Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. I. Vasyunin, S. R. Treil', The inverse spectral problem for the modulus of a Hankel operator,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 4, 54–66

https://www.mathnet.ru/eng/aa31

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.80
May 15, 2025, 22:02:35

В. И. Васюнин, С. Р. Треиль

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДУЛЯ ГАНКЕЛЕВА ОПЕРАТОРА

Доказано, что любой ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор с чисто дискретным спектром, у которого ноль является точкой спектра и ядро либо тривиально, либо бесконечномерно, – любой такой оператор унитарно эквивалентен модулю некоторого оператора Ганкеля. Это утверждение полностью доказывает гипотезу В. В. Пеллера и С. В. Хрущева, сформулированную в сборнике проблем „Linear and Complex Analysis Problem Book" (Lect. Notes in Math. Vol. 1043. P. 92–97).

В настоящей работе доказывается, что любой самосопряженный неотрицательный оператор с чисто дискретной спектральной мерой, удовлетворяющей двум естественным необходимым ограничениям (см. формулировку теоремы), унитарно эквивалентен модулю некоторого оператора Ганкеля. Это утверждение полностью доказывает гипотезу В. В. Пеллера и С. В. Хрущева, сформулированную в сборнике проблем [1], с. 92–97.

Оператором Ганкеля с символом φ обычно называют оператор $H_\varphi\colon f\mapsto P_-\varphi f$, действующий из пространства Харди аналитических в единичном круге функций H^2 в пространство антианалитических функций H^2_-, $H^2_- \overset{\text{def}}{=} L^2\ominus H^2$; P_+ и P_- – ортогональные проекторы в L^2 на H^2 и H^2_-. Символ φ – ограниченная функция на единичной окружности. Если $\hat\varphi(n)$ – ее коэффициенты Фурье, то матрица оператора H_φ в естественных базисах $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ в H^2 и $\{\bar z^{n+1}\}_{n\geqslant 0}$ в H^2_- имеет вид $H_{n,m}= (H_\varphi z^m, \bar z^{n+1}) = (\varphi, \bar z^{m+n+1}) = \hat\varphi(-m-n-1)$,

$$H_{n,m}=\begin{pmatrix} \hat\varphi(-1) & \hat\varphi(-2) & \hat\varphi(-3) & \cdots \\ \hat\varphi(-2) & \hat\varphi(-3) & \hat\varphi(-4) & \cdots \\ \hat\varphi(-3) & \hat\varphi(-4) & \cdots & \\ \cdots & & & \end{pmatrix},$$

Ключевые слова: оператор Ганкеля, спектр, s-числа, произведение Бляшке, интерполяционная задача.

т. е. имеет одинаковые члены на диагоналях $n+m=\text{const}$. Матрицы с таким свойством называют ганкелевыми, и теорема Нехари утверждает, что для любой ганкелевой матрицы, порождающей ограниченный оператор, найдется ограниченная функция φ, для которой матрица оператора Ганкеля H_φ в естественном базисе имеет предписанный вид.

Отметим, что норма оператора Ганкеля равна расстоянию в L^∞ от символа φ до подпространства аналитических функций, или, другими словами, совпадает с нормой антианалитической части символа в BMO, т.е.

$$\|H_\varphi\| = \operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi, H^\infty) = \|P_-\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Это утверждение вместе с теоремой Адамяна–Арова–Крейна [2] дает интерпретацию собственных чисел модуля ганкелева оператора как характеристику аппроксимации символа рациональными дробями. Действительно, согласно теореме Адамяна–Арова–Крейна, s-числа оператора H_φ (т. е. собственные числа его модуля : $|H_\varphi| \overset{\text{def}}{=} (H_\varphi^* H_\varphi)^{1/2}$) выражаются формулой

$$s_n(H_\varphi) = \min\left\{\|H_\varphi - H_\psi\| : \operatorname{rank} H_\psi \leqslant n\right\}.$$

Но по теореме Кронекера оператор Ганкеля ранга n – это оператор с символом, антианалитическая часть которого является рациональной дробью с n полюсами, т. е. n-е s-число оператора H_φ есть в точности расстрояние в норме BMO от антианалитической части символа φ до рациональных функций степени n. Следовательно, поведение s-чисел оператора Ганкеля характеризует рациональную аппроксимацию его символа.

