1999. Т. 35, № 12. С. 1630 — 1639

УДК 517.926.4

МЕТОД ПОВОРОТОВ И СИНГУЛЯРНЫЕ ЧИСЛА ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ

И. Н. Сергеев

Настоящая работа использует обозначения, понятия и факты, а также продолжает нумерацию формул, определений и утверждений из [1] (теорему 8 и следствие 9 следует считать леммами 8 и 9 соответственно). Основными ее результатами являются леммы 12, 20, а также 16 — 18.

Следующая ниже лемма 10 разъясняет, как с помощью метода поворотов В. М. Миллионщикова подвергнуть систему A преобразованию S на интервале $(T-1,T)$.

Лемма 10. *Для заданной системы $A \in \mathcal{M}_3$ существует такое $\nu_0 < 1/30$, что если $S \in \mathrm{End}\mathbf{R}^3$ и $\|S-I\| < \nu < \nu_0$, то для любого $T > 1$ существует система $B \in \mathcal{M}_3$, удовлетворяющая требованиям: 1) $B(t) \equiv A(t)$ при $t \notin (T-1,T)$; 2) $\|B-A\| \le 8\nu(\|A\|+20)$; 3) $Y(T,T-1) = SX(T,T-1)$, где X и Y — операторы Коши систем A и B соответственно.*

Кроме того, существует система $B' \in M_3$, удовлетворяющая требованиям 1), 2) с заменой B на B' и 3') $Y'(T,T-1) = X(T,T-1)S$, где Y' — оператор Коши системы B'.

Доказательство. Рассмотрим полярное разложение $S = HP$, где $P = (S^*S)^{1/2}$ — неотрицательный симметричный, а H — ортогональный операторы. Из соотношений $\|P\| = \|S\| \le 1+\nu < 2$, $\|P^{-1}\| = \|S^{-1}\| \le 1/(1-\nu) < 2$, $\|P-I\| \le \|S^*S-I\| \le \|S^*-I\|\,\|S\| + \|S-I\| \le 3\nu$ получаем $\|H-I\| = \|SP^{-1}-I\| \le \|S\|\|I-P\|\|P^{-1}\| + \|S-I\| < 13\nu < 1$, откуда следует, что оператор H можно считать поворотом в $\mathbf{R}^3$ на угол $\gamma < \arcsin 13\nu$. Пусть $H(\tau)$ — поворот в той же плоскости на угол $\tau\gamma$, $P(\tau) = P^\tau$, $S(\tau) = H(\tau)P(\tau)$, тогда $S(0) = I$, $S(1) = S$ и $\|\dot S(\tau)\| = \|\dot H(\tau)P(\tau) + H(\tau)\dot P(\tau)\| \le \|\gamma H(\tau+\pi/(2\gamma))\|\|P(\tau)\| + \|H(\tau)\|\|P(\tau)\ln P\| \le 2(\arcsin 13\nu + |\ln(1-3\nu)|) \le 40\nu$ при достаточно малых $\nu < \nu_0$. Далее, система с оператор-функцией

$$B(t) = \begin{cases} S(\tau)A(t)S^{-1}(\tau) + \dot S(\tau)S^{-1}(\tau), & t \in (T-1,T), \\ A(t), & t \notin (T-1,T), \end{cases}$$

где $\tau = t-(T-1)$, удовлетворяет требованиям 1), 3), поскольку $Y(t,T-1) = S(\tau)X(t,T-1)$, и 2): если $t \in (T-1,T)$, то $\|B(t)-A(t)\| \le \|S-I\|\|A\|\|S^{-1}\| + \|A\|\|S^{-1}\|\|I-S\| + \|\dot S(\tau)\|\|S^{-1}\| \le \nu(4\|A\|+80)$.

Для нахождения системы B' достаточно применить полученный результат к системе с обратным по знаку временем. Лемма 10 доказана.

Определение 9. Назовем базис a_1, a_2, a_3 в $\mathbf{R}^3$ β-раскрытым, если для некоторой перестановки (i,j,k) индексов $(1,2,3)$ справедливы оценки

$$\angle(a_j, \pi(a_i)) \ge \beta, \quad \angle(a_k, \pi(a_i, a_j)) \ge \beta. \tag{33}$$

Назовем базисы a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в $\mathbf{R}^3$: а) α-близкими, если $\angle(a_i, \pi(b_i)) \le \alpha$, $i = 1,2,3$; б) γ-переводимыми (друг в друга), если существует такой поворот H в $\mathbf{R}^3$ на угол, не превосходящий γ, что $Ha_i \in \pi(b_i)$, $i = 1,2,3$.

Лемма 11. *Пусть даны два базиса a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в $\mathbf{R}^3$. Тогда*

1) если базис b_1, b_2, b_3 γ-переводим в a_1, a_2, a_3 при помощи поворота H, то $\|H-I\| \le \gamma$.

Если базис a_1, a_2, a_3 в $\mathbf{R}^3$ β-раскрыт, то

2) $\angle(a_i, \pi(a_j)) \ge \beta$ при всех $i \ne j$;

3) существует такое число $\nu_1(\beta) > 0$, *что* $\angle(a_2, \pi(a_1)) \geq \nu_1(\beta)$, $\angle(a_3, \pi(a_2, a_1)) \geq \nu_1(\beta)$;

4) если H *— поворот в* $\mathbf{R}^3$ *на угол* $\beta < 1$ *вокруг прямой* $\pi(a_1)$, *то* $\angle(Ha_2, \pi(a_2, a_1)) \geq \geq \nu_1(\beta)$;

5) при любом $\nu > 0$ *и достаточно малом* $\alpha \leq \nu_2(\beta, \nu)$ *если базис* b_1, b_2, b_3 α*-близок к* a_1, a_2, a_3, *то существует такое преобразование* S, *что* $\|S - I\| \leq \nu$, *и*

$$Sa_i \in \pi(b_i), \quad |Sa_i| = |a_i|, \quad i = 1, 2, 3; \tag{34}$$

6) для некоторого числа $\nu_3(\beta)$ *существует ортогональный базис* b_1, b_2, b_3 *и оператор* S, *удовлетворяющие соотношениям (34) и неравенствам* $\|S^{\pm 1}\| < \nu_3(\beta)$;

7) при достаточно малом $\alpha \leq \nu_4(\beta, \gamma)$ *из неравенства* $\angle(a_i, L) < \alpha$, $i = 1, 2$, *для какой-либо двумерной плоскости* L *следует неравенство* $\prec(\pi(a_1, a_2), L) < \gamma$.

Доказательство. 1) Для любого единичного вектора e имеем $|(H - I)e| \leq 2\sin(\gamma/2) < \gamma$.

2) Все требуемые оценки следуют из оценок (33).

