А. А. Фонарёв, О решении нелинейных уравнений с монотонными отображениями в гильбертовом пространстве, *Дифференц. уравнения*, 1981, том 17, номер 2, 366–372

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФЕВРАЛЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 2

УДК 519.624/632

А. А. ФОНАРЕВ

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается ИП (итерационный процесс), сходящийся к решению нелинейного уравнения с монотонным отображением в гильбертовом пространстве. Отдельно рассматривается проекционный вариант ИП, сочетающий ИП и метод Галеркина.

Приводятся приложения к двухточечной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка и к эллиптическому уравнению второго порядка.

В рассматриваемом ИП сходимость к решению осуществляется при любом начальном приближении без требования принадлежности начального приближения некоторой окрестности решения (см. [1]).

При конструировании ИП использовался ИП для нахождения неподвижных точек из [2].

Пусть далее H — гильбертово пространство.

Определение 1. Отображение F из H в H демикомпактно относительно нуля (см. [3]), если из $Fx_i \to 0$ и ограниченности последовательности $\{x_i\}$ следует, что из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение 2. Отображение F из H в H удовлетворяет условию α_0) (см. [4]), если из $\lim \operatorname{Re}(Fx_i,\ x_i - x_0) \leqslant 0$ $(i \to \infty)$ и слабых сходимостей Fx_i и x_i к нулю и x_0 соответственно следует, что $x_i \to x_0$.

Отметим, что если отображение F из H в H удовлетворяет условию α_0), то оно демикомпактно относительно нуля.

Определение 3. Отображение F из H в H называется непрерывным по Липшицу для ограниченных аргументов (см. [5, с. 51]), если для любого $r > 0$ существует такая константа $M(r)$, что $\|Fx - Fy\| \leqslant M(r)\|x - y\|$ для всех $x,\ y \in D_r = \{x \in H\colon \|x\| \leqslant r\}$.

Заметим, что непрерывность отображения по Липшицу для ограниченных аргументов и условие α_0) являются важными свойствами нелинейных краевых задач (см. [4; 5, гл. 4]), выполняющимися во многих случаях.

Для отображения F из H в H рассмотрим уравнение

$$Fx = 0 \quad (x \in H). \tag{1}$$

1. ИП в H. Для отображения F из H в H рассмотрим ИП

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \alpha_i F y_i, \\ y_i &= x_i - \beta_i F x_i \end{aligned} \tag{2}$$

($i = 1, 2, \ldots$; числа α_i и β_i задаются ниже), начатый с любой точки $x_1 \in H$.

Теорема 1. *Пусть: 1) отображение* $F: H \to H$ *ограниченное, деминепрерывное (т. е. переводящее сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся) и демикомпактное относительно нуля; 2)* $0 \leqslant \operatorname{Re}(Fx - Fy, x - y) \leqslant M(r)\|x - y\|^2$ *для всех* $x, y \in D_r$, *где* $M(r)$ — *положительная неубывающая функция, заданная для* $r \geqslant 0$; *3) уравнение (1) имеет (возможно, неединственное) решение. Тогда для любых чисел* $\delta, \gamma, \delta', \gamma'$ *таких, что* $\delta \geqslant \gamma \geqslant 0$, $\delta' \geqslant \gamma' \geqslant 0$, *и последовательностей положительных чисел* $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_i'\}$ *таких, что ряд* $\sum \alpha_i' \beta_i'$ *расходится, ряды* $\sum (\alpha_i')^2$ *и* $\sum \alpha_i' \times (\beta_i')^2$ *сходятся, ИП (2)* ($\alpha_i = \alpha_i'/a_i$, $c_i + \delta \geqslant a_i \geqslant c_i + \gamma$, $c_i = \|Fy_i\| + M(r_i)$, $r_i = \max(\|x_i\|, \|y_i\|)$, $\beta_i = \beta_i'/b_i$, $\|Fx_i\| + \delta' \geqslant b_i \geqslant \|Fx_i\| + \gamma'$) *сходится к решению уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $Fx_0 = 0$. Взяв $x_1 \in H$, для последовательности $\{x_i\}$, определяемой ИП (2), имеем

$$\|x_{i+m} - x_0\|^2 \leqslant \|x_i - x_0\|^2 - 2 \sum_{n=i}^{i+m-1} \alpha_n \beta_n \|Fx_n\|^2 + $$
$$+ 2 \sum_{n=i}^{i+m-1} \alpha_n \beta_n^2 M(r_n) \|Fx_n\|^2 + \sum_{n=i}^{i+m-1} \alpha_n^2 \|Fy_n\|^2 \tag{3}$$