Со всеми упомянутыми здесь понятиями, равно как и о связях со стационарными гауссовскими процессами, можно подробно познакомиться по обзору [3]. Собственно говоря, с упором именно на теорию стационарных гауссовских процессов В. В. Пеллером и С. В. Хрущевым [1] была видвинута гипотеза о том, что для любого компактного самосопряженного оператора, ядро которого либо тривиально, либо бесконечномерно, существует оператор Ганкеля, модуль которого унитарно эквивалентен заданному. В настоящей работе доказаны не только справедливость этой гипотезы, но и более сильное утверждение: вместо компактности модуля предполагается лишь дискретность его спектра.

После того как результаты данной работы были анонсированы в [4] и вместе с доказательством приведены в препринте [5], у других авторов возник интерес к альтернативным доказательствам. Так, Р. Обер построил с помощью теории управления сначала оператор Ганкеля, у которого модуль имеет заданный простой дискретный спектр [6], а в дальнейшем снял ограничение на кратность спектра [7].

Мы хотим поблагодарить профессора Т. Андо (Саппоро, Япония) за очень тщательное чтение препринта [5]. Обнаруженные им неточности в настоящей статье устранены.

Прежде чем строго сформулировать утверждение теоремы, приведем еще некоторые обозначения.

Символом $\rightrightarrows$ будем обозначать равномерную сходимость на компактных подмножествах единичного круга. Число нулей (с учетом кратности) произведения Бляшке B ($B = \prod_\lambda b_\lambda^{k_\lambda(B)}$, $b_\lambda = \frac{|\lambda|}{\lambda}\,\frac{\lambda - z}{1-\bar\lambda z}$) обозначаем символом $\deg B \left(\overset{\text{def}}{=} \sum_\lambda k_\lambda(B)\right)$. Для непрерывной комплекснозначной функции φ на единичной окружности, не принимающей значения 0, целое число $\operatorname{wind}\varphi$ есть число оборотов графика функции φ вокруг нуля, другими словами, $\operatorname{wind}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} d(\arg\varphi(\zeta))$.

Символ span $\{...\}$ вводится для замкнутой линейной оболочки подмножества $\{...\}$. Спектр оператора A обозначается символом $\sigma(A)$, а модуль оператора A – это неотрицательный оператор $|A| \stackrel{\text{def}}{=} (A^*A)^{1/2}$. Нижним пределом $\underline{\lim}\, E_n$ семейства подпространства E_n называется подпространство $\{x : \lim \operatorname{dist}(x, E_n) = 0\}$.

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть A – ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $0 \in \sigma(A)$;

2) *либо* а) $\dim \operatorname{Ker} A = \infty$,
либо б) $\dim \operatorname{Ker} A = 0$;

3) *оператор A имеет чисто дискретную спектральную меру.*

Тогда существует ганкелев оператор, модуль которого унитарно эквивалентен оператору A.

Отметим, что условия 1) и 2) являются необходимыми ограничениями на модуль оператора Ганкеля. Действительно, $0 \in \sigma(H_\varphi)$, поскольку, например, $H_\varphi z^n \to 0$. Если $\operatorname{Ker} H_\varphi \neq \{0\}$, то, будучи z-инвариантным подпространством, $\operatorname{Ker} H_\varphi$ имеет вид θH^2 для некоторой внутренней функции θ, следовательно, $\dim \operatorname{Ker} H_\varphi = \infty$. Условие 3) заведомо необходимым не является, так как, например, модуль оператора Гильберта имеет абсолютно непрерывный спектр (см. [8]). Нам неизвестно, являются ли необходимые условия 1) и 2) достаточными для существования ганкелева оператора с модулем, унитарно эквивалентным оператору A.