3) Если базис a_1, a_2, a_3 β-раскрыт, то первая из требуемых оценок выполнена в силу утверждения 2) уже при условии $\nu_1(\beta) \leq \beta$, а вторая — либо сразу следует из второй оценки (33), либо получается из неравенств типа $\angle(a_3, \pi(a_2)) = \varphi \geq \beta$, $\angle(a_1, \pi(a_3, a_2)) = \psi \geq \beta$ по теореме синусов для трехгранного угла: $\sin\psi/\sin\zeta = \sin\eta/\sin(\pi/2)$, $\sin\xi/\sin\zeta = \sin\varphi/\sin(\pi/2)$, где $\zeta = \angle(\pi(a_1, a_2), \pi(a_3, a_2))$, $\eta = \angle(a_1, \pi(a_2))$, $\xi = \angle(a_3, \pi(a_2, a_1))$, откуда при правильном выборе числа $\nu_1(\beta)$ имеем $\xi \geq \arcsin(\sin^2\beta) \geq \nu_1(\beta)$.

4) Базис $a_1' = a_1$, $a_2' \in a_1^{\perp} \cap \pi(a_1, a_2)$, $a_3' = Ha_2$ β-раскрыт, поэтому в силу утверждения 3) $\angle(Ha_2, \pi(a_2, a_1)) = \angle(a_3', \pi(a_2', a_1')) \geq \nu_1(\beta)$.

5) Рассмотрим функцию $g(\alpha) = \sup\limits_a \sup\limits_b \min\limits_S \|S - I\|$, где последняя точная верхняя грань берется по всем β-раскрытым базисам $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, предыдущая — по всем базисам $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, α-близким к базису a, а минимум — по всем преобразованиям S, удовлетворяющим соотношениям (34). Требуемое утверждение следует из непрерывности этой функции по $\alpha \geq 0$ и равенства $g(0) = 0$.

6) Любые три некомпланарных вектора x_1, x_2, x_3 задают оператор R, сохраняющий ориентацию и удовлетворяющий условиям $Rx_1 = x_1$, $Rx_2 = x_2$, $Rx_3 \perp \pi(x_1, x_2)$, $|Rx_3| = |x_3|$, и убывающую функцию $f(\beta_0) = \max(\|R\|, \|R^{-1}\|)$ от параметра $\beta_0 = \angle(x_3, \pi(x_1, x_2)) \in [0; \pi/2]$. Пусть справедливы оценки (33), тогда для оператора $S = R_2R_1$, где оператор $R = R_1$ задан векторами $x_1 = a_i$, $x_2 = a_j$, $x_3 = a_k$, а оператор $R = R_2$ — векторами $x_1 = a_i$, $x_2 = R_1a_k$, $x_3 = a_j$, верны оценки $\|S^{\pm 1}\| \leq f(\beta_2)f(\beta_1) \leq (f(\beta))^2$, так как $\beta_1 = \angle(a_k, \pi(a_i, a_j)) \geq \beta$, $\beta_2 = \angle(a_j, \pi(a_i, R_1a_k)) = \angle(a_j, \pi(a_i)) \geq \beta$, причем оператор S переводит базис a_1, a_2, a_3 в ортогональный и сохраняет нормы векторов этого базиса.

7) Возьмем прямую $l \subset \pi(a_1, a_2) \cap L$ и заметим, что хотя бы одно из неравенств $\angle(a_1, l) \geq \geq \beta/2$ или $\angle(a_2, l) \geq \beta/2$, скажем, первое, выполняется (утверждение 2)). По теореме синусов для трехгранного угла имеем

$$\sin \prec (L, \pi(a_1, a_2)) = \frac{\sin\angle(a_1, L)\sin(\pi/2)}{\sin\angle(l, a_1)} < \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta/2)} \leq \sin\gamma,$$

если $\alpha \leq \arcsin(\sin\gamma\sin(\beta/2)) = \nu_4(\beta, \gamma)$. Лемма 11 доказана.

Определение 10. Помимо различных видов отделенности (см. определение 2 из [1]) опишем различные виды ε-разделенности на отрезке. Для данной системы $A \in \mathcal{M}_3$ с оператором Коши X и чисел $t > s \geq 0$, $\varepsilon > 0$ скажем, что на отрезке $[s, t]$ имеет место

а) верхняя ε-разделенность, если $\delta_3(X(t, s)) > \delta_2(X(t, s)) + \varepsilon(t - s)$; б) нижняя ε-разделенность, если $\delta_2(X(t, s)) > \delta_1(X(t, s)) + \varepsilon(t - s)$; в) общая ε-разделенность, если имеют место как верхняя, так и нижняя ε-разделенности; г) общая ε-неразделенность, если нет ни верхней, ни нижней ε-разделенности.

Лемма 12. *Пусть для заданной системы* $A \in \mathcal{M}_3$ *и чисел* $\delta, \alpha, T, \varepsilon > 0$ *на* k*-м отрезке* $[(k-1)T; kT]$ *имеет место общая* ε*-разделенность. Тогда при достаточно большом* $T > > T_3(\varepsilon, \alpha, \delta)$ *для любых базисов* a_1, a_2, a_3 *и* b_1, b_2, b_3 *в* $\mathbf{R}^3$, *удовлетворяющих условиям* $a_1 \in \in E_1(k-1)$, $a_2 \in E_{1,2}(k-1)$, $b_3 \in F_3(k)$, $b_2 \in F_{3,2}(k)$ *(см. определение 4 из [1]), существуют*

такие решения x_1, x_2, x_3, *что базис* $x_1((k-1)T)$, $x_2((k-1)T)$, $x_3((k-1)T)$ α*-близок к базису* a_1, a_2, a_3, *а базис* $x_1(kT), x_2(kT), x_3(kT)$ *— к базису* b_1, b_2, b_3, *причем (см. определение 6 из [1])* $|\chi(x_i, kT, (k-1)T) - \delta_i(X(kT, (k-1)T))| < \delta T$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Выберем решение x_3 так, чтобы вектор $c_3 = x_3((k-1)T)$ удовлетворял условиям $\angle(c_3, a_3) \le \alpha$, $\angle(c_3, E_{1,2}(k-1)) \ge \alpha/2$. Тогда при достаточно больших T (см. утверждения А), Б) из [1]) имеем

$$\angle(x_3(kT), F_3(k)) < \alpha, \quad 0 \le \delta_3(X(kT, (k-1)T)) - \chi(x_3, kT, (k-1)T) < \delta T.$$

Аналогично выберем решение x_1 из условий $\angle(d_1, b_1) \le \alpha$, $\angle(d_1, F_{3,2}(k)) \ge \alpha/2$, где $d_1 = x_1(kT)$. Для выбора решения x_2 найдем сначала решение x из условий $c_2 = x((k-1)T) \in E_{1,2}(k)$, $\angle(c_2, a_2) \le \alpha/2$, $\angle(c_2, E_1(k-1)) \ge \alpha/2$, гарантирующих при достаточно больших T неравенство $\prec (\pi(x(kT), F_3(k)), F_{3,2}(k)) \le \alpha/2$, затем вектор d_2 из условий $d_2 \in \pi(x(kT), F_3(k))$, $\angle(d_2, b_2) \le \alpha/2$ и, наконец, решение x_2 из условий $x_2(kT) \in \pi(x(kT), F_3(k))$, $\angle(x_2(kT), d_2) \le \alpha/2$, $\angle(x_2(kT), F_3(k)) \ge \alpha/2$. Тогда при достаточно больших T имеем

$$\angle(x_2((k-1)T), a_2) \le \angle(x_2((k-1)T), c_2) + \angle(c_2, a_2) \le \alpha, \quad \angle(x_2(kT), b_2) \le$$

$$\le \angle(x_2(kT), d_2) + \angle(d_2, b_2) \le \alpha, \quad -\delta T \le \delta_2(X(kT, (k-1)T)) - \chi(x_2, kT, (k-1)T) \le \delta T.$$

Лемма 12 доказана.