($i = 1, 2, \ldots; m \geqslant 1$).

Из неравенств (3) и выбора последовательностей $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ получим, что

$$\|x_{i+1} - x_0\|^2 \leqslant \|x_1 - x_0\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' (\beta_i')^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i')^2 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

что влечет ограниченность последовательности $\{x_i\}$. Далее, из неравенств (3), используя неравенства для последовательностей $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и ограниченность отображения F, имеем

$$b \sum_{n=1}^{i} \alpha_n' \beta_n' \|Fx_n\|^2 \leqslant \|x_1 - x_0\|^2 + \|x_{i+1} - x_0\|^2 + $$
$$+ 2 \sum_{n=1}^{i} \alpha_n' (\beta_n')^2 + \sum_{n=1}^{i} (\alpha_n')^2 \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где постоянная $b > 0$ не зависит от i. Из ограниченности правых частей неравенств (4) константой, не зависящей от i, следует, что из последовательности $\{Fx_i\}$ можно выделить подпоследовательность $\{Fx_{i_k}\}$, сходящуюся к нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_{i_k} \to x_0'$, что влечет $Fx_0' = 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер i_k, что $\|x_{i_k} - x_0'\|^2 < \varepsilon^2/3$, $\sum_{n=i_k}^{\infty} \alpha_n' (\beta_n')^2 < \varepsilon^2/6$, $\sum_{n=i_k}^{\infty} (\alpha_n')^2 < \varepsilon^2/3$. Тогда из (3) следует, что $\|x_{i_k+m} - x_0\| < \varepsilon$ для любого $m \geqslant 1$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть: 1) выполнены условия 1, 3 теоремы 1; 2)* $0 \leqslant \operatorname{Re}(Fx - Fy, x - y) \leqslant M\|x - y\|^2$ *для всех* $x, y \in H$ *(постоянная* $M > 0$*). Тогда для любых чисел* δ, γ *таких, что* $\delta \geqslant \gamma \geqslant 0$, *и последовательностей положительных чисел* $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_i\}$ *таких, что ряд* $\sum \alpha_i' \beta_i$ *расходится, ряд* $\sum (\alpha_i')^2$ *сходится и* $\beta_i \to 0$, *ИП (2)* ($\alpha_i = \alpha_i'/a_i$, $\|Fy_i\| + \delta \geqslant a_i \geqslant \|Fy_i\| + \gamma$) *сходится к решению уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $Fx_0=0$. Взяв $x_1 \in H$, для последовательности $\{x_i\}$ ИП (2) имеем неравенства

$$\|x_{i+m}-x_0\|^2 \leqslant \|x_i-x_0\|^2 - 2\sum_{n=i}^{i+m-1} \alpha_n\beta_n(1-\beta_n M)\|Fx_n\|^2 +$$

$$+\sum_{n=i}^{i+m-1} \alpha_n^2\|Fy_n\|^2 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots;\ m\geqslant 1).$$

И далее доказательство теоремы 2 такое же, как доказательство теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В теореме 2 можно взять последовательности положительных чисел $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_i\}$ такие, что ряд $\sum \alpha_i'$ расходится, ряд $\sum (\alpha_i')^2$ сходится, а $\beta_i=\beta\ (i=1,\ 2,\ \ldots)$, где постоянная β такая, что $\beta<1/M$.

