F. A. Berezin, D. A. Leites, Supermanifolds, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, Volume 224, Number 3, 505–508

Доклады Академии наук СССР
1975. Том 224, № 3

УДК 513.015.7

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН, Д. А. ЛЕЙТЕС

СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 IV 1975)

1. В настоящей статье изучаются образования, аналогичные многообразиям, которые мы называем супермногообразиями (термин инспирирован физической литературой). Ту роль, которую в теории обычных многообразий играет коммутативная алгебра функций на многообразии, на супермногообразии берет на себя алгебра, являющаяся тензорным произведением коммутативной и внешней. Возможность построения содержательного аналога анализа, для которого элементы подобной алгебры играют роль функций, интуитивно ощущалась с момента определения интеграла по антикоммутирующим переменным и изучения его простейших свойств ([1]); в дальнейшем она подтвердилась рядом работ ([2–6]). Дополнительным стимулом изучения рассматриваемого обобщения анализа служит роль групп суперсимметрий в квантовой теории поля ([7]).

2. Пусть $U\subset R^p$ – открытое множество, $\mathcal{O}(U)$ — алгебра бесконечно дифференцируемых функций на U со значениями в поле k вещественных или комплексных чисел. Обозначим через $A(U)$ алгебру, изоморфную $\mathcal{O}(U)$, через h: $A(U)\to\mathcal{O}(U)$ – изоморфизм. Пусть $x_i\in\mathcal{O}(U)$ – координаты в U, $y_i=h^{-1}(x_i)\in A(U)$; элементы y_i являются топологическими образующими в $A(U)$. Пусть $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots, x_p)\in\mathcal{O}(U)$. Определим $\varphi(y)=$ $=\varphi(y_1,\ldots, y_p)$ согласно формуле $\varphi(y)=h^{-1}(\varphi)\in A(U)$. В силу этого определения, элементы $A(U)$ оказываются бесконечно дифференцируемыми функциями от образующих y_i. Пусть T — коммутативная алгебра. Обозначим через $\Lambda_T{}^q[\xi]$ внешнюю алгебру над T с q образующими $\xi_1,\ldots, \xi_q$.

Положим $\mathfrak{A}_{p,q}(U)=\Lambda^q_{A(U)}[\xi]$. Алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ является, таким образом, алгеброй с p коммутирующими образующими y_i и q антикоммутирующими образующими ξ_j. Введем в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ Z_2-градуировку g (четность), положив $g(y_i)=0$, $g(\xi_i)=1$. В дальнейшем всегда четные образующие будем обозначать латинскими буквами, нечетные – греческими. Элементы $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ по аналогии с функциями будем записывать в виде

$$f(y,\xi)=\sum f^{i_1,\ldots,i_k}(y)\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}. \qquad (1)$$

Пусть M – гладкое многообразие размерности p. Предположим, что:

1) каждой координатной окрестности $U\subset M$ сопоставлена алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$;

2) существует гомоморфизм h_U: $\mathfrak{A}_{p,q}(U)\to\Lambda^q_{\mathcal{O}(U)}[\xi]$, обладающий тем свойством, что $h_U(y_i)=x_i$, $h_U(\xi_i)=\xi_i$;

3) если $U\subset V$, то существует сохраняющий градуировку эпиморфизм $\rho_V{}^U$: $\mathfrak{A}_{p,q}(U)\to\mathfrak{A}_{p,q}(V)$, причем если $f\in\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, то $(h_U(f))(x,\xi)=$ $=(h_V(\rho_V{}^Uf))(x,\xi)$ при $x\in V$;

4) совокупность $\{\mathfrak{A}_{p,q}(U), \rho_V{}^U\}$ алгебр и отображений образует пучок, обозначим этот пучок через $\mathcal{O}_M{}^q$. Очевидно, что пучок $\mathcal{O}_M{}^0$ изоморфен пучку гладких функций на M.

Определение 1. Окольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_M{}^q)$ называется супермногообразием (с.м.).

Алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(U)=\Gamma(U, \mathcal{O}_M{}^q)$ является алгеброй локальных сечений пучка $\mathcal{O}_M{}^q$. Она является аналогом алгебры гладких функций, определенных в координатной окрестности обычного многообразия. Алгебра глобальных сечений $\Gamma(M, \mathcal{O}_M{}^q)$ является аналогом алгебры всех гладких функций на обычном многообразии.