Определение 11. Во множестве всех перестановок σ набора индексов $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ введем частичную упорядоченность в следующем смысле: скажем, что перестановки $\sigma_1 = (i_1, i_2, i_3)$ и $\sigma_2 = (j_1, j_2, j_3)$ соседние и σ_2 менее упорядочена, чем σ_1, т.е. $\sigma_2 < \sigma_1$, если либо $i_1 = j_1$ и $i_2 < i_3$, либо $i_2 = j_2$ и $i_1 < i_3$, либо $i_3 = j_3$ и $i_1 < i_2$. Далее если для перестановок σ_1 и σ_2 справедлива цепочка $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \ldots < \sigma_1$, то также будем считать перестановку σ_2 менее упорядоченной, чем σ_1, а если $\sigma_2 < \sigma_1$ или $\sigma_2 = \sigma_1$, то — не более упорядоченной, т.е. $\sigma_2 \le \sigma_1$.

Замечание 2. Не любые две перестановки сравнимы в указанном смысле, однако существует самая неупорядоченная перестановка $(3, 2, 1)$ и самая упорядоченная (1,2,3), причем они соседние. Из любой перестановки можно получить любую более упорядоченную, двигаясь по цепочке соседних перестановок, содержащей не более трех знаков неравенства, например: $(3, 2, 1) < (3, 1, 2) < (1, 3, 2) < (1, 2, 3)$, а также по любой другой, в которой вторая перестановка заменена на $(2, 3, 1)$ или третья — на $(2, 1, 3)$, или даже произведены обе замены сразу. В каждом из шести стандартных типов множеств (см. определение 5 из [1]) можно выделить самую неупорядоченную перестановку (она в соответствующем перечне элементов множества записана последней), и наоборот, каждая из шести существующих перестановок является самой неупорядоченной ровно в одном из этих множеств.

Пусть дана система $A \in \mathcal{M}_3$ и числа $T, \varepsilon > 0$.

Определение 12. В развитие понятия ε-разделенности (определение 10) назовем k-й отрезок отрезком: а) неблизости, если есть общая 3ε-разделенность; б) верхней близости, если нет верхней 3ε-разделенности, но есть нижняя $2\sqrt{\varepsilon}$-разделенность; в) нижней близости, если нет нижней 3ε-разделенности, но есть верхняя $2\sqrt{\varepsilon}$-разделенность; г) общей близости, если есть общая $2\sqrt{\varepsilon}$-неразделенность, но нет общей 3ε-разделенности.

Индексы $2, 3$ или $1, 2$ или $1, 2, 3$ в случаях б) или в) или г) соответственно назовем смешиваемыми на k-м отрезке, а любую перестановку, оставляющую на месте остальные индексы, назовем смешивающей на этом отрезке.

Замечание 3. Если $\varepsilon < 4/9$ (т.е. $3\varepsilon < 2\sqrt{\varepsilon}$), то имеет место ровно один из случаев а) — г).

Определение 13. Для данного числа $k \in \mathbf{N}$ назовем закреплением начальных в $(k-1)$-й момент или конечных в k-й момент подпространств выбор любых одномерных подпространств L_i или соответственно M_i $(i = 1, 2, 3)$, для которых выполнены условия: $L_i \perp L_j$, $M_i \perp M_j$, $i \ne j$; в случае а) определения 12 выполнены дополнительные условия $L_i = E_i(k-1)$, $M_i = F_i(k)$, $i = 1, 2, 3$; в случае б) — условия $L_i \subset E_{2,3}(k-1)$, $M_i \subset F_{2,3}(k)$, $i = 2, 3$; в случае в) — условия $L_i \subset E_{1,2}(k-1)$, $M_i \subset F_{1,2}(k)$, $i = 1, 2$.

Пусть в k-й момент уже закреплены начальные L_i и конечные M_i подпространства и заданы числа $\beta, \gamma > 0$. Тогда скажем, что в k-й момент реализована перестановка σ, если в $\mathbf{R}^3$ указаны базисы a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, называемые начальными и конечными соответственно и удовлетворяющие условиям:

1) $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_{1,2}$, $b_3 \in M_3$, $b_2 \in M_{2,3}$, где $L_{i,j} = \pi(L_i, L_j)$, $M_{i,j} = \pi(M_i, M_j)$;

2) базисы $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}$ и b_1, b_2, b_3 β-раскрыты и γ-переводимы друг в друга (определение 9).

Определение 14. Для дополнительно заданных чисел $\mu > 0$ и $k \in \mathbf{N}$ определим множество $S_\mu(k)$ возможных перестановок индексов, считая возможной перестановку σ, задаваемую следующими условиями а) и б) и называемую образующей перестановкой, а также любую более упорядоченную перестановку:

а) если можно закрепить начальные и конечные подпространства L_1, L_2, L_3 и M_1, M_2, M_3 в k-й момент так, чтобы выполнялось какое-либо (или даже каждое) из следующих условий ij): 31) $\angle(M_3, L_1) < \mu$, 13) $\prec(M_{2,3}, L_{1,2}) < \mu$, то $\sigma(i) = j$, а если нельзя, то $\sigma(i) \neq j$;

б) если подпространства L_1, L_2, L_3 и M_1, M_2, M_3 нельзя закрепить указанным в п. а) образом, но можно закрепить так, чтобы выполнялось какое-либо из следующих условий ij): 32) $\angle(M_3, L_{1,2}) < \mu^3$, 21) $\angle(M_{2,3}, L_1) < \mu^3$, то $\sigma(i) = j$, а если нельзя, то $\sigma(i) \neq j$.

Замечание 4. При достаточно малом $\mu < \mu_0 < 1$ оба условия п. б) не могут быть выполнены одновременно, если ни одно из условий п. а) не выполнено. Действительно, если условия 32) и 21) выполнены, а 31) нет, то $\angle(M_3, L_1) \geq \mu$, $\angle(M_{2,3}, L_1) < \mu^3$, $\angle(M_3, L_{1,2}) < \mu^3$, откуда по теореме синусов для трехгранного угла при достаточно малом μ имеем оценки $\prec(M_{2,3}, \pi(M_3, L_1)) \leq \arcsin(\sin\mu^3/\sin\mu) < \mu/2$ и $\prec(L_{1,2}, \pi(M_3, L_1)) < \mu/2$, из которых получаем $\prec(M_{2,3}, L_{1,2}) < \mu$, т.е. выполнено условие 13).