Теорема 3. *Пусть: 1) отображение $F: H\to H$ демикомпактное относительно нуля и* $\mathrm{Re}(Fx-Fy,\ x-y)\geqslant 0$ *для всех x, $y\in H$; 2) $\|Fx-Fy\|\leqslant M\|x-y\|$ для всех x, $y\in H$ (постоянная $M>0$); 3) выполнено условие 3 теоремы 1. Тогда для любых последовательностей положительных чисел $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ таких, что ряд $\sum\alpha_i\beta_i$ расходится, ряд $\sum\alpha_i^2$ сходится и $\beta_i\to 0$, ИП (2) сходится к решению уравнения (1).*

Для доказательства теоремы 3 отметим, что существует такой номер N, что для последовательности ИП (2) и точки $x_0\in H$ такой, что $Fx_0=0$, имеем

$$\|x_{n+k}-x_0\|^2 \leqslant \|x_n-x_0\|^2 \exp\Big(M^2\sum_{i=n}^{n+k-1}\alpha_i^2\Big) -$$

$$-\sum_{i=n}^{n+k-1}\alpha_i\beta_i\|Fx_i\|^2$$

для всех $n\geqslant N$ и $k\geqslant 1$.

К теореме 3 справедливо замечание, аналогичное замечанию 1 к теореме 2.

2. Проекционный вариант ИП. Пусть $\{H_i\}$ — такая последовательность подпространств H, что $H_i\subseteq H_{i+1}$ для $i=1,\ 2,\ \ldots$, а $\{P_i\}$ — последовательность операторов ортогонального проектирования H на H_i для $i=1,\ 2,\ \ldots$ и $P_i x\to x$ для любого $x\in H$.

Для отображения F из H в H рассмотрим ИП

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i-\alpha_i P_{i+1}Fy_i,\\ y_i &= x_i-\beta_i P_{i+1}Fx_i \end{aligned} \tag{5}$$

($i=1,\ 2,\ \ldots$; числа α_i и β_i задаются ниже), начатый с любой точки $x_1\in H_1$.

Теорема 4. *Пусть: 1) отображение $F: H\to H$ ограниченное, деминепрерывное и удовлетворяет условию α_0); 2) выполнены условия 2, 3 теоремы 1; 3) существует такое число $\eta>0$, что для любого решения x_0 уравнения (1) существует постоянная $C=C(x_0)$ такая, что $\|P_{i+1}x_0-x_0\|\leqslant Ci^{-\eta}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$. Тогда для любых чисел δ, γ, δ', γ' таких, что $\delta\geqslant\gamma\geqslant 0$, $\delta'\geqslant\gamma'>0$, и последовательностей $\alpha_i'=i^{-\alpha}$ с α таким, что $1/2<\alpha<1$ и $\alpha+\eta>1$, $\beta_i'=i^{-\beta}$ с β таким, что $\alpha+\beta\leqslant 1$ и $\alpha+2\beta>1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$, ИП (5) ($\alpha_i=\alpha_i'/a_i$, $c_i+\delta\geqslant a_i\geqslant c_i+\gamma$, $c_i=$*

$= \|Fy_i\| + M(r_i)$, $r_i = \max(\|x_i\|, \|y_i\|)$, $\beta_i = \beta_i'/b_i$, $\|P_{i+1}Fx_i\| + \delta' \geqslant b_i \geqslant \|P_{i+1}Fx_i\| + \gamma'$) *сходится к решению уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $Fx_0 = 0$. Взяв $x_1 \in H_1$, для последовательности $\{x_i\}$, определяемой ИП (5), имеем