Настоящая теорема усиливает результат одного из авторов [9], где доказывалась аналогичная теорема при еще одном дополнительном условии:

4) *положительный спектр оператора A прост.*

Отметим, что метод, предложенный в [9], не позволяет построить оператор Ганкеля, модуль которого имеет кратные собственные значения. Причиной этого, грубо говоря, является то, что у неотрицательной ганкелевой матрицы ненулевые собственные числа обязательно простые.

Основными моментами в доказательстве теоремы являются две следующие леммы. Первая позволяет строить оператор Ганкеля конечного ранга с произвольным модулем, вторая – осуществить предельный переход от операторов конечного ранга к операторам с произвольным дискретным спектром.

Лемма 1 (см. теорему 1.19 в [3]). *Пусть Φ, Ψ – конечные произведения Бляшке, причем $\deg\Psi - \deg\Phi = k \geqslant 0$. Тогда модуль оператора $H_{\Phi\overline{\Psi}}$ унитарно эквивалентен оператору $|H_{\Psi\overline{\Phi}}| \oplus I_k$, где I_k – единичный оператор на некотором k-мерном подпространстве.*

Доказательство. Положим $\varphi = \Psi\overline{\Phi}$, и пусть $T_\varphi = V|T_\varphi|$ – полярное разложение оператора T_φ. Известно (см., например, [10]), что для оператора Тёплица с непрерывным символом имеет место равенство

$$\dim \operatorname{Ker} T_\varphi = \max\{0, -\operatorname{wind}\varphi\}.$$

В нашем случае $\operatorname{wind}\varphi = \deg\Psi - \deg\Phi = k$, т. е. $\dim \operatorname{Ker} T_\varphi = 0$, $\dim \operatorname{Ker} T_{\overline{\varphi}} = k$. Другими словами, V – изометрический оператор, и $I - VV^*$ – ортопроектор на k-мерное подпространство $\operatorname{Ker} T_{\overline{\varphi}}$.

Используя тождество $|H_\varphi|^2 + |T_\varphi|^2 = T_{|\varphi|^2}$, получаем

$$|H_{\bar\varphi}|^2 = I - |T_{\bar\varphi}|^2 = I - T_\varphi T_\varphi^* = I - V|T_\varphi|^2 V^* = V|H_\varphi|^2 V^* + (I - VV^*),$$

что и доказывает утверждение леммы. ●

Как уже отмечалось, доказанная лемма позволяет по индукции строить операторы Ганкеля конечного ранга с заданным модулем. Действительно, предположим, что мы умеем строить операторы Ганкеля, ранг которых меньше n, и хотим построить оператор Ганкеля ранга n. Не умаляя общности, можно считать, что 1 является наибольшим s-числом оператора, который мы должны построить, и пусть k — кратность этого s-числа. По индукционному предположению, мы можем построить оператор Ганкеля H_φ ранга $n-k$, модуль которого имеет все предписанные собственные числа с заданными кратностями, за исключением собственного числа 1. Мы всегда можем символ φ выбрать в виде $\varphi = h\bar{B}$, где B – произведение Бляшке степени $n-k$, h – ограниченная аналитическая функция, причем $\|h\|_\infty = \|H_\varphi\| < 1$. Хорошо известно (см., например, [11]), что любую аналитическую в единичном круге функцию, максимум модуля которой строго меньше единицы, можно в n точках проинтерполировать произведением Бляшке любой заданной степени, не меньшей, чем n. В частности, мы можем выбрать произведение Бляшке θ степени n, интерполирующее функцию h в нулях произведения B, другими словами,

$$\theta - h \in BH^\infty.$$

Тогда очевидно, что $H_{\theta\bar{B}} = H_{h\bar{B}} = H_\varphi$ и, по лемме 1, оператор $H_{B\bar\theta}$ — искомый, так как $|H_{B\bar\theta}|$ унитарно эквивалентен оператору $|H_\varphi| \oplus I_k$.