Лемма 13. *Пусть заданы числа $\mu > 0$, $\beta = \mu$ и $\gamma > 3\beta$, а в k-й момент закреплены начальные и конечные подпространства L_1, L_2, L_3 и M_1, M_2, M_3 в соответствии с условиями а), б) определения 14. Тогда если $\mu < \mu_0$, то в k-й момент можно реализовать образующую перестановку σ.*

Доказательство. Выберем векторы $a_1 \in L_1$, $b_3 \in M_3$ начального и конечного базисов и укажем, как выбрать остальные векторы базисов и поворот $H = H_2H_1$, γ-переводящий базис b_1, b_2, b_3 в базис $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}$.

Пусть условие 31) выполнено, а условие 13) нет. Возьмем повороты H_1 и H_2 на углы, не превосходящие β, для которых справедливы соотношения $H_1M_3 = L_1$, $H_2L_1 = L_1$, $\prec(H_2(H_1M_{2,3}), L_{1,2}) \geq \beta$ (последнее условие достигается поворотом H_2 плоскости $M = H_1M_{2,3}$ вокруг прямой $L_1 \subset (M \cap L_{1,2})$ на угол, не превосходящий β). Выбрав остальные векторы $a_2 \in L_2$, $b_2 \in M_2$, $a_3 = Hb_2$, $b_1 = H^{-1}a_2$, получим $Hb_1 = a_2$, $Hb_2 = a_3$, $Hb_3 \in \pi(a_1)$, причем базис a_1, a_2, a_3 (и автоматически базис b_1, b_2, b_3) β-раскрыт, так как $\angle(a_2, a_1) = \pi/2$, $\angle(a_3, \pi(a_2, a_1)) \geq \beta$. Таким образом, реализована образующая перестановка $\sigma = (2, 3, 1)$, а итоговый угол поворота для преобразования H не превосходит $2\beta < \gamma$.

Аналогично (с тем возможным отличием, что угол одного из поворотов H_1, H_2 не превосходит 2β) рассматриваются остальные случаи: когда выполнено только условие 13); когда выполнены оба условия 31) и 13); когда выполнено только условие 32) или 21) соответственно (случай, когда оба условия 32), 21) выполнены, а оба условия 31), 13) не выполнены, при $\mu < \mu_0$ невозможен) и когда ни одно из условий 31), 13), 32), 21) не выполнено. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Пусть заданы числа $\beta, \gamma > 0$, а в k-й момент закреплены начальные и конечные подпространства L_1, L_2, L_3 и M_1, M_2, M_3. Тогда если для чисел $\beta' < \gamma/4$ и $\gamma' < \gamma/4$ в k-й момент реализуема перестановка σ', то для достаточно малого $\beta < \nu_5(\beta')$ и числа γ в этот момент реализуема любая перестановка $\sigma \geq \sigma'$.*

Доказательство. Для каждой перестановки σ' рассмотрим соседнюю с ней перестановку $\sigma > \sigma'$ и докажем существование начального и конечного базисов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, удовлетворяющих условиям: 1) из определения 13 и 2′) базисы b_1, b_2, b_3 и $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}$ $\nu_1(\beta')$-раскрыты (лемма 11) и $(\gamma' + \beta')$-переводимы друг в друга, — предположив, что базисы

a'_1, a'_2, a'_3 и b'_1, b'_2, b'_3, реализующие перестановку σ' при параметрах β' и γ', уже предъявлены. Тогда не более чем за три (замечание 2) итерации этого построения получим начальный и конечный базисы, реализующие любую наперед заданную более упорядоченную, чем σ', перестановку при параметрах $\beta < \nu_1(\nu_1(\nu_1(\beta'))) = \nu_5(\beta')$ и $\gamma > 4\gamma' > \gamma' + 3\beta'$, т.е. лемма 14 будет доказана.

0. Обозначим через H_1 поворот на угол, не превышающий γ' и переводящий базис b'_1, b'_2, b'_3 в базис $a'_{\sigma'(1)}, a'_{\sigma'(2)}, a'_{\sigma'(3)}$, и определим (см. ниже) поворот H_2 на угол, не превосходящий β', положив $a_1 = a'_1$, $b_3 = b'_3$, $H = H_2H_1$ и выбрав векторы b_1 и b_2 так, чтобы оператор H переводил базис b_1, b_2, b_3 в базис $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}$. Тогда эти базисы заведомо будут $(\gamma' + \beta')$-переводимы друг в друга и останется лишь проверить, что базис a_1, a_2, a_3 $\nu_1(\beta')$-раскрыт и

$$a_2 \in L_{1,2} = \pi(a'_1, a'_2), \quad b_2 \in M_{2,3} = \pi(b'_3, b'_2). \tag{35}$$

1. Если $\sigma' = (1,2,3)$, то утверждение справедливо, так как нет перестановок $\sigma > \sigma'$.

2. Если $\sigma' = (2,1,3)$, то $\sigma = (1,2,3)$ и $H_1b'_2 = a'_1 \in L_1$, $H_1b'_1 = a'_2 \in L_{1,2}$, $H_1b'_3 = a'_3$. Рассмотрим поворот H_2 вокруг прямой L_3 на угол β' и обозначим $b_1 = H^{-1}a'_1$, $b_2 = b'_2$, $a_2 = Hb'_2$, $a_3 = Hb'_3$, тогда $Hb_1 = a_1$, $Hb_2 = a_2$, $Hb_3 = a_3$, причем выполнены условия (35) и $\angle(a_2, \pi(a_1)) = \angle(H_2a'_1, \pi(a'_1)) = \beta'$, $\angle(a_3, \pi(a_2, a_1)) = \angle(Hb'_3, L_{1,2}) = \angle(a'_3, \pi(a'_2, a'_1)) \geq \nu_1(\beta')$, так как базис a'_1, a'_2, a'_3 β'-раскрыт (лемма 11.3)). Таким образом, перестановка σ реализована.

3. Аналогично разбирается случай $\sigma' = (1,3,2)$.

4. Если $\sigma' = (3,1,2)$, то есть две возможности: либо $\sigma = (2,1,3)$, либо $\sigma = (1,3,2)$, рассматриваемые отдельно, подобно случаю 2 каждая.

Аналогично разбираются случаи 5 и 6, когда $\sigma' = (2,3,1)$ или $\sigma' = (3,2,1)$ соответственно. Лемма 14 доказана.