$$\|x_{i+1} - x_0\|^2 \leqslant \|x_i - x_0\|^2 - 2\alpha_i\beta_i\| P_{i+1}Fx_i\|^2 + $$
$$+ 2\alpha_i\beta_i^2 M(r_i)\| P_{i+1}Fx_i \|^2 + \alpha_i^2 \|P_{i+1}Fy_i\|^2 +$$
$$+ 2\alpha_i C(x_0) i^{-\eta} \|Fy_i\| \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1, показывается, что последовательность $\{x_i\}$ ограничена. Далее, из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$, что $P_{i_k+1} Fx_{i_k} \to 0$ и $x_{i_k} \to x_0'$, $Fx_0' = 0$. И далее доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 1. Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Если в теореме 4 условие 3 заменить на такое: существует последовательность положительных чисел $\{\gamma_i\}$ такая, что для любого решения x_0 уравнения (1) существует такая постоянная $C = C(x_0)$, что $\|x_0 - P_{i+1}x_0\| \leqslant C\gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots)$, и для этой последовательности $\{\gamma_i\}$ существуют такие последовательности положительных чисел $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_i'\}$, что ряды $\sum(\alpha_i')^2$, $\sum\alpha_i'\gamma_i$ и $\sum\alpha_i'(\beta_i')^2$ сходятся, ряд $\sum\alpha_i'\beta_i'$ расходится, то ИП (5) с α_i и β_i такими же, как в теореме 4, сходится к решению уравнения (1).

Отметим, что аналогичное замечание справедливо для теорем, формулируемых ниже в п. 2.

Теорема 5. *Пусть выполнены: 1) условие 1 теоремы 4; 2) условие 2 теоремы 2; 3) условия 3 теоремы 1 и 3 теоремы 4. Тогда для любых чисел* δ, γ *таких, что* $\delta \geqslant \gamma \geqslant 0$, *и последовательностей* $\alpha_i' = i^{-\alpha}$ *с* α *таким, что* $1/2 < \alpha < 1$ *и* $\alpha + \eta > 1$, $\beta_i = i^{-\beta}$ *с* β *таким, что* $\beta > 0$ *и* $\alpha + \beta \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \dots)$, *ИП (5)* ($\alpha_i = \alpha_i'/a_i$, $\|Fy_i\| + \delta \geqslant a_i \geqslant \|Fy_i\| + \gamma$) *сходится к решению уравнения (1).*

Замечание 3. В теореме 5 можно взять последовательности $\{\alpha_i'\}$ и $\{\beta_i\}$ такие, что $\alpha_i' = i^{-\alpha}$ с α таким, что $1/2 < \alpha \leqslant 1$, а $\beta_i = \beta$ $(i = 1, 2, \dots)$, где постоянная $\beta > 0$ такая, что $\beta < 1/M$ $(\alpha + \eta > 1)$.

Теорема 6. *Пусть: 1) отображение* $F: H \to H$ *удовлетворяет условию* α_0) *и* $\mathrm{Re}(Fx - Fy, x - y) \geqslant 0$ *для всех* x, $y \in H$; *2) отображение* F *непрерывно по Липшицу для ограниченных аргументов; 3) выполнены условия 3 теоремы 1 и 3 теоремы 4. Тогда для любых чисел* δ, γ, δ', γ' *таких, что* $\delta \geqslant \gamma > 0$, $\delta' \geqslant \gamma' > 0$, *и последовательностей* $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_i'\}$ *таких же, как в теореме 4, ИП (5)* ($\alpha_i = \alpha_i'/a_i$, $c_i + \delta \geqslant a_i \geqslant c_i + \gamma$, $c_i = \|P_{i+1}Fy_i\| + \|y_i\| + M(r_i)$, $r_i = \max(\|x_i\|, \|y_i\|)$, $\beta_i = \beta_i'/b_i$, $\|P_{i+1}Fx_i\| + \delta' \geqslant b_i \geqslant \|P_{i+1}Fx_i\| + \gamma'$) *сходится к решению уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $Fx_0 = 0$. Взяв $x_1 \in H_1$, для последовательности $\{x_i\}$, определяемой ИП (5), имеем

$$\|x_{i+1} - x_0\|^2 \leqslant \|x_i - x_0\|^2 - 2\alpha_i\beta_i \|P_{i+1}Fx_i\|^2 +$$
$$+ 2\alpha_i\beta_i^2 M(r_i)\| P_{i+1}Fx_i \|^2 + \alpha_i^2 \|P_{i+1}Fy_i\|^2 + \theta_i,$$