Недостатком описанной процедуры является то, что мы не можем следить за нулями последовательно возникающих произведений Бляшке, определяющих символ ганкелева оператора; нули функции θ никак не связаны с нулями функции B. Это не дает возможности осуществить предельный переход к операторам бесконечного ранга. Чтобы устранить этот недостаток, мы несколько усложним процедуру перехода, но получим возможность контролировать поведение нулей.

Итак, пусть у нас есть оператор Ганкеля с символом φ, $\varphi = a\theta\bar{B}$, и мы хотим построить новый оператор с символом ψ, $\psi = b\Phi\bar\Psi$, $b > a > 0$, так, чтобы модуль нового оператора имел те же собственные числа той же кратности, что и оператор $|H_\varphi|$, и плюс еще собственное число b кратности k. Для этого мы сначала найдем произведение Бляшке Φ, степень которого совпадает со степенью произведения B и которое решает следующую интерполяционную задачу

$$b\Phi - a\theta \in BH^\infty.$$

Это возможно, так как $\|\frac{a}{b}\theta\|_\infty = \frac{a}{b} < 1$. Фиксировав Φ, найдем произведение Бляшке Ψ, $\deg\Psi = \deg B + k$, которое удовлетворяет условию

$$\Psi - B \in \Phi H^\infty.$$

Чтобы доказать возможность построения такой функции Ψ достаточно проверить, что значения функции B в нулях произведения Φ совпадают со значениями некоторой аналитической функции, равномерная норма которой меньше единицы, т.е. что $\|B\|_{H^\infty/\Phi H^\infty} < 1$. Но так как $\deg\Phi = \deg B$, то операторы $|H_{B\bar\Phi}|$ и $|H_{\Phi\bar{B}}|$, согласно лемме 1, унитарно эквивалентны, и поэтому

$$\|B\|_{H^\infty/\Phi H^\infty} = \|H_{B\bar\Phi}\| = \|H_{\Phi\bar{B}}\| = \frac{a}{b}\|H_{\theta\bar{B}}\| \leqslant \frac{a}{b} < 1.$$

Итак, требуемая функция Ψ существует. Покажем, что оператор $b|H_{\Phi\tilde{\Psi}}|$ унитарно эквивалентен (будем писать $\simeq$) оператору $a\,|H_{\theta\tilde{B}}|\oplus bI_k$.

$$b|H_{\Phi\tilde{\Psi}}|\simeq b(|H_{\Psi\tilde{\Phi}}|\oplus I_k)=b|H_{B\tilde{\Phi}}|\oplus bI_k\simeq$$

$$\simeq b|H_{\Phi\tilde{B}}|\oplus bI_k=a\,|H_{\theta\tilde{B}}|\oplus bI_k.$$

Надежда проследить за нулями произведения Ψ основана на следующем соображении. Представим Ψ в виде произведения $\Psi=\Psi_1\Psi_2$, $\deg\Psi_1=\deg B$, $\deg\Psi_2=k$. Выберем нули Ψ_2 произвольно, но достаточно далеко от нулей Φ, чтобы $\Psi_2(\lambda)$ было близко к единице для всех тех λ, для которых $\Phi(\lambda)=0$. Тогда мы должны решить для этих λ интерполяционную задачу $\Psi_1(\lambda)=B(\lambda)/\Psi_2(\lambda)$, и, поскольку значения $B(\lambda)/\Psi_2(\lambda)$ сколь угодно мало отличаются от значений $B(\lambda)$, мы сможем выбрать произведение Ψ_1 сколь угодно близким к произведению B.

