, $F_2(z)=\int\limits_0^\infty \frac{d\psi(\lambda)}{\lambda-z}$ — сходящие интегралы, $m>n$.

Поскольку $\varphi(\lambda)=0$ при $\lambda\leqslant 1$, то можно положить, что $\psi(\lambda)=0$ также при $\lambda\leqslant 1$. При этом оценка (12) не изменится.

Покажем, что функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ удовлетворяют остальным требованиям теоремы А. Поскольку $\psi(\lambda)$ — неубывающая функция (см. замечание 1), а возрастающая функция $\varphi(\lambda)$ дифференцируема и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi(\lambda)=\infty$, то остается доказать справедливость неравенства (9).

Левое неравенство (9) при $|\gamma|<1$ следует из оценки

$$\varphi'(\lambda)=\frac{1}{m}\lambda^{\frac{1}{m}-1}\Big[\int\limits_{A_0(\xi)=\lambda} d\sigma_\xi(1+|\gamma|^2)+2\operatorname{Re}\gamma\int\limits_{A_0(\xi)=\lambda}\exp(i\langle x-$$

$$-y, \xi\rangle)\,d\sigma_\xi\Big]\geqslant\frac{1}{m}\lambda^{\frac{1}{m}-1}\int\limits_{A_0(\xi)=\lambda} d\sigma_\xi(1-|\gamma|)^2.$$

Поскольку $\varphi'(\lambda)=O(\lambda^{-\nu})$, $\nu=1-\frac{n}{m}$, то и правое неравенство (9) имеет место.

Таким образом, функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ удовлетворяют всем требованиям теоремы А.

Разрешая относительно $\varkappa$ и σ систему уравнений

$$\varkappa-\nu=\varkappa-1+\frac{n}{m}=\sigma,\qquad 1-\delta=-\varkappa+\frac{n+l}{m}=\sigma,$$

имеем $\varkappa=\frac{1}{2}+\frac{l}{2m}$, $\sigma=\frac{l-(m-2n)}{2m}$.

Применяя теорему А, получаем следующую оценку (в случае $\sigma\leqslant 0$ используем замечание 2) [при $l=m-2n$: $\psi(\lambda)=\varphi(\lambda)+O(\lambda^{\frac{l-(m-2n)}{2m}})+ +O(1)$; если же $l=m-2n$, то остаток имеет вид $O(\ln\lambda)$.

Теперь утверждение теоремы 1 получается варьированием γ.

Заметим, что в начале § 1 предполагали, что $m>n$. Это предположение можно снять, рассмотрев, как обычно, оператор A^k, где k — целое и $km>n$. Действительно, пусть $\theta_k(x, y, \lambda)$ — спектральная функция произвольного самосопряженного расширения оператора A^k в $L_2(R^n)$. Используя теорему 1 для функции $\theta_k(x, y, \lambda)$ и тождество $\theta_k(x, y, \lambda^k)\equiv\theta(x, y, \lambda)$, получаем оценку (1) и для функции $\theta(x, y, \lambda)$. Теорема 1 полностью доказана.

Следствие 1 с помощью теоремы 1 доказывается совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [2] для операторов с постоянными коэффициентами.

Автор глубоко благодарен Ш. А. Алимову за руководство работой.

Литература

1. Ильин В. А.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 1.
2. Пулатов А. К.— Матем. заметки, 1975, т. 18, № 6.
3. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком.— М.: Наука, 1976.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 12 февраля 1980 г.