Н. А. Гусевский, О двух классах клейновых групп, *Докл. АН СССР*, 1978, том 241, номер 4, 753–756

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 241, № 4

УДК 517.862:513.835 МАТЕМАТИКА

Н. А. ГУСЕВСКИЙ

О ДВУХ КЛАССАХ КЛЕЙНОВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 III 1978)

В настоящей работе описываются клейновы группы без параболических элементов, изоморфные фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности, а также клейновы группы, имеющие связное множество разрывности.

Обозначим через $\overline{\mathbf{C}}$ риманову сферу ($\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$). Клейновой группой называется группа мёбиусовых автоморфизмов $\overline{\mathbf{C}}$, действующая разрывно хотя бы в одной точке $\overline{\mathbf{C}}$. Пусть G — клейнова группа. Множество точек, в которых G действует разрывно, называется множеством разрывности G и обозначается через $R(G)$. Компоненты связности $R(G)$ называются компонентами G. Компонента R_0 группы называется инвариантной, если $g(R_0)=R_0$ для всякого $g\in G$. Хорошо известно, что каждый мёбиусов автоморфизм $\overline{\mathbf{C}}$ имеет единственное продолжение до конформного автоморфизма шара $B=\{x\in R^3: |x|<1\}$ (считаем, что $\overline{\mathbf{C}}=\partial B$). Тогда G продолжается до группы сохраняющих ориентацию изометрий шара B, снабженного гиперболической метрикой, и G действует разрывно в B. Пусть $M(G)=(B\cup R(G))/G$. Тогда $M(G)$ является трехмерным ориентируемым многообразием с краем $\partial M(G)=R(G)/G$. Если G не содержит эллиптических элементов, то естественная проекция π: $B\cup R(G)\to M(G)$ является неразветвленным накрывающим отображением и фундаментальная группа $\pi_1(M(G))$ изоморфна G.

1. В работе [1] Б. Маскит описал клейновы группы без параболических элементов, изоморфные фундаментальной группе замкнутой ориентируемой поверхности рода p, $p>1$; такие группы имеют представление вида $\{a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p: \prod_{i=1}^{p}[a_i, b_i]=1\}$.

В этом пункте изучаются клейновы группы, изоморфные фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности; такие группы имеют представление $\{c_1, c_2, \ldots, c_n: \prod_{i=1}^{n} c_i^2=1\}$.

Теорема 1. *Пусть G — клейнова группа, изоморфная фундаментальной группе замкнутой поверхности, ориентируемой или неориентируемой. Предположим, что G имеет инвариантную компоненту R_0.*

Тогда R_0 односвязна.

Доказательство. Пусть $S=R_0/G$. Предположим, что R_0 неодносвязна. Тогда гомоморфизм $\pi_1(S, o)\to\pi_1(M(G), o)$ (o — базисная точка фундаментальной группы) имеет нетривиальное ядро. Применяя теорему о петле и лемму Дена [2], получим, что существуют простая нетривиальная на S петля $\gamma\subset S$ и диск D, регулярно вложенный в $M(G)$, такие, что $\gamma=\partial D$. Если γ не разбивает S, то по теореме Ван-Кампена [2] $\pi_1(M(G))=$ $=\pi_1(M(G)\setminus D)*Z$ (свободное произведение). Если γ разбивает S, то из того, что $\pi_1(S, o)\to\pi_1(M(G), o)$ — эпиморфизм, следует, что D разбивает $M(G)$. По теореме Ван-Кампена $\pi_1(M(G))=\pi_1(M_1)*\pi_1(M_2)$, где M_1 и M_2 — замыкания компонент $M(G)\setminus D$. Получаем, что в любом случае $\pi_1(M(G))$ является нетривиальным свободным произведением. Так как G не содержит эллиптических элементов, то G изоморфна $\pi_1(M(G))$ и, следовательно, $G=G_1*G_2$ — нетривиальное свободное произведение. Так как G изоморфна фундаментальной группе замкнутой поверхности, то каждая подгруппа G либо свободна, либо конечного индекса. Обе подгруппы G_1 и G_2 бесконечны, следовательно, обе имеют бесконечный индекс. Получаем, что G_1 и G_2 свободны. Следовательно, G также свободна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть G — клейнова группа, изоморфная фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности.*

Тогда G не имеет инвариантных компонент.

Доказательство. Предположим, что G имеет инвариантную компоненту R_0. Из теоремы 1 следует, что R_0 односвязна. Поэтому гомоморфизм $\pi_1(S, o)\rightarrow\pi_1(M(G), o)$ является мономорфизмом, где $S=R_0/G$. Так как R_0 инвариантна, то этот гомоморфизм является также эпиморфизмом. S — ориентируемая поверхность. Следовательно, $\pi_1(M(G))$ изоморфна фундаментальной группе ориентируемой поверхности, что противоречит условию теоремы.