В дополнение к определениям 2 и 4 [1] назовем сингулярным базисом решений системы $A \in \mathcal{M}_n$ на отрезке $[s,t]$ такой набор решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которого $\chi(x_i, t, s) = \delta_i(X(t,s))$, $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 15. *Пусть для системы $A \in \mathcal{M}_2$ и некоторых $\varepsilon < 1$, $T > 0$ выполнено неравенство $\delta_2(X(T,0)) \geq \delta_1(X(T,0)) + \varepsilon T$. Тогда для любого $\varkappa \in [-\varepsilon^2, \varepsilon^2]$ найдется система $B_\varkappa \in \mathcal{M}_2$, удовлетворяющая условиям*

1) $\|B_\varkappa - A\| \leq 8\varepsilon(\|A\| + 1)$;

2) сингулярный базис x_1, x_2 системы A на отрезке $[0;T]$ связан с некоторыми решениями y_1, y_2 системы $B_\varkappa$ соотношениями

$$y_i(t) \in \pi(x_i(t)), \quad i = 1,2, \quad t \in [0;T], \tag{36}$$

$$\chi(y_1, T, 0) = \chi(x_1, T, 0) - \varkappa T, \quad \chi(y_2, T, 0) = \chi(x_2, T, 0) + \varkappa T; \tag{37}$$

3) базис y_1, y_2 сингулярен на отрезке $[0;T]$;

4) оператор-функция $B_\varkappa(t)$ равномерно на отрезке $[0;T]$ непрерывна по $\varkappa$;

5) для некоторых скалярных функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ справедливо представление $B_\varkappa(t) = A(t) - \varkappa Q_1(t) + (\nu(t)I + \mu(t)R(t))Q_2(t)$, $t \in [0;T]$, где $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ — ортогональные проекторы на $L(t) = \pi(x_1(t))$ и соответственно $(L(t))^\perp$, а $R(t)$ — поворот (в $\mathbf{R}^2$) на угол $\pi/2$;

6) $\delta_1(Y(T,0)) + \delta_2(Y(T,0)) = \delta_1(X(T,0)) + \delta_2(X(T,0))$.

Доказательство. Для любого решения x системы A обозначим $a(t) = x(t)/|x(t)|$, $p(t) = (d/dt)\ln|x(t)| = (a(t), A(t)a(t))$. Тогда, введя соответствующие функции $a_1(t), a_2(t)$ и $p_1(t), p_2(t)$ для решений x_1, x_2 и обозначая $a_0(t) = (a_2(t) - a_1(t))/|a_2(t) - a_1(t)|$, $\varphi(t) = \angle(a_2(t), \pi(a_1(t)))$, получаем

$$\varepsilon T \leq \delta_2(X(T,0)) - \delta_1(X(T,0)) = \int_0^T (p_2(t) - p_1(t))\,dt = \int_0^T ((a_2(t) - a_1(t), A(t)a_2(t)) +$$

$$+ (a_1(t), A(t)(a_2(t) - a_1(t))))\,dt = \int_0^T ((a_0(t), A(t)a_2(t)) + (a_1(t), A(t)a_0(t)))|a_2(t) - a_1(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^T 2\|A\| \cdot 2\sin(\varphi(t)/2)dt = 4\|A\| \int_0^T \sin(\varphi(t)/2)dt.$$

Рассмотрим возмущение $Q(t) = B(t) - A(t)$, определяемое при некотором $\theta \in [-1;1]$ равенствами $Q(t)a_1(t) = 0$, $Q(t)a_2(t) = 8\theta\varepsilon\|A\|\sin\varphi(t)a_2(t)$, из которых следует существование решений системы B с условиями (36). Норма этого возмущения будет достигаться на единичном векторе $b(t)$, ортогональном к $a_1(t)$:

$$\|Q(t)\| = |Q(t)b(t)| = \left|Q(t)\left(\frac{a_2(t)}{\sin\varphi(t)} + \frac{a_1(t)}{\operatorname{tg}\varphi(t)}\right)\right| = 8\,|\theta|\,\varepsilon\|A\|\sin\varphi(t) \cdot \frac{|a_2(t)|}{\sin\varphi(t)} \leq 8\varepsilon\|A\|,$$

а функции p_1, p_2 после добавления возмущения Q к системе A изменятся соответственно на величины $\Delta p_1(t) = 0$, $\Delta p_2(t) = 8\theta\varepsilon\|A\|\sin\varphi(t)$, которые дадут соответствующие изменения функций роста

$$\Delta\chi_1 = 0, \quad \Delta\chi_2 = \chi(y_2, T, 0) - \chi(x_2, T, 0) = \int_0^T \Delta p_2(t)\,dt,$$

$$|\Delta\chi_2| = \int_0^T 8\,|\theta|\,\varepsilon\|A\|\sin\varphi(t)dt \geq 8|\theta|\varepsilon\|A\| \int_0^T \sin(\varphi(t)/2)dt \geq 2|\theta|\varepsilon^2 T.$$

Из непрерывной зависимости величины $\Delta\chi_2$ от параметра θ следует, что она пробегает при изменении $\theta \in [-1;1]$ по меньшей мере весь отрезок $[-2\varepsilon^2 T, 2\varepsilon^2 T]$. Поэтому для любого $\varkappa \in [-\varepsilon^2, \varepsilon^2]$ можно подобрать θ так, что $\Delta\chi_2 = 2\varkappa T$. Наконец, положим $B_\varkappa(t) = A(t) + Q(t) - \varkappa I$, тогда будут выполнены равенства (37). Утверждение 2) доказано.

Оценка 1) следует из цепочки $\|B_\varkappa - A\| \leq \|Q\| + \|\varkappa I\| \leq 8\varepsilon\|A\| + \varepsilon^2 \leq 8\varepsilon(\|A\| + 1)$, а утверждение 3) — из ортогональности векторов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ в моменты $t = 0$ и $t = T$. Утверждения 4) и 5) вытекают из построения, а 6) — из равенств (37). Лемма 15 доказана.

Пусть заданы система $A \in \mathcal{M}_3$ и числа $T > 0$, $k \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon < \nu_0$ (лемма 10).

Лемма 16. *Если k-й отрезок является отрезком верхней близости, то при достаточно большом $T > T_4(\varepsilon)$ для любого одномерного подпространства $M_3 \subset F_{2,3}(k)$ существует система $B \in \mathcal{M}_3$, обладающая следующими свойствами:*

1) общая ε-разделенность на k-м отрезке;

2) $\|B(t) - A(t)\| \leq 16\sqrt{\varepsilon}(\|A\| + 1) + 40\varepsilon(\|A\| + 5)$ при $t \in [(k-1)T, kT]$;

3) $|\delta_i(Y(kT,(k-1)T)) - \delta_i(X(kT,(k-1)T))| \leq 4\varepsilon T$, где $i = 1,2,3$, а X, Y — операторы Коши систем A, B соответственно;

4) сингулярные подпространства системы B (отмечены штрихами) связаны с сингулярными подпространствами системы A (без штрихов) соотношениями

$$E_1'(k-1) = E_1(k-1), \quad F_1'(k) = F_1(k), \quad F_3'(k) = M_3. \tag{38}$$

Доказательство. 1. Ниже предполагаем параметр t пробегающим k-й отрезок и для краткости обозначаем $\chi(x, kT, (k-1)T)$ через $\chi(x)$, $X(kT,(k-1)T)$ через X, $X|_{M((k-1)T)}$ через $X|_M$ и т.д.