Пусть $M'\subset M$ — подмногообразие размерности $p'\leqslant p$.

Координатную окрестность $U\subset M$ назовем достаточно мелкой, если либо $U'=U\cap M'$ является координатной окрестностью в M', либо $U'=\varnothing$.

Определение 2. С.м. $(M', \mathcal{O}_{M'}{}^{q'})$ называется подсупермногообразием (п.с.м.) супермногообразия $(M, \mathcal{O}^q)$, если для каждой достаточно мелкой координатной окрестности $U\subset M$ существует эпиморфизм

$$t_U\colon \mathcal{O}_{p,q}(U)\to\mathfrak{A}_{p',q'}(U'),\qquad U'=U\cap M',$$

причем $t_V\rho_V{}^U=\rho'_{V'}{}^{U'}t_U$, где $V\subset U$, $V'=V\cap M'$, $\rho_V{}^U$, $\rho'_{V'}{}^{U'}$ отображения ограничения пучков $\mathcal{O}_M{}^q$ и $\mathcal{O}_{M'}{}^{q'}$ соответственно.

Определение 3. Морфизмами супермногообразий называются морфизмы окольцованных пространств $(M, \mathcal{O}^q)$.

Определение 4. Произведением супермногообразий $(M_i, \mathcal{O}_{M\,i}{}^{q_i})$, $i=1, 2$, называется супермногообразие $(M_1\times M_2, \mathcal{O}_{M_1}{}^{q_1}\otimes\mathcal{O}_{M_2}{}^{q_2})$ ($\mathcal{O}_{M_1}{}^{q_1}\otimes\mathcal{O}_{M_2}{}^{q_2}$ определяется с использованием градуированного произведения градуированных алгебр).

Пусть U_1, $U_2\subset M$ — координатные окрестности, причем $U_{12}=U_1\cap U_2\neq\varnothing$. Выберем в алгебрах $\mathfrak{A}_{p,q}(U_1)$ и $\mathfrak{A}_{p,q}(U_2)$ образующие x_i, ξ_j и y_i, η_j соответственно; их образы в $\mathfrak{A}_{p,q}(U_{12})$ при гомоморфизмах вложения $\rho_{U_{12}}^{U_1}$ и $\rho_{U_{12}}^{U_2}$ обозначим прежними буквами. Ввиду того, что $\rho_{U_{12}}^{U_1}\mathfrak{A}_{p,q}(U_1)=\rho_{U_{12}}^{U_2}\mathfrak{A}_{p,q}(U_2)=$ $=\mathfrak{A}_{p,q}(U_{12})$, как элементы x_i, ξ_j, так и y_i, η_j служат образующими в $\mathfrak{A}_{p,q}(U_{12})$. Следовательно, одни из них выражаются через другие:

$$x_i=\sum_{k\geqslant0}\sum_{i_1<\ldots<i_{2k}} f_i^{i_1,\ldots,i_{2k}}(y)\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_{2k}}$$

$$\xi_j=\sum_{k\geqslant0}\sum_{j_1<\ldots<j_{2k+1}} \varphi_j^{j_1,\ldots,j_{2k+1}}(y)\eta_{j_1}\ldots\eta_{j_{2k+1}}.\tag{2}$$

Соотношения (2) являются аналогом координатного преобразования в обычной теории многообразий.

3. Пусть (x, ξ), (y, η) — две системы образующих в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, связанные соотношением (2).

Определение 5. Величина $\rho(x, \xi)\in\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, зависящая от выбора системы образующих, называется локальной плотностью над U, если

$$\rho(x, \xi)=\rho(y, \eta)\,\det(A-BD^{-1}C)\,\det D^{-1},\tag{3}$$

где

$$A=\left\|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right\|,\quad B=\left\|x_i\frac{\partial}{\eta_k}\right\|,\quad C=\left\|\frac{\partial\xi_m}{\partial y_j}\right\|,\quad D=\left\|\frac{\partial\xi_m}{\partial\eta_k}\right\|$$

($x_i\,\partial/\partial\eta_k$ — правая производная). Совокупность локальных плотностей над U обозначим через $\mathfrak{D}_{p,q}(U)$. Очевидно, что $\mathfrak{D}_{p,q}(U)$ является модулем над $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$. К плотностям применимы отображения ограничения $\rho_V{}^U$, порождающие пучок $\mathcal{O}^q$. Совокупность плотностей вместе с отображениями $\rho_V{}^U$ образует пучок, который мы обозначим через $\mathcal{D}_M{}^q$. Элементы $\mathfrak{D}_{p,q}(U)$ служат его локальными сечениями; его глобальные сечения будем называть глобальными плотностями.

