Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Калейдоскоп «КВАНТА»,
Квант, 2014, номер 3, 58

https://www.mathnet.ru/kvant1777

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
14 декабря 2025 г., 20:46:50

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» № 1)

11. Существуют.

Например, подойдут числа 2, 12, 3, 4: $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

Подобные примеры получаются следующим образом: нужно взять любые четыре различных натуральных числа x, y, z, t с условием $x+y=z+t$ и разделить это равенство на общее кратное этих чисел. В нашем примере $x=6$, $y=1$, $z=4$, $t=3$, а в качестве общего кратного было выбрано их наименьшее общее кратное 12.

12. 12.

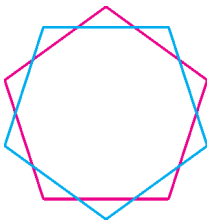

Рис. 3

Примером могут служить два правильных пятиугольника, симметричных друг другу относительно их общего центра (рис.3).

Докажем, что больше 12 частей быть не может. Отрезок может пересекать границу выпуклого многоугольника не более чем в двух точках. Контур одного пятиугольника состоит из пяти отрезков, поэтому он пересекается с контуром другого пятиугольника не более чем в $5\cdot 2=10$ точках. Сделаем сначала разрез по контуру первого пятиугольника. После этого лист распадется на две части – внешнюю и внутреннюю.

Точки пересечения контуров первого и второго пятиугольника делят контур второго пятиугольника на $k\le 10$ ломаных. Будем разрезать лист по очереди вдоль каждой из этих ломаных. При каждом таком разрезе количество частей плоскости увеличивается ровно на 1. Поэтому общее количество частей равно $2+k\le 12$.

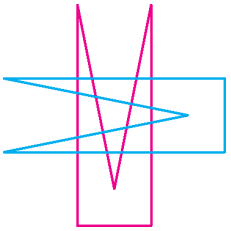

Рис. 4

Замечание. В решении существенно используется условие выпуклости пятиугольников. Если рассматривать и невыпуклые пятиугольники, то количество частей может быть больше 12. На рисунке 4 показан пример для 18 частей.

13. 200.

Перепишем уравнение в виде $xy-x-y=999\,999\,999$. Если прибавить к обеим частям по 1, то слева получится выражение, которое раскладывается на множители: $xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$. Уравнение превращается в такое: $(x-1)(y-1)=1000\,000\,000=10^9=2^9\cdot 5^9$. Поскольку мы ищем решения в целых числах, то первый из сомножителей в левой части делит правую часть, а значит, имеет вид $\pm 2^m\cdot 5^n$, где m и n могут меняться от 0 до 9 (ясно, что x определяется однозначно по первому сомножителю). Таких чисел всего 200. Если первый сомножитель известен, то второй (а вместе с ним и y) определяется однозначно. Значит, всего решений у данного уравнения тоже 200.

14. Прямоугольному.

Если мы сложили из двух треугольников один, то какой-то угол одного вместе с каким-то углом другого составил 180°. Так как прямоугольный треугольник всего один, то это не могут быть два прямых угла. Значит, один из них острый, а другой – тупой. Поэтому один из двух складываемых треугольников тупоугольный. Если полученный треугольник остроугольный, то и второй прикладываемый треугольник остроугольный, а это противоречит условию. Значит, получился прямоугольный треугольник (не составляет труда убедиться в том, что такое действительно возможно).

15. Пусть в стране всего n городов. Выберем любые два из них, А и Б. Теперь распределим маршруты между авиакомпаниями. Первая компания будет совершать рейсы из А во все города, кроме Б, вторая – из Б во все города, кроме А, третья – все остальные рейсы (т.е. из А в Б и все рейсы между оставшимися $n-2$ городами). Покажем, что при таком распределении маршрутов для любой авиакомпании есть хотя бы два таких города, что попасть из одного в другой только рейсами этой авиакомпании нельзя. Для первой и второй авиакомпаний можно взять пару городов А и Б: напрямую можно лететь только третьей компанией, а на всех остальных маршрутах придется делать пересадки на рейсы других компаний. Для третьей авиакомпании подойдут город А и любой другой город, кроме Б.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Понятия «истинная траектория» не существует. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета.

2. Если начальная скорость человека относительно платформы совпадает по направлению со скоростью платформы относительно земли или противоположна ей, то траектория человека относительно земли прямолинейная, в иных случаях – криволинейная.

3. Когда трамвай начинает двигаться с ускорением.

4. $\vec{F}=m\vec{a}$.

5. $\alpha=\operatorname{arctg}(a/g)$; как видно из формулы, угол α от массы грузика не зависит.

6. Угол α не зависит от вида жидкости и определяется по той же формуле, что и в задаче 5. Толщина слоя воды над ртутью будет всюду одинакова, и наклон поверхности ртути не изменится.

7. Шарик будет тянуться вперед по ходу автомобиля.

8. При скольжении без трения поверхность воды расположится параллельно наклонной плоскости; при ускоренном скольжении с трением угол наклона поверхности воды к горизонту станет меньше α; если движение станет равномерным, то угол будет равен нулю.

9. Пробка останется неподвижной относительно стенок сосуда.

10. При свободном падении столб воды не оказывает гидростатического давления, поэтому уровень воды в пробирке будет опускаться до тех пор, пока давление воздуха внутри пробирки не сравняется с внешним давлением.

11. Период колебаний по величине останется равным T, однако маятник будет колебаться «вверх ногами».

12. Нить отвеса установится перпендикулярно полу салона самолета.

13. Нет, так как относительно земли велосипедист покоится и его центростремительное ускорение равно нулю.

14. Вес тела на полюсе больше, чем на экваторе. Однако обнаружить это можно с помощью не рычажных, а пружинных весов. Когда же рычажные весы уравновешены, можно лишь утверждать, что вес тела равен весу гирь.

15. Пробка расположится у оси вращения вверху, свинец – у стенки цилиндра внизу, тело A – в любом положении (если не учитывать сжимаемость воды).

16. На запад. Причина явления – действие кориолисовой силы инерции, возникающей из-за вращения Земли.

Микроопыт

Сила тяжести воды и сила реакции дна ведра при достаточной скорости удерживают в верхней точке воду на круговой траектории. В системе отсчета, связанной с ведром, этот эффект можно объяснить появлением центробежной силы инерции, прижимающей воду ко дну.