где $\theta_i = 2\alpha_i \|y_i - P_{i+1}x_0\| \cdot \|FP_{i+1}x_0 - Fx_0\|$ и $\theta_i \leqslant K\alpha_i' i^{-\eta}$ $(i = 1, 2, \dots)$ с постоянной $K > 0$, зависящей от x_0 и не зависящей от i. Далее доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 4. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Пусть выполнены: 1) условие 1 теоремы 6; 2) условие 2 теоремы 3; 3) условия 3 теоремы 1 и 3 теоремы 4. Тогда для любых чисел* δ *и* γ *таких, что* $\delta \geqslant \gamma > 0$, *и последовательностей* $\{\alpha_i'\}$, $\{\beta_i\}$ *таких же, как в теореме 5, ИП (5)* ($\alpha_i = \alpha_i' / a_i$, $c_i + \delta \geqslant a_i \geqslant c_i + \gamma$, $c_i = \|P_{i+1} F y_i\| + \|y_i\|$) *сходится к решению уравнения (1).*

К теореме 7 справедливо замечание, аналогичное замечанию 3 к теореме 5.

3. Двухточечная краевая задача. В связи с двухточечной краевой задачей будем рассматривать, применяя обозначения из [6], пространства $\mathring{W}_2^1(0, \pi)$, $C([0, \pi])$, $C^1([0, \pi])$, $C^{1/2}([0, \pi])$. В пространстве $\mathring{W}_2^1(0, \pi)$, которое будет далее обозначаться через V, в качестве скалярного произведения возьмем $(u, v) = \int u'(x) v'(x)\, dx$ для $u(x)$, $v(x) \in V$ (в п. 3 пределы интегрирования 0 и π опускаются).

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}(u(x)) = f(x, u(x)) + h(x), \tag{6}$$

$$u(0) = u(\pi) = 0, \tag{7}$$

где $\mathcal{L}(u(x)) \equiv -(a_1(x) u'(x))' + a_0(x) u(x)$, а $h(x) \in C([0, \pi])$.

Предположим, что выполнены условия:

I. Функции $a_1(x) \in C^1([0, \pi])$, $a_0(x) \in C([0, \pi])$, $a_1(x) \geqslant k_1 > 0$ и $a_0(x) \geqslant -k_0$ для всех $x \in (0, \pi)$, где $k_0 \geqslant 0$. Причем $k_2 = k_1 - k_0 > 0$. Вещественнозначная функция $f(x, u)$ непрерывна на $[0, \pi] \times R$ (R — вещественная прямая) и такая, что $(f(x, u) - f(x, v))/(u - v) \leqslant \lambda$ для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $u, v \in R$, $u \neq v$, $f(x, u)/u \leqslant \theta < \lambda$ для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $u \in R$, $u \neq 0$, где λ — константа, определенная в [7, с. 686].

II. Существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x, u) - f(x, v)| \leqslant M |u - v|$ для всех $x \in [0, \pi]$ и $u, v \in R$.

Определим отображение $A: V \to V$ следующим образом:

$$(Au, v) = B(u, v) \equiv \int [a_1(x) u'(x) v'(x) + a_0(x) u(x) v(x) - f(x, u(x)) v(x) - h(x) v(x)]\, dx \text{ для } u, v \in V.$$

Возьмем в пространстве V ортонормированный базис $\varphi_i(x) = (2/\pi)^{1/2} \times (\sin ix)/i$ ($i = 1, 2, \ldots$). И пусть ${}_i u = \sum_{n=1}^{i} (u, \varphi_n) \varphi_n$ для $u \in V$ ($i = 1, 2, \ldots$), т. е. P_i проектирует V на подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$.