2. Пусть подпространство $l = \pi(x_0)$ удовлетворяет условию $l(kT) = M_3$, а x_1, x_2, x_3 — сингулярный базис решений на k-м отрезке. Положим $M = \pi(x_0, x_1)$, $N = \pi(x_2, x_3)$, $L(t) = (l(t))^\perp$, $m(t) = M(t) \cap L(t)$ и для каждого $\varkappa \in [-4\varepsilon; 0]$ рассмотрим систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q_\varkappa(t))y, \quad Q_\varkappa(t) = -\varkappa P_l(t) + \nu(t)P_L(t) + \mu(t)R(t)P_m(t), \tag{39}$$

где $P_l(t)$, $P_L(t)$ и $P_m(t)$ — ортогональные проекторы на $l(t)$, $L(t)$ и $m(t)$ соответственно, $R(t)$ — поворот подпространства $m(t)$ в $l(t)$ вокруг $(M(t))^\perp$, а функции ν и μ определяются по решениям x_0 и x_1 в соответствии с леммой 15. Тогда, отмечая штрихами соответствующие (т.е. имеющие те же начальные значения в момент $t = (k-1)T$) объекты системы (39), получаем равенства $l'(t) = l(t)$, $M'(t) = M(t)$, $N'(t) = N(t)$, а для решений y_0 и y_1 с

начальными значениями $y_0((k-1)T) = x_0((k-1)T)$, $y_1((k-1)T) = x_1((k-1)T)$ — условия $\chi(y_0) = \chi(x_0) - \varkappa T$, $\chi(y_1) = \chi(x_1) + \varkappa T = \delta_1(X) + \varkappa T$, $y_1(jT) \in \pi(x_1(jT)) \perp N'(jT)$, $j = k-1, k$, причем последнее условие гарантирует сингулярность подпространств $N'(jT)$ и $\pi(y_1(jT))$ при $j = k-1, k$, а значит, равенство $\delta_{i_0}(Y) = \chi(y_1)$ при некотором $i_0 \in \{1, 2, 3\}$.

3. Выберем такое значение $\varkappa = \varkappa_0$, чтобы выполнялось равенство $\delta_3(Y) = \delta_3(X) + \varepsilon T$. Возможность этого выбора обеспечивается непрерывностью по $\varkappa$ величины $\delta_3(Y)$, равенством $\delta_3(Y) = \delta_3(X)$ при $\varkappa = 0$ и неравенством $\delta_3(Y) \geq \chi(y_0) = \chi(x_0) + 4\varepsilon T \geq \delta_3(X) + \varepsilon T$ при $\varkappa = -4\varepsilon$. По лемме 15 $\delta_{3-i_0}(Y) + \delta_3(Y) = \delta_2(X) + \delta_3(X)$, поэтому при $\varepsilon < 1/4$ получаем $\delta_{3-i_0}(Y) = \delta_2(X) - \varepsilon T > \delta_1(X) + 3\varepsilon T = \delta_{i_0}(Y) + 3\varepsilon T + \varkappa_0 T$, откуда следуют равенства $i_0 = 1$, $\delta_1(Y) = \delta_1(X) + \varkappa_0 T$, $\delta_2(Y) = \delta_2(X) - \varepsilon T$ и утверждение 3).

4. Из оценки $\chi(y_0) = \chi(x_0) - \varkappa_0 T \geq \delta_2(X) = \delta_2(Y) + \varepsilon T$ в силу утверждения А) [1] при достаточно больших $T > T_4(\varepsilon)$ следует неравенство $\gamma = \angle(F_3'(k), M_3) < \varepsilon$. Рассмотрим поворот H в плоскости $F_{2,3}'(k)$ на угол γ, переводящий прямую $F_3'(k)$ в M_3. По лемме 11.1) имеем $\|H - I\| < \varepsilon$, а в соответствии с леммой 10 систему (39), где $\varkappa = \varkappa_0$, можно подвергнуть преобразованию $S = H$ на отрезке $[kT-1, kT]$ так, чтобы выполнялось последнее равенство (38).

5. Полученная возмущенная система B в силу оценки 1) из леммы 15 (где роль числа ε играет число $2\sqrt{\varepsilon}$) и оценки 2) из леммы 10 (где $\nu = \varepsilon < 1/30$) удовлетворяет требуемому неравенству 2): $\|B(t) - A(t)\| \leq \|B(t) - (A(t) + Q_\varkappa(t))\| + \|Q_\varkappa(t)\| \leq 8\varepsilon(\|A(t) + Q_\varkappa(t)\| + 20) + +8 \cdot 2\sqrt{\varepsilon}(\|A\| + 1) \leq 16\sqrt{\varepsilon}(\|A\| + 1) + 40\varepsilon(\|A\| + 5)$.

6. Свойство 1) следует из приведенного выше п. 3, а первые равенства (38) — из п. 2. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Если k-й отрезок является отрезком нижней близости, то при достаточно большом $T > T_4(\varepsilon)$ для любого одномерного подпространства $M_2 \subset F_{1,2}(k)$ существует система $B \in \mathcal{M}_3$, обладающая свойствами: 1) — 3) из формулировки леммы 16 и*

4) сингулярные подпространства системы B (отмечены штрихами) связаны с сингулярными подпространствами системы A (без штрихов) соотношениями $E_3'(k-1) = E_3(k-1)$, $F_3'(k) = F_3(k)$, $F_2'(k) = M_2$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 16.

Лемма 18. *Если k-й отрезок является отрезком общей близости, то при достаточно большом $T > T_5(\varepsilon)$ для любых одномерных взаимно ортогональных подпространств $M_2, M_3 \subset \mathbf{R}^3$ существует система $B \in \mathcal{M}_3$, обладающая следующими свойствами:*

1) общая ε-разделенность на k-м отрезке;

2) $\|B(t) - A(t)\| \leq 10\sqrt{\varepsilon} + 8\varepsilon(\|A\| + 24)$ при $t \in [(k-1)T, kT]$;

3) $|\delta_i(Y(kT, (k-1)T)) - \delta_i(X(kT, (k-1)T))| \leq 10\sqrt{\varepsilon}T + 5\varepsilon T$, где $i = 1, 2, 3$, а X, Y — операторы Коши систем A, B соответственно;

4) сингулярные подпространства системы B удовлетворяют равенствам $F_2'(k) = M_2$, $F_3'(k) = M_3$.

Доказательство ввиду его сходства с доказательством леммы 16 изложим очень кратко.

Для каждого $\alpha \in [0; 2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon]$ рассмотрим систему $\dot{z} = (A(t) + Q_\alpha(t))z$, $Q_\alpha(t) = 2\alpha P_l(t) - -\alpha P_L(t)$, где $P_l(t)$ и $P_L(t)$ — ортогональные проекторы на $l(t)$ и $L(t) = (l(t))^\perp$ соответственно, а подпространство l решений системы A удовлетворяет условию $l(kT) = M_3$.

Подберем значение $\alpha = \alpha_0$ так, чтобы $\delta_3(Z) = \delta_3(X) + 2\varepsilon T$. Возможность этого выбора обеспечивается непрерывностью по α величины $\delta_3(Z)$, равенством $\delta_3(Z) = \delta_3(X)$ при $\alpha = 0$ и неравенством $\delta_3(Z) \geq \delta_3(X) + 2\varepsilon T$ при $\alpha = 2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon$.

Для любого решения z системы $(A + Q_{\alpha_0})$, удовлетворяющего условию $z(kT) \in L(kT)$, справедливо неравенство $\chi(z) \leq \delta_3(X) - \alpha_0 T$, из которого вытекает верхняя 2ε-разделенность системы $(A + Q_{\alpha_0})$ на k-м отрезке.