Пусть (y, ξ) — образующие в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, $x_i=h(y_i)$ — координаты в U, $\rho(y, \xi)\in\mathfrak{D}_{p,q}(U)$, $\mu(x, \xi)=(h\rho)(x, \xi)\in\Lambda_{\mathfrak{G}}[\xi]$. Положим

$$\int \rho(y, \xi)\,dy\,d\xi=\int \mu(x, \xi)\,dx_1\ldots dx_p\,d\xi_q\ldots d\xi_1. \tag{4}$$

Интеграл по dx в правой части (4) понимается в обычном смысле, по $d\xi$ — в смысле работы ([1]). Для глобальной плотности определим интеграл по $dy\,d\xi$ с помощью разбиения единицы и последующего сведения к локальной плотности.

Теорема 1. *Интеграл (4) не зависит от выбора системы образующих в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$. Интеграл от глобальной плотности не зависит от выбора разбиения единицы.*

4. Пусть $\Sigma=\{f_i, \varphi_i\}\subset\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbf{R}^p)$ — конечная совокупность элементов, причем $g(f_i)=0$, $g(\varphi_i)=1$. Множество Σ порождает в $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbf{R}^q)$ двусторонний идеал $I(\Sigma)$. Пусть y_i — четные образующие в $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbf{R}^p)$, $x_i=h(y_i)$ — координаты в $\mathbf{R}^p$. Обозначим через M_Σ множество решений системы уравнений $f_i(x, 0)=0$. Рассмотрим матрицы частных производных $A(x, \xi)=\|\partial f_i/\partial x_j\|$, $D(x, \xi)=\|\partial\varphi_m/\partial\xi_k\|$.— Систему Σ назовем невырожденной, если $M_\Sigma\neq\phi$ и ранги матриц $A(x, 0)$ и $D(x, 0)$ не зависят от x при $x\in M_\Sigma$. Отметим, что в этом случае M_Σ является многообразием размерности $p-\alpha$, где $\alpha=\operatorname{rank} A(x, 0)$.

Теорема 2. *Если система Σ невырождена, то фактор-алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbf{R}^p)/I(\Sigma)$ изоморфна алгебре глобальных сечений на некотором с.м. $(M_\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\beta)$, причем $\beta=q-q_1$, $q_1=\operatorname{rank} D(x, 0)$. Алгебра, растущая над точкой $x\in M_\Sigma$, является локализацией $\mathfrak{A}_{p,q}(\mathbf{R}^p)/I(\Sigma)$ по простому идеалу, порожденному точкой $x\in M_\Sigma$.*

О с.м. $(M_\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\beta)$ естественно говорить, что оно выделяется уравнениями $f_i(x, \xi)=0$, $\varphi_j(x, \xi)=0$. По-видимому, всякое с.м. может быть получено таким образом.

5. Определение 6. Супергруппой Ли называется групповой объект в категории супермногообразий.

Теорема 3. *Если с.м. $(M, \mathcal{O}^q)$ является супергруппой Ли, то M является группой Ли, $\mathcal{O}^q\simeq\mathcal{O}_M{}^0\otimes\Lambda[\xi_1, \ldots, \xi_q]$.*

Положим для краткости $\mathfrak{A}=\Gamma(M, \mathcal{O}^q)$.

Теорема 4. *С.м. $(M, \mathcal{O}^q)$ тогда и только тогда является супергруппой Ли, когда существуют отображения*

$$\varphi\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A},\quad \eta\colon k\to\mathfrak{A},\quad \varepsilon\colon \mathfrak{A}\to k,\quad 0\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A},\quad \varepsilon\eta=I,$$

причем η является мономорфизмом, ε — эпиморфизмом и о — изоморфизмом и следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A} \arrow[dr, "I\otimes\varphi"] & \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A} \\
 & \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A} \arrow[ur, "\varphi\otimes I"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "I"'] & \\
 & \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A} \arrow[dl, "I\otimes\varepsilon"] \\
\mathfrak{A} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A} \arrow[rr, "I\otimes o"] & & \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A} \arrow[d, "d"] \\
\mathfrak{A} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varepsilon"] & k \arrow[r, "\eta"] & \mathfrak{A}
\end{tikzcd}
\tag{5}$$

здесь d — умножение в $\mathfrak{A}$, I — тождественное отображение.

