Все рассмотренные здесь определения и результаты можно переформулировать для функции точки, определив функцию отрезка как приращение функции точки.

Теоремы 1 и 2 являются усилением соответствующих результатов работы [4], где мера V_F предполагается абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-01-00332.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ostaszewski K.M.* Henstock integration in the plane // Mem. Amer. Math. Soc. 1986. **359**. 1–106.
2. *Thomson B.S.* Derivates of intervals functions // Mem. Amer. Math. Soc. 1991. **452**. 1–96.
3. *Сакс С.* Теория интеграла. М., 1949.
4. *Bongiorno B., Di Piazza L., Skvortsov V.* A new full descriptive characterization of Denjoy–Perron integral // Real Analysis Exchange. 1996. **21**. № 2.

Поступила в редакцию
12.04.96

УДК 511

О ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ $\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = nxyz}$

М.З. Гараев

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости диофантова уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = nxyz\,. \tag{1}$$

Первые результаты здесь были получены еще в 1856 г. Д.Д. Сильвестром (см. [1, с. 589–600]). Он доказал, что при $n = -6$ уравнение (1) не имеет решений в ненулевых целых числах.

В начале века А. Гурвиц и Л.Д. Морделл показали, что единственными с точностью до перестановки и общего множителя решениями уравнения (1) при $n = -1$ и $n = 5$ в целых ненулевых числах являются тройки $(1,1,-1)$ и $(1,1,2)$ соответственно (см. [2, с. 465–468;3]).

В 1960 г. Д.В.С. Касселс доказал, что уравнение (1) при $n = 1$ не имеет решений в целых ненулевых числах (см. [4, 5]).

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $n \in \{4k, 8k-1, 2^{2m+1}(2k-1)+3\}$ для m и k, пробегающих все натуральные числа, то уравнение (1) не имеет решений в натуральных числах.*

Теорема 2. *Для любого $i \in \{1,2,3,5,6\}$ существует бесконечно много натуральных чисел n вида $8k+i$, для которых уравнение*

$$x^3 + y^3 + 1 = nxy$$

разрешимо в натуральных числах.

Теорема 3. *Уравнение*

$$x^3 + 64y^3 + 1 = 8xyz$$

не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть n — целое число и уравнение (1) разрешимо в ненулевых целых (натуральных) числах. Тогда для любого натурального числа N существует тройка ненулевых целых (натуральных) чисел (x_N, y_N, z_N), являющаяся решением уравнения (1) с условиями*

$$(x_N, y_N) = (y_N z_N, N) = 1\,.$$

Лемма 2. *Пусть n — целое число, (x,y,z) — натуральные числа, удовлетворяющие уравнению (1), $(x,y) = (yz, 2n) = 1$. Далее, положим $d = (x+y, z)$, т.е.*

$$x + y = da, \qquad z = db, \qquad (a,b) = 1\,.$$

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1997. № 2. С.58–61

Тогда существует натуральное число α, такое, что

$$\alpha(z^2 + n(x-y)^2) = (nb-a)(na^2 - 3b^2),$$
$$\alpha(4z^2 + n(x-y)^2) = a(n^2 + 12b^2 - na^2),$$

причем

$$(\alpha, a) = (\alpha, b) = 1, \qquad 4 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (\alpha, nb-a)),\ nb - a > 0.$$

Лемма 3. *В условиях леммы 2 система сравнений*

$$\begin{cases} \alpha(z^2 + n(x-y)^2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (nb-a)), \\ \alpha(4z^2 + n(x-y)^2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ a), \end{cases}$$

не имеет места при $n \in \{4k, 8k-1, 2^{2m+1}(2k-1)+3\}$.

Теорема 2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Если для натуральных чисел x_0, y_0, n_0 выполнено равенство*

$$x_0^3 + y_0^3 + 1 = n_0 x_0 y_0,$$

то имеет место равенство

$$x_1^3 + y_1^3 + 1 = n_1 x_1 y_1,$$

где

$$\begin{cases} x_1 = n_0 x_0 - y_0^2, \\ y_1 = x_0, \\ n_1 = n_0^2 x_0 - n_0 y_0^2 - y_0 x_0^2 \end{cases}$$

— натуральные числа. При этом если $x_0 \geqslant y_0$, то $x_1 > y_1$, $n_1 > n_0$.

Теорема 3 является следствием леммы 4 и теоремы 1.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В.Н. Чубарикову за научное руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dickson L.E.* History of the theory of numbers. V.II. N.Y., 1934.
2. *Hurwitz A.* Zahlentheorie, Algebra und Geometrie. Mathematische Werke. Bd2. Basel, 1933.
3. *Mordell L.J.* The diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$ // Colloque sur la theorie des nombres. Bruxelles, 1955. 67–76.
4. *Cassels J.W.S.* On a diophantine equation // Acta arithm. 1960. **6**. 47–51.
5. *Sansone G., Cassels J.W.S.* Sur la probleme de M. Werner Mnich // Acta arithm. 1962. **7**. 187–190.

Поступила в редакцию
09.10.96

УДК 519.95

О СЛОЖНОСТИ СХЕМ В НЕПОЛНЫХ БАЗИСАХ

А.Б. Угольников

Рассматривается задача о сложности реализации булевых функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в неполных базисах. Получены верхние оценки для функций Шеннона, соответствующих некоторым замкнутым классам (определения см. в [1-5]).

Обозначим через F_2^m множество всех монотонных булевых функций, сохраняющих константу 0 и удовлетворяющих условию $\langle a^m \rangle$, $m = 2, \dots, \infty$. Положим

$$Q_\infty = \{x \vee yz\},\ Q_m = \{x \vee yz, d_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1})\},$$