При индуктивном построении символа оператора Ганкеля мы на каждом шаге будем на единицу увеличивать степень произведений Бляшке, стоящих в числителе и знаменателе так, что появится один „далекий" корень, а остальные корни будут близки к корням произведений Бляшке, построенных на предыдущем шаге. Строгое обоснование этой процедуры опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть θ, B – конечные произведения Бляшке, $h\in H^\infty$, $\|h\|_\infty\leqslant 1$, $\theta-h\in BH^\infty$. И пусть заданы на отрезке* $(t_0,1)$ *функции*

1) $t\mapsto\lambda(t)$, $\lambda(t)\in\mathbf{C}$, $|\lambda(t)|<1$, $|\lambda(t)|\xrightarrow[t\to1]{}1$;

2) $t\mapsto B^t$, B^t *– конечное произведение Бляшке,* $\deg B^t=\deg B$ $\forall t\in(t_0,1)$ и $\|B^t-B\|_\infty\xrightarrow[t\to1]{}0$;

3) $t\mapsto h^t$, $h^t\in H^\infty$, $\|h^t\|_\infty\leqslant1$, $h^t\underset{t\to1}{\rightrightarrows}h$, $\varlimsup\limits_{t\to1}|h^t(\lambda(t))|<1$.

Тогда для некоторого t_1, $t_1\geqslant t_0$, найдутся функции, заданные на отрезке $(t_1,1)$,

а) $t\mapsto\mu(t)$, $\mu(t)\in\mathbf{C}$, $|\mu(t)|<1$, $|\mu(t)|\xrightarrow[t\to1]{}1$;

б) $t\mapsto\theta^t$, θ^t *– конечное произведение Бляшке,* $\deg\theta^t=\deg\theta$ $\forall t\in(t_1,1)$, $\|\theta^t-\theta\|_\infty\xrightarrow[t\to1]{}0$,

такие, что $\theta^t b_{\mu(t)}-h^t\in B^t b_{\lambda(t)}H^\infty$ $\forall t\in(t_1,1)$.

Доказательство проводим индукцией по $\deg B$. В качестве базы индукции рассмотрим случай $\deg B=0$. Положим тогда $\theta^t\equiv\theta$, а $\mu(t)$ найдем, решая уравнение

$$b_{\mu(t)}(\lambda(t))=\frac{h^t(\lambda(t))}{\theta(\lambda(t))},$$

которое разрешимо, как только $|h^t(\lambda(t))|<|\theta(\lambda(t))|$, что выполнено для t, достаточно близких к 1, поскольку $|\theta(\lambda(t))|\to1$ при $t\to1$ и $\varlimsup\limits_{t\to1}|h^t(\lambda(t))|<1$.

Пусть теперь $\deg B\geqslant1$, и предположим, что утверждение леммы справедливо для всех произведений Бляшке, у которых число нулей меньше, чем $\deg B$. Фиксируем какой-нибудь корень ν произведения B. Тогда в некоторой окрестности единицы найдется функция $t \mapsto \nu(t)$, значения которой являются корнями произведений B^t, т. е. $B^t(\nu(t)) = 0$, $\nu(t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \nu$. Положим

$$B_\nu = \frac{B}{b_\nu},\ B_\nu^t = \frac{B^t}{b_{\nu(t)}},\ h_\nu = \frac{h(\nu) - h}{1 - \overline{h(\nu)}h} \cdot \frac{1}{b_\nu},$$

$$h_\nu^t = \frac{h^t(\nu(t)) - h^t}{1 - \overline{h^t(\nu(t))}\,h^t} \cdot \frac{1}{b_{\nu(t)}},\ \theta_\nu = \frac{h(\nu) - \theta}{1 - \overline{h(\nu)}\,\theta} \cdot \frac{1}{b_\nu}.$$

Тогда $\theta_\nu - h_\nu \in B_\nu H^\infty$, $h_\nu^t \underset{t\to 1}{\rightrightarrows} h_\nu$. Далее, так как $h^t(\nu(t)) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} h(\nu)$, $|b_{\nu(t)}(\lambda(t))| \to 1$, то

$$\varlimsup_{t\to 1} |h_\nu^t(\lambda(t))| \leqslant \frac{|h(\nu)| + \varlimsup |h^t(\lambda(t))|}{1 + |h(\nu)|\,\varlimsup |h^t(\lambda(t))|} < 1.$$