Для решения z_0 и двумерного подпространства решений N системы $(A + Q_{\alpha_0})$, удовлетворяющих условиям $\pi(z_0(kT)) = M_3$ и $N(kT) \supset (F_3''(k) \cup M_3)$, где $F_3''(k)$ — конечное сингулярное подпространство системы $(A + Q_{\alpha_0})$, имеем $\chi(z_0) \geq \delta_1(Z|_N) + 2\varepsilon T + \alpha_0 T$, откуда

при достаточно большом T следует неравенство $\angle(F_3''(k), M_3) < \varepsilon/6$.

Выберем двумерное подпространство M решений системы $(A + Q_{\alpha_0})$, удовлетворяющее условиям $M(kT) \supset F_3''(k)$, $\prec (M(kT), M_{2,3}) < \varepsilon/6$, где $M_{2,3} = \pi(M_3, M_2)$, и для каждого $\beta \in [0; 3\sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon]$ рассмотрим систему $\dot{y} = (A(t) + Q_{\alpha_0}(t) + S_\beta(t))y$, $S_\beta(t) = \beta P_M(t) - 2\beta P_m(t)$, где $P_M(t)$ и $P_m(t)$ — ортогональные проекторы на $M(t)$ и $m(t) = (M(t))^\perp$ соответственно.

Подберем значение $\beta = \beta_0$ так, чтобы выполнялось равенство $\delta_1(Y) = \delta_1(Z) - \varepsilon T$. Возможность этого выбора обеспечивается непрерывностью по β величины $\delta_1(Y)$, равенством $\delta_1(Y) = \delta_1(Z)$ при $\beta = 0$ и неравенством $\delta_1(Y) \le \delta_1(Z) - 2\varepsilon T$ при $\beta = 3\sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon$.

Для любого решения y системы $B = A + Q_{\alpha_0} + S_{\beta_0}$, удовлетворяющего условию $y(kT) \in M(kT)$, имеем $\chi(y) \ge \delta_1(Y) + \varepsilon T$, откуда следует, во-первых, неравенство $\prec (F_{2,3}'(k), M(kT)) < \varepsilon/6$ (при достаточно больших T), дающее неравенство $\gamma_1 = \prec (F_{2,3}'(k), M_{2,3}) < \varepsilon/3$, а во-вторых — общая ε-разделенность системы B на k-м отрезке, т.е. утверждение 1).

Для решения y_0 системы B, удовлетворяющего условию $\pi(y_0(kT)) = F_3''(k)$, получаем $\chi(y_0) \ge \delta_2(Y) + \varepsilon T$, откуда при достаточно больших T следует неравенство $\angle(F_3'(k), F_3''(k)) < \varepsilon/6$, дающее неравенство $\gamma_2 = \angle(F_3'(k), M_3) < \varepsilon/3$.

Утверждение 3) вытекает из оценок $\max_i(\delta_i(Y) - \delta_i(X)) \le \delta_3(Y) - \delta_1(X) \le 10\sqrt{\varepsilon}T + 5\varepsilon T$, $\max_i(\delta_i(X) - \delta_i(Y)) \le \delta_3(X) - \delta_1(Y) \le 6\sqrt{\varepsilon}T + 3\varepsilon T$.

Рассмотрим поворот H_1 (на угол γ_1), переводящий плоскость $F_{2,3}'(k)$ в $M_{2,3}$, и поворот H_2 (на угол, не превосходящий $\gamma_1 + \gamma_2$) в плоскости $M_{2,3}$, переводящий прямую $H_1F_3'(k)$ в M_3. Тогда поворот $H = H_2H_1$ (на угол, не превосходящий ε) удовлетворяет условиям $HF_{2,3}'(k) = M_{2,3}$, $HF_3'(k) = M_3$, $HF_2'(k) = M_2$, поэтому в соответствии с леммой 10 систему B можно подправить, подвергнув ее преобразованию $S = H$ на отрезке $[kT - 1, kT]$, так, чтобы полученная система (сохраним для нее прежнее обозначение) удовлетворяла и требованию 4).

Учитывая оценку $\|H - I\| < \varepsilon < \nu_0 < 1/30$, получаем утверждение 2):

$$\|B(t) - A(t)\| \le \|Q_{\alpha_0}(t)\| + \|S_{\beta_0}(t)\| + \|B(t) - (A(t) + Q_{\alpha_0}(t) + S_{\beta_0}(t))\| \le$$

$$\le 2\alpha_0 + 2\beta_0 + 8\varepsilon(\|A(t)\| + 2\alpha_0 + 2\beta_0 + 20) \le 10\sqrt{\varepsilon} + 8\varepsilon(\|A\| + 24).$$

Лемма 18 доказана.

Для заданной системы $A \in \mathcal{M}_3$ и чисел $T > 0$, $\varepsilon < 4/9$ и $\mu < \mu_0$ (замечания 3 и 4) обозначим через S_μ и S множества последовательностей σ возможных перестановок $\sigma_k \in S_\mu(k)$ (определение 14) и допустимых перестановок $\sigma_k \in S(k)$ (определение 2 [1]) соответственно (здесь и ниже $k \in \mathbf{N}$).

Определение 15. По данной последовательности $\sigma \in S_\mu$ определим индукцией по k последовательность ζ перестановок $\zeta_k: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, называемых переключениями, и последовательность ξ упорядочивающих перестановок $\xi_k: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ и положим $\xi_1 = (1, 2, 3)$, а если при некотором k уже указана упорядочивающая перестановка ξ_k, то выберем смешивающую (определение 12) на k-м отрезке перестановку ξ_{k+1} так, чтобы перестановка $\zeta_k = \xi_{k+1}\sigma_k\xi_k^{-1}$ была наиболее упорядоченной (определение 11), задав перестановки ζ_k и ξ_{k+1}.

Замечание 5. Определение 15 корректно, так как одна из всех перестановок вида ξ_{k+1} $(\sigma_k\xi_k^{-1})$ при фиксированном выражении в скобках самая упорядоченная.

Лемма 19. *А) Если $\sigma_k \in S_\mu(k)$, ξ_k — смешивающая на k-м отрезке перестановка, а ζ_k —переключение, то*

1) $|\delta_{\xi_k(j)}(X(kT, (k-1)T)) - \delta_j(X(kT, (k-1)T))| \le 4\sqrt{\varepsilon}T$, $j = 1, 2, 3$;

2) $\sigma_k\xi_k \in S_\mu(k)$;

3) $\zeta_k \in S_\mu(k)$.

Б) Все мыслимые множества $S_\mu(k)$ обладают следующими свойствами:

4) они описываются шестью стандартными типами, каждый из которых задается своей образующей перестановкой (см. замечание 2);

5) если выполнено условие из п. б) определения 14, а σ — образующая перестановка, определяемая этим условием, то $\sigma \in S_\mu(k)$;

6) если для множества $S_\mu(k)$ какое-либо условие из п. а) определения 14 выполнено, а для множества $S'_\mu(k)$ оно не выполнено, в то время как другое условие из п. а) для этих множеств выполнено или не выполнено одновременно, то $S_\mu(k) \supset S'_\mu(k)$;

7) существует такое $T_6(\varepsilon, \mu)$, что если $\varepsilon < \mu$ и $T > T_6(\varepsilon, \mu)$, то $S \subset S_\mu$.