Можно показать, что для отображения A выполнены все условия теоремы 7, причем условие 3 теоремы 4 выполнено с $\eta = 1$. Следовательно, справедлива

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* I, II. *Тогда в пространстве* V *для нахождения решения уравнения* $Au = 0$ *применима теорема 7. И в данном случае можно взять* $\alpha_i' = i^{-\alpha}$ *с* α *таким, что* $1/2 < \alpha < 1$, $\beta_i = i^{-\beta}$ *с* β *таким, что* $\beta > 0$ *и* $\alpha + \beta \leqslant 1$ ($i = 1, 2, \ldots$), *причем формулы ИП (5) и* c_i *имеют вид*

$$u_{i+1} = u_i - \alpha_i \sum_{n=1}^{i+1} B(v_i, \varphi_n) \varphi_n,$$

$$v_i = u_i - \beta_i \sum_{n=1}^{i+1} B(u_i, \varphi_n) \varphi_n,$$

$$u_i = \sum_{n=1}^{i} \xi_n^i \varphi_n, \quad c_i = \left\{ \sum_{n=1}^{i+1} [B(v_i, \varphi_n)]^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ \{[\beta_i B(u_i, \varphi_{i+1})]^2 + \sum_{n=1}^{i} [\xi_n^i + \beta_i B(u_i, \varphi_n)]^2\}^{1/2}$$

$(i = 1, 2, \ldots)$, $u_1 = \xi_1^1 \varphi_1(x)$, *где* $\xi_1^1 \in R$ *(т. е. в данном случае ИП можно начать с любого числа* $\xi_1^1 \in R$*).*

Заменим условие II на более слабое условие:

III. Существует такая постоянная $M > 0$, что $(f(x, u) - f(x, v))/(u - v) \geqslant -M$ для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $u, v \in R$, $u \neq v$.

Если выполнены условия I, III, то выполнены все условия теоремы 5 и справедлива

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* I, III. *Тогда в пространстве* V *для нахождения решения уравнения* $Au = 0$ *применима теорема 5, причем* α_i', β_i *можно взять такие же, как в теореме 8.*

Замечание 4. Решение уравнения $Au = 0$ $(u \in V)$ является обобщенным решением задачи (6), (7), которое в свою очередь является классическим решением задачи (6), (7).

Замечание 5. Сходимость ИП теоремы 8 (соответственно 9) в V обеспечивает сходимость этого процесса в $C^{1/2}([0, \pi])$.

4. Эллиптическое уравнение второго порядка. Пусть Q — ограниченная область n-мерного евклидова пространства R_n с границей ∂Q, состоящей из конечного числа непересекающихся $(n-1)$-мерных поверхностей (класса C^1). Здесь и далее применяются обозначения из [8], причем далее все рассматриваемые функции являются вещественнозначными.

Рассмотрим в Q эллиптическое уравнение $\mathcal{L}u \equiv \operatorname{div}(p(x)\nabla u) = f(x, u)$, где $p(x) \in C^1(\overline{Q})$ и $p(x) \geqslant p_0 > 0$ для всех $x \in Q$, $f(x, \xi)$ — функция, определенная на $Q \times R_1$ и такая, что $f(x, \xi)$ измерима в Q по x при любом фиксированном $\xi \in R_1$, $|f(x, u) - f(x, v)| \leqslant M|u - v|$ для всех $u, v \in R_1$ при почти каждом фиксированном $x \in Q$ (постоянная $M > 0$), $f(x, 0) \in L_2(Q)$.

Пусть $U = \mathring{H}^1(Q)$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением $(u, v) = \int (p\nabla u \nabla v + quv)\,dx$ для $u, v \in U$, где $q(x) \in C(\overline{Q})$ и $q(x) \geqslant 0$ для всех $x \in Q$ (в п. 4 обозначение области интегрирования Q опускается).

Возьмем в пространстве U ортонормированный базис $\{v_i\}$, где $v_i = |\lambda_i|^{-1/2} u_i$ для $i = 1, 2, \ldots$, а $\{\lambda_i\}$ — последовательность, содержащая все собственные значения первой краевой задачи для оператора $\mathcal{L}_1 = \operatorname{div}(p(x)\nabla) - q(x)$, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность, и $\lambda_{i+1} \leqslant \lambda_i$ для $i = 1, 2, \ldots$, $\{u_i\}$ — система взаимно-ортогональных в U обобщенных собственных функций (норма каждой функции u_i в $L_2(Q)$ равняется единице), причем каждая u_i соответствует собственному значению λ_i (см. [8]). И пусть $P_i u = \sum_{n=1}^{i} (u, v_n) v_n$ для $u \in U$ $(i = 1, 2, \ldots)$, т. е. P_i проектирует U на подпространство, натянутое на $v_1, \ldots, v_i$.