Таким образом, используя индукционное предположение, находим функции $\sigma(t)$ и θ_ν^t, удовлетворяющие условиям а) и б) и соотношению

$$\theta_\nu^t b_{\sigma(t)} - h_\nu^t \in B_\nu^t b_{\lambda(t)} H^\infty.$$

Положим

$$\Psi^t = \frac{h^t(\nu(t)) - b_{\nu(t)}\, b_{\sigma(t)}\, \theta_\nu^t}{1 - \overline{h^t(\nu(t))}\, b_{\nu(t)}\, b_{\sigma(t)}\, \theta_\nu^t}.$$

Поскольку

$$\deg \Psi^t = \deg \theta_\nu^t + 2 = \deg \theta_\nu + 2 = \deg \theta + 1$$

и

$$\Psi^t \underset{t\to 1}{\rightrightarrows} \frac{h(\nu) - b_\nu \theta_\nu}{1 - \overline{h(\nu)}\, b_\nu \theta_\nu} = \theta,$$

то функция Ψ^t допускает факторизацию $\Psi^t = \theta^t b_{\mu(t)}$, где $|\mu(t)| \to 1$ и $\|\theta^t - \theta\|_\infty \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$, $\deg \theta^t = \deg \theta$. Условие $\Psi^t - h^t \in B^t b_{\lambda(t)} H^\infty$ вытекает непосредственно из определения функции Ψ^t. ●

Следствие 1. *Пусть θ, B – конечные произведения Бляшке, $f \in H^\infty$, $\theta - f \in BH^\infty$ и $\|H_{f\bar{B}}\| < 1$. Если B^t – семейство конечных произведений Бляшке, $\|B^t - B\|_\infty \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$ и $f^t \in H^\infty$, $\|f^t - f\|_\infty \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$, то найдется семейство θ^t, сходящееся по* sup-*норме к θ, которое удовлетворяет соотношению $\theta^t - f^t \in B^t H^\infty$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $\|f\|_\infty < 1$. Пусть $t \mapsto \lambda(t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию 1) леммы. Положим $h^t = f^t b_{\lambda(t)}$, эта функция удовлетворяет условию 3) при $h = f$. Таким образом, найдутся функции $\mu(t)$ и θ^t, для которых выполнено соотношение

$$\theta^t b_{\mu(t)} - f^t b_{\lambda(t)} \in B^t b_{\lambda(t)} H^\infty.$$

Поскольку $|\theta^t(\lambda(t))| \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$, то $\theta^t(\lambda(t)) \neq 0$ при t, достаточно близких к 1, а следовательно, $\mu(t) = \lambda(t)$ и $\theta^t - f^t \in B^t H^\infty$. ●

Следствие 2. *Пусть θ, B – конечные произведения Бляшке, $h \in H^\infty$, $\theta - h \in BH^\infty$ и $\|H_{h\bar{B}}\| < 1$. Тогда при некотором t_0 найдется функция $t \mapsto \theta^t$, заданная на интервале $(t_0, 1)$, удовлетворяющая условиям:* 1) θ^t *– произведение Бляшке,* $\deg \theta^t = \deg \theta$; 2) $\|\theta^t - \theta\|_\infty \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$, 3) $\theta^t b_t - h \in BH^\infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|h\|_\infty < 1$. Пусть g^t – семейство ограниченных аналитических функций, решающих интерполяционную задачу

$$g^t(\lambda) = h(\lambda)\,[1 - \frac{1}{b_t(\lambda)}] \quad \forall \lambda : B(\lambda) = 0.$$

Поскольку $\max\limits_{\lambda : B(\lambda)=0} \{|g^t(\lambda)|\} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$, то можно выбрать g^t, удовлетворяющее условию $\|g^t\|_\infty \underset{t\to 1}{\rightrightarrows} 0$. Положим $h^t = (h - g^t)\, b_t$. Ясно, что $h^t \rightrightarrows h$, $\lim \|h^t\|_\infty = \|h\|_\infty < 1$ и $h^t - h \in BH^\infty$. Положим в лемме $\lambda(t) = t$ и $B^t = B$. При достаточно больших t функция $\mu(t)$, существование которой гарантирует лемма, обязана совпадать с функцией тождественно равной t, действительно, при больших t $\theta^t(t) \neq 0$, и условие $\theta^t b_{\mu(t)} - h^t \in Bb_t H^\infty$ влечет $b_{\mu(t)}(t) = 0$, т. е. $\mu(t) = t$. Следовательно, $\theta^t b_t - h^t \in BH^\infty$ и $\theta^t b_t - h \in BH^\infty$. ●

Доказательство теоремы. Пусть $\{s_k\}$ – произвольным образом пронумерованная последовательность положительных собственных чисел оператора A, учитывающая их кратность, т. е. значение $s_k = \lambda$ встречается в последовательности столько раз, какова кратность собственного числа λ.

По индукции построим последовательность операторов Ганкеля H_n со следующими свойствами:

1) $H_n = a_n H_{\Phi_n \bar{\Psi}_n}$; $a_n \in \mathbf{C}$; Φ_n, Ψ_n – конечные произведения Бляшке; $\operatorname{rank} H_n = \deg \Psi_n = n+1$;

2) $H_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s_k(\cdot, f_{n,k}) g_{n,k}$, где $\{f_{n,k}\}_{k=0}^{n}$, $\{g_{n,k}\}_{k=0}^{n}$ – ортонормированные системы;

3) $\|g_{n,k} - g_{n-1,k}\| < 2^{-n}$, $\|f_{n,k} - f_{n-1,k}\| < 2^{-n}$, $0 \leqslant k < n$;

4) если а) $\dim \operatorname{Ker} A = \infty$, то $\sup\limits_n \sum\limits_\lambda (1 - |\lambda|) k_\lambda(\Psi_n) < \infty$,

если б) $\dim \operatorname{Ker} A = 0$, то $\sum\limits_\lambda (1 - |\lambda|) k_\lambda(\Psi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Построение указанной последовательности операторов H_n завершило бы доказательство теоремы. Действительно, условие 3) гарантирует сильную сходимость операторов H_n к некоторому оператору Ганкеля H с разложением Шмидта $H = \sum s_k(\cdot, f_k) g_k$, где $f_k = \lim\limits_{n\to\infty} f_{n,k}$, $g_k = \lim\limits_{n\to\infty} g_{n,k}$. То же условие 3) обеспечивает равенство

$$\operatorname{span}\{f_k : 0 \leqslant k < \infty\} = \underline{\lim_n} \operatorname{span}\{f_{n,k} : 0 \leqslant k \leqslant n\},$$

и, таким образом,

$$(\operatorname{Ker} H)^\perp = \operatorname{span}\{f_k : k \geqslant 0\} = \varliminf_{n\to\infty} \operatorname{span}\{f_{n,k} : 0 \leqslant k \leqslant n\} =$$

$$= \varliminf_{n\to\infty} (\operatorname{Ker} H_n)^\perp = \varliminf_{n\to\infty} (\Psi_n H^2)^\perp.$$

Следовательно (см. [12], с. 57), условие 4) гарантирует равенство $\operatorname{Ker} H = \{0\}$ в случае б) и неравенство $\operatorname{Ker} H \neq \{0\}$ (и автоматически $\dim \operatorname{Ker} H = \infty$) в случае а).

Отметим, что выполнение условия 2) означает просто совпадение s-чисел оператора H_n (с учетом кратностей) с набором $s_0, \dots, s_n$.

Операторы H_n будем строить так, чтобы оператор H_{n+1} был близок к оператору $\mathcal{H}_{n+1}$,

$$\mathcal{H}_{n+1} = H_n + s_{n+1}\,(\cdot, f_{n,n+1}) g_{n,n+1}, \ \|f_{n,n+1}\| = \|g_{n,n+1}\| = 1,$$

причем

$$f_{n,n+1} \perp \operatorname{span}\{f_{n,k} : 0 \leqslant k \leqslant n\},$$

$$g_{n,n+1} \perp \operatorname{span}\{g_{n,k} : 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Так как операторы H_{n+1} и $\mathcal{H}_{n+1}$ имеют одинаковые наборы s-чисел (с учетом кратности), то из близости этих операторов следует возможность выбора разложения Шмидта оператора H_{n+1},

$$H_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} s_k\,(\cdot, f_{n+1,k})\, g_{n+1,k},$$

близкого к разложению Шмидта

$$\mathcal{H}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} s_k\,(\cdot, f_{n,k})\, g_{n,k}$$

оператора $\mathcal{H}_{n+1}$ и, следовательно, удовлетворяющего условию 3). Формально возможность такого выбора вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть T – компактный оператор, s – его s-число кратности r и a – расстояние от s до множества остальных s-чисел оператора T. Пусть*

$$s \sum_{k=1}^{r} (\cdot, f_k)\, g_k$$

– отрезок ряда Шмидта оператора T, соответствующий s-числу s.

Пусть компактный оператор T' такой, что $\|T' - T\| < \epsilon$, тоже имеет s-число s кратности r. Тогда найдутся ортонормированные системы $\{f'_k\}_{k=1}^{r}$, $\{g'_k\}_{k=1}^{r}$,

$$\|f_k - f'_k\| < \delta = \delta(\epsilon, a, s, \|T\|),$$

$$\|g_k - g'_k\| < \delta,$$

где $\delta \to 0$ при $\epsilon \to 0$ такие, что сумма

$$s \sum_{k=1}^{r} (\cdot, f'_k)\, g'_k$$

будет отрезком Шмидта оператора T', соответствующим s-числу s.

Доказательство леммы представляется вполне элементарным, поэтому мы не будем его приводить.

Последовательность пар конечных произведений Бляшке $\{\Phi_n, \Psi_n\}$ мы получим как „диагональ" более широкого семейства $\{\Phi_{n,k}, \Psi_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant m_n\}$. Пусть $\{a_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant m_n\}$ – множество попарно различных чисел в $\{s_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$; $a_{n,k} > a_{n,k-1}$; k_n – номер числа s_n в множестве $\{a_{n,k}\}$, т. е.

$$a_{n,k} = \begin{cases} a_{n-1,k}, & k < k_n, \\ s_n, & k = k_n, \\ \left.\begin{array}{ll} a_{n-1,k-1}, & \text{если } a_{n-1,k_n} > s_n \\ a_{n-1,k}, & \text{если } a_{n-1,k_n} = s_n \end{array}\right\} & k > k_n. \end{cases}$$

Положим $a_{n,0} = 0$, $\Phi_{n,0} = \Psi_{n,0} = 1$ и построим указанное семейство конечных произведений Бляшке $\{\Phi_{n,k}\}$, $\{\Psi_{n,k}\}$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

i) $a_{n,k}\Phi_{n,k} - a_{n,k-1}\Phi_{n,k-1} \in \Psi_{n,k-1}H^\infty$,

ii) $\Psi_{n,k} - \Psi_{n,k-1} \in \Phi_{n,k}H^\infty$,

iii) $\deg \Phi_{n,k-1} = \deg \Psi_{n,k} = \deg \Psi_{n,k-1} + \operatorname{card}\{i : i \leqslant n, s_i = a_{n,k}\}$.

Уже отмечалось то, что условия i)–iii) позволяют утверждать, что s-числа оператора $a_{n,k}H_{\Phi_{n,k}\bar{\Psi}_{n,k}}$ (с учетом кратности) отличаются от s-чисел оператора $a_{n,k-1}H_{\Phi_{n,k-1}\bar{\Psi}_{n,k-1}}$ ровно на одно s-число $a_{n,k}$, кратность которого совпадает с количеством одинаковых чисел, равных $a_{n,k}$, в множестве $\{s_i : 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

Повторим это рассуждение еще раз. Условие i) влечет

$$a_{n,k}H_{\Phi_{n,k}\bar{\Psi}_{n,k-1}} = a_{n,k