Супералгеброй Ли будем называть $\mathbf{Z}_2$-градуированную алгебру Ли в смысле работ ([8], [4]).

Пусть $(G, \mathcal{O}^q)$ — супергруппа Ли, $\mathfrak{A}_0$ — стебель пучка $\mathcal{O}^q$ в единице G. $\hat{\mathfrak{A}}_0$ является алгеброй формальных степенных рядов от p коммутирующих и q антикоммутирующих образующих. Отображения φ, ε, η, d, о, участвующие в формулировке теоремы 4, естественным образом продолжаются до соответствующих отображений $\hat{\mathfrak{A}}_0$. Сохраним за этими отображениями прежние обозначения.

Теорема 5. *Алгебра* $\hat{\mathfrak{A}}_0$ *совместно с отображениями* φ, ε, d, η, о *образует формальную супергруппу Ли в смысле работы* ([4]).

В ([4]) построен алгоритм, связывающий формальные супергруппы Ли и супералгебры Ли.

Таким образом, теорема 5 позволяет сопоставить каждой супергруппе Ли $(G, \mathcal{O}^q)$ супералгебру Ли $\mathfrak{G}$; супералгебру Ли $\mathfrak{G}$ мы будем называть супералгеброй Ли группы $(G, \mathcal{O}^q)$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *супералгебра Ли. Существует семейство* $(G_n, \mathcal{O}^q)$ *супергрупп Ли, имеющих* $\mathfrak{G}$ *своей супералгеброй, причем*: 1) *группы* G_n *локально изоморфны между собой*, 2) *супергруппа* $(G_n, \mathcal{O}^q)$ *однозначно определяется группой* G_n.

Пусть $(M, \mathcal{O}_M{}^q)$ — произвольное с.м.

Определение 7. Линейный оператор L в $\Gamma(M, \mathcal{O}_M{}^q)$ называется левым обобщенным дифференцированием степени $g(L)$, если для однородных a, $b \in \Gamma(M, \mathcal{O}_M{}^q)$

$$L(ab) = L(a)\,b + (-1)^{g(L)g(a)} + aL(b).$$

Аналогично определяется правое обобщенное дифференцирование:

$$L(ab) = L(a)\,b(-1)^{g(L)g(b)} + aL(b).$$

Как левые, так и правые обобщенные дифференцирования образуют супералгебру Ли относительно операции

$$[L_1, L_2] = L_1L_2 - (-1)^{g(L_1)g(L_2)}L_2L_1. \qquad (6)$$

Если с.м. является супергруппой, введем дополнительные определения.

Определение 8. Обобщенное дифференцирование L (правое или левое, безразлично) называется право- или левоинвариантным, если соответственно $\varphi(Lf) = L \otimes I(\varphi f)$ или $\varphi(Lf) = I \otimes L(\varphi f)$, где φ — отображение, участвующее в формулировке теоремы 4, $f \in \mathfrak{A}$.

Теорема 7. *Левые правоинвариантные и правые левоинвариантные обобщенные дифференцирования на супергруппе* $(G, \mathcal{O}^q)$ *образуют супералгебры Ли относительно операции* (6). *Эти супералгебры изоморфны между собой и изоморфны супералгебре Ли супергруппы* $(G, \mathcal{O}^q)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. А. Березин*, ДАН, т. 137, № 2, 311 (1961). [2] *Ф. А. Березин*, Метод вторичного квантовая «Наука», 1965. [3] *Ф. А. Березин*, Математические заметки, т. 1, в. 3, 269 (1967). [4] *Ф. А. Березин, Г. И. Кац*, Математич. сб., т. 82, № 3, 343 (1970). [5] *В. Ф. Пахомов*, Математические заметки, т. 16, в. 1, 65 (1974). [6] *Д. А. Лейтес*, УМН, т. 29, в. 3, 209 (1974). [7] *J. Wess, B. Zumino*, Nucl. Phys., Ser. B, v. 24, 39 (1974). [8] *J. W. Milvor, J. C. Moore*, Ann. Math. (2), v. 81, 211 (1965).