Определим отображение $\Phi: U \to U$ следующим образом: $(\Phi u, v) = E(u, v) \equiv \int (p\nabla u \nabla v + f(x, u) v)\,dx$ для $u, v \in U$.

Можно показать, что для решения $u_0 \in U$ уравнения

$$\Phi u = 0 \quad (u \in U) \tag{8}$$

имеем $\| u_0 - P_i u_0 \| = O(i^{-1/n})$ $(i \to \infty)$.

Теорема 10. *Пусть уравнение (8) имеет решение и* $E(u, u-v) - E(v, u-v) \geqslant 0$ *для всех* $u, v \in U$. *Тогда для отображения* $\Phi : U \to U$ *выполнены условия теоремы 7 и для нахождения решения уравнения (8) применим ИП (5) теоремы 7, причем в данном случае можно взять* $\alpha_i = i^{-\alpha}$, $\beta_i = i^{-\beta}$ *для* $i = 1, 2, \ldots$ *с постоянными* α *и* β *такими, что* $1/2 < \alpha < 1$, $\alpha + 1/n > 1$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta \leqslant 1$.

В заключение приведем теорему, условия которой использовались в п. 2.

Предположим, что заданы нормированные пространства E и F, последовательность $\{E_i\}$ подпространств E, отображения $Q_i : F \to F$ для $i = 1, 2, \ldots$ и отображение $A : E \to F$ такие, что из $Q_{i_k+1} F x_{i_k} \to 0$, где $x_{i_k} \in E_{i_k}$ для $k = 1, 2, \ldots$, и ограниченности последовательности $\{x_{i_k}\}$ вытекает, что из последовательности $\{x_{i_k}\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому решению уравнения

$$Ax = 0 \quad (x \in E). \tag{9}$$

Теорема 11. *Пусть: 1) уравнение (9) имеет (возможно, неединственное) решение; 2)* $\{x_i\} \subset E$, *где* $x_i \in E_i$ *для* $i = 1, 2, \ldots$ *— такая последовательность, что для каждого решения* $x_0 \in E$ *уравнения (9) существуют (вообще говоря, зависящие от последовательности* $\{x_i\}$ *и* x_0*) положительные числа* q, r *и последовательности положительных чисел* $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ *такие, что ряд* $\sum \alpha_i$ *расходится, ряд* $\sum \beta_i$ *сходится и* $\|x_{i+1} - x_0\|^q \leqslant \|x_i - x_0\|^q - \alpha_i \|Q_{i+1} A x_i\|^r + \beta_i$ *для* $i = 1, 2 \ldots$ *Тогда последовательность* $\{x_i\}$ *сходится к решению уравнения (9).*

Замечание 6. Содержание п. 2 полностью сохраняется, если условие α_0) заменить на такое: из $P_{i_k+1} F x_{i_k} \to 0$, где $x_{i_k} \in H_{i_k}$ для $k = 1, 2 \ldots$ (обозначения см. в п. 2), и ограниченности последовательности $\{x_{i_k}\}$ вытекает, что из последовательности $\{x_{i_k}\}$ можно выделить сходящуюся в H подпоследовательность.

Автор благодарен В. А. Треногину за внимание к работе.

Литература

1. Bruck Ronald E., Jr.— J. Math. Anal. and Appl., 1974, vol. 48, N 1, p. 114—126.
2. Ishikawa Shiro.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 44, N 1, p. 147—150.
3. Browder F. E., Petryshyn W. V.— J. Math. Anal. and Appl., 1967, vol. 20, N 2, p. 197—228.
4. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.— Киев: Наукова думка, 1973.
5. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе.— М.: Мир, 1974.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1973.
7. Фонарев А. А. О решении нелинейных уравнений с монотонными отображениями.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 4, с. 680—689.
8. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1976.

Московский институт стали и сплавов

Поступила в редакцию 21 июня 1977 г.