В следующей теореме дается простое топологическое доказательство основного результата работы ([1]), которое необходимо в дальнейшем.

Теорема 3. *Пусть G — клейнова группа, изоморфная фундаментальной группе замкнутой ориентируемой поверхности рода $p>1$. Предположим, что G не содержит параболических элементов.*

Тогда G имеет односвязную инвариантную компоненту.

Доказательство. Предположим, что G не имеет инвариантных компонент. Тогда G имеет по крайней мере две компоненты. Пусть R_0 — одна из них. Обозначим через $G_0<G$ стабилизатор компоненты R_0. По известной теореме Альфорса G_0 конечно-порождена. Так как G_0 — подгруппа G, то G_0 — либо свободна, либо изоморфна фундаментальной группе замкнутой ориентируемой поверхности. Если G_0 свободна, то из ([3]) следует, что G_0 является группой Шоттки, а это противоречит тому, что G_0 имеет более одной компоненты. R_0 — инвариантная компонента G_0, следовательно, по теореме 1 R_0 односвязна. Рассмотрим отдельно действие группы G_0 на $\overline{\mathbb{C}}$. $R(G_0)=R_0\cup R_1$, где R — объединение компонент G_0, отличных от R_0, $R(G_0)/G_0=S_0\cup S_1$, где $S_0=R_0/G_0$, $S=R/G_0$. Так как G_0 не содержит параболических элементов, то все поверхности, входящие в S, замкнуты. Кроме того, гомоморфизм $\pi_1(S_0, o)\rightarrow\pi_1(M(G_0), o)$ есть изоморфизм. Применяя теорему о произведении ([4]), получаем, что $M(G_0)$ гомеоморфно $S_0\times[0, 1]$. Из этого следует, что G_0 имеет инвариантную компоненту R_1, отличную от R_0. Отсюда сразу получаем, что $R(G_0)=R_0\cup R_1$. Следовательно, индекс $[G: G_0]=2$ и $R(G)=R(G_0)$. Вложение $G_0<G$ индуцирует двулистное накрытие $M(G_0)\rightarrow M(G)$. Из ([4]) следует, что $M(G)$ является нетривиальным линейным расслоением над замкнутой неориентируемой поверхностью. Так как слои этого расслоения односвязны, то $\pi_1(M(G))$ изоморфна фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4. *Пусть G — клейнова группа, изоморфная фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности рода $n>2$. Предположим, что G не содержит параболических элементов.*

Тогда $R(G)$ состоит ровно из двух односвязных неинвариантных компонент, G является Z_2-расширением квазифуксовой группы, $R(G)/G$ — замкнутая ориентируемая поверхность рода $n-1$.

Доказательство. Из теоремы 2 получим, что G не имеет инвариантных компонент: Следовательно, G имеет более одной компоненты. Пусть $R(G)=R_0\cup R_1\cup\ldots$ Обозначим через G_0 стабилизатор компоненты R_0. Так как G_0 — подгруппа G, то G_0 либо свободна, либо изоморфна фундаментальной группе замкнутой поверхности, ориентируемой или неориентируемой. Повторяя рассуждения из теоремы 3, получим, что первый случай невозможен. G_0 имеет инвариантную компоненту R_0, следовательно,

G_0 изоморфна фундаментальной группе замкнутой ориентируемой поверхности. Из доказательства теоремы 3 следует, что $R(G_0)$ состоит ровно из двух компонент, каждая из которых односвязна и инвариантна относительно G_0. Получили, что G_0 — квазифуксова группа, индекс $[G:G_0]=2$, $R(G)=R(G_0)$, т. е. G является Z_2-расширением квазифуксовой группы. Так как G_0 изоморфна фундаментальной группе двулистного ориентируемого накрытия над замкнутой неориентируемой поверхностью рода n, то нетрудно показать, что $R(G)/G=R_0/G_0$ — замкнутая ориентируемая поверхность рода $n-1$.

Теорема 5. *Пусть G — клейнова группа без кручения. Предположим, что G является Z_2-расширением квазифуксовой группы G_0, G_0 не содержит параболических элементов.*

Тогда G изоморфна фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $R(G)=$ $=R(G_0)=R_0\cup R_1$, G_0 — стабилизатор R_0. Так как G_0 не содержит параболических элементов, то $S_0=R_0/G_0$ — замкнутая ориентируемая поверхность. В этом случае $M(G_0)=S_0\times[0,\ 1]$ ([4]). Вложение $G_0<G$ индуцирует двулистное накрытие $M(G_0)\rightarrow M(G)$. Так как G не содержит эллиптических элементов, то это накрытие будет неразветвленным. Проводя далее рассуждения как при доказательстве теоремы 3, получим, что G изоморфна фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности и не содержит параболических элементов.