В) Пусть фиксированы смешиваемые индексы на k-м отрезке и задана операция, заменяющая каждую перестановку σ наиболее упорядоченной перестановкой $\overline{\sigma}$ вида $\xi_{k+1}\sigma$ (см. замечание 5). Тогда если $\sigma \le \sigma'$, то $\overline{\sigma} \le \overline{\sigma'}$.

Доказательство. Неравенство 1) следует из определения 12, поскольку индексы $\xi_k(j)$ и j либо совпадают, либо смешиваемы.

Утверждение 4) следует из определения 14.

Проверим справедливость утверждения 2): если индексы 2, 3 смешиваемы, то из условия 21) следует условие 31), из условия 13) — условие 31), а условие 32) выполнено всегда, поэтому образующие перестановки могут быть только $(3,2,1)$, $(2,3,1)$ или $(1,3,2)$, а соответствующие им множества возможных перестановок $S_{\text{н}} \subset S_{\text{усл}} \subset S_{\text{мл}}$ обладают проверяемым свойством; аналогично разбираются случаи, когда смешиваемые индексы — $1,2$ или соответственно $1,2,3$.

Утверждение 3) следует из 2), так как $\zeta_k \ge \sigma_k \xi_k$ по определению 15.

Для доказательства утверждения 5) достаточно проверить, что перестановки $(1,3,2)$ и $(2,1,3)$ входят в каждое из множеств $S_{\text{усл}}$, $S_{\text{сл}}$ и $S_{\text{н}}$.

Утверждение 6) следует из включений $S_{\text{усл}}, S_{\text{сл}} \subset S_{\text{н}}$, $S_{\text{ст}}, S_{\text{мл}}, S_{\text{п}} \subset S_{\text{усл}}$, $S_{\text{ст}}, S_{\text{мл}}, S_{\text{п}} \subset S_{\text{сл}}$.

Для доказательства утверждения 7) достаточно проверить, что если $\varepsilon < \mu$, то при достаточно большом T невыполнение какого-либо из условий 31), 13), 32) или 21) определения 14 влечет за собой выполнение соответственно ограничения 3), 4), 1) или 2) из п. с) определения 2 [1]: сравнительно просто разбирается случай, когда и k-й, и $(k+1)$-й отрезки являются отрезками неблизости; в случае верхней близости на k-м отрезке проверяется, что невыполнение условия 13) или 21) влечет за собой ограничение 4) или 2), а в случае нижней близости — что невыполнение условия 31) или 32) влечет за собой ограничение 3) или 1); в случае же общей близости на k-м отрезке все условия определения 14 выполнены; аналогично рассматриваются случаи различной близости на $(k+1)$-м отрезке.

Утверждение В) проверяется непосредственно. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Если дополнительно заданы числа $\beta, \gamma > 0$ и $k \in \mathbf{N}$, то при достаточно малых $\mu < \nu_6(\gamma)$ и $\beta < \nu_5(\mu)$ (лемма 14) можно закрепить в k-й момент конечные подпространства так, что при любом закреплении в этот момент начальных подпространств для всякой последовательности σ возможных перестановок будет реализуемо соответствующее переключение ζ_k.*

Доказательство. Ниже закрепим конечные подпространства в k-й момент так, чтобы при каждом закреплении в этот момент начальных подпространств некоторая перестановка $\zeta'_k \le \zeta_k$ была реализуема для чисел $\beta' = \mu$ и $\gamma' = \gamma/5$ (см. лемму 13: если взять $\mu < (\min(\mu_0, \gamma/20))^3 = \nu_6(\gamma)$, то $\gamma' = \gamma/5 > 3\gamma/20 > 3\beta'$ и $\mu < \mu_0$, т.е. все предпосылки этой леммы будут выполнены). Тогда и перестановка ζ_k в тот же момент по лемме 14 будет реализуема для чисел $\beta < \nu_5(\mu) = \nu_5(\beta')$ и γ, так как $\beta' < \gamma/20 < \gamma/4$ и $\gamma' = \gamma/5 < \gamma/4$.

Зная μ, закрепим конечные подпространства M_1, M_2, M_3 и временно начальные подпространства L'_1, L'_2, L'_3 в соответствии с определением 14 и рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть $(k+1)$-й отрезок является отрезком неблизости. Тогда начальные подпространства L_i в k-й момент задаются однозначно, т.е. $L_i = L'_i$, $i = 1,2,3$, причем перестановка $\sigma = \zeta'_k$, задаваемая определением 14, — образующая, поэтому реализуема для чисел β' и γ', а перестановка ζ_k — одна из возможных (лемма 19.3)) и, стало быть, $\zeta'_k \le \zeta_k$.

б) Пусть $(k+1)$-й отрезок является отрезком верхней близости. Тогда $L_1 = L'_1$, $L_2 \subset L'_{2,3}$.

I. Если выполнялось условие 13′) $\prec (M_{3,2}, L'_{1,2}) < \mu$, то при одном выборе L_2 оно может сохраниться, а при другом нет. В первом случае, поскольку условие 31′) $\prec (M_3, L'_1) < \mu$ не зависит от выбора L_2, достаточно взять в качестве ζ'_k образующую перестановку. Во втором случае возможны два варианта:

1) условие 31′) выполнялось. Тогда новая образующая $\zeta'_k = (2,3,1)$ получается из прежней образующей $(3,2,1)$ умножением на упорядочивающую, поэтому $\zeta_k \geq \zeta'_k$ (лемма 19,B));

2) условие 31′) не выполнялось. Тогда для нового значения $\mu'' = \sqrt[3]{\mu}$ будет выполнено условие 21″) $\angle(M_{3,2}, L'_1) < (\mu'')^3$ (вытекающее из 13′)) и в силу леммы 19.5),B), образующая перестановка ζ'_k, задаваемая числом μ'', не более упорядочена, чем $(2,1,3)$, а требуемая перестановка ζ_k не менее упорядочена, чем прежняя образующая $(3,1,2)$, умноженная на упорядочивающую перестановку, т.е. $\zeta_k \geq \zeta'_k$. Возьмем $\beta'' = \mu''$, тогда $\beta'' = \mu'' < \min(\mu_0, \gamma/20)$ и по лемме 13 перестановка ζ'_k реализуется для чисел β'' и γ', а тем более для чисел $\beta' < \beta''$ и γ'.

Аналогично рассматривается случай II, когда условие 13′) не выполнялось. Случай в), когда $(k+1)$-й отрезок является отрезком нижней близости, разбирается подобно случаю а). В случае же г), когда $(k+1)$-й отрезок является отрезком общей близости, любая перестановка смешивающая, поэтому множество переключений состоит из одной перестановки $(1,2,3)$, не менее упорядоченной, чем любая образующая ζ'_k. Лемма 20 доказана.

Литература

1. *Сергеев И.Н.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35, №10. С.1387 — 1397.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25 сентября 1998 г.