Замечание. Используя теорему 5 и теоремы комбинирования Б. Маскита, можно доказать, что для всякого $n>2$ существует клейнова группа без параболических элементов, изоморфная фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности рода n.

2. В этом пункте дается ответ на вопрос С. Л. Крушкаля, сформулированный в ([5]).

Теорема 6. *Пусть G — клейнова группа без эллиптических элементов со связным множеством разрывности. Предположим, что трехмерный фундаментальный полиэдр группы G имеет конечное число граней.*

Тогда G является EST-группой ([6]).

Доказательство. Пусть $R(G)$ — множество разрывности G, $L(G)=\overline{\mathbb{C}}\setminus R(G)$ — предельное множество G. Рассмотрим произвольную подгруппу $G_0<G$. Так как $L(G_0)\subset L(G)$ и $L(G)$ не содержит разбивающих $\overline{\mathbb{C}}$ континуумов, то $L(G_0)$ также не содержит разбивающих $\overline{\mathbb{C}}$ континуумов. Отсюда следует, что $R(G_0)$ связно.

Замечание. Известно, что если G неэлементарна и $R(G)$ односвязно, то трехмерный фундаментальный полиэдр G имеет бесконечное число граней ([7]).

Предположим, что G неэлементарна. Пусть $S=R(G)/G$. В силу условия теоремы и замечания гомоморфизм $\pi_1(S,o)\rightarrow\pi_1(M(G),o)$ имеет нетривиальное ядро. Применяя теорему о петле и лемму Дена, получим, что существуют простая нетривиальная на S петля $\gamma\subset S$ и диск $D\subset M(G)$, регулярно вложенный в $M(G)$, такие, что $\gamma=\partial D$. Нетрудно убедиться в том, что если γ разбивает S, то D разбивает $M(G)$. Учитывая это, по теореме Ван-Кампена получим, что либо $\pi_1(M(G))=\pi_1(M(G)\setminus D)*Z$, либо $\pi_1(M(G))=\pi_1(M_1)*\pi_1(M_2)$, где M_1 и M_2 — замыкания компонент $M(G)\setminus D$. Так как G — группа без кручения, то существует естественный изоморфизм $\pi_1(M(G))\rightarrow G$. Тогда в первом случае $G=G_0*\{T\}$, а во втором $G=G_1*G_2$, где $G_i<G$, $i=0, 1, 2,$ — образы соответствующих подгрупп $\pi_1(M(G))$ при этом изоморфизме, $\{T\}$ — циклическая группа, порожденная локсодромическим элементом $T\in G$.

Если каждая из подгрупп G_i, $i=0, 1, 2$, элементарна, то теорема доказана. Предположим, что хотя бы одна из них, например G_0, неэлементарна. G_0 имеет связное множество разрывности $R(G_0)$. Если $R(G_0)$ односвязно, то, применяя предложение 4.2 работы ([2]), получим, что фундаментальный полиэдр G имеет бесконечное число граней, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $R(G_0)$ неодносвязно и с группой G_0 можно проделать изложенный выше процесс разложения. Продолжим этот процесс с каждой из групп G_i, $i=0, 1, 2$, насколько это возможно. Из условия теоремы следует, что G конечно-порождена, следовательно, процесс разложения G на элементарные группы, в силу известной теоремы Грушко, закончится через конечное число шагов. Таким образом, G является свободным произведением конечного числа элементарных групп, т. е. EST-группой.

Следствием из теоремы 6 является

Теорема 7. *Пусть G — конечно-порожденная клейнова группа без эллиптических элементов со связным множеством разрывности. Если трехмерный фундаментальный полиэдр G имеет бесконечное число граней, то G содержит вырожденную подгруппу.*

Автор выражает благодарность С. Л. Крушкалю и П. П. Белинскому, а также участникам семинара В. И. Кузьминова за обсуждение изложенных здесь результатов.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *B. Maskit,* Ann. Acad. Sci., Fenn. Ser. A, I, Math., № 442 (1969). [2] *A. Marden,* Ann. Math., v. 99, № 3, 383 (1974). [3] *B. Maskit,* J. Anal. Math., v. 19, 227 (1967). [4] *F. Waldhausen,* Ann. Math., v. 87, № 1, 56 (1968). [5] Некоторые вопросы современной теории функций, Новосибирск, 1976. [6] *V. Chuckrow,* Trans. Am. Math. Soc., v. 150, № 1, 121 (1970). [7] *L. Greenberg,* Ann. Math., v. 84, 433 (1966). [8] *Н. А. Гусевский,* ДАН, т. 234, № 2, 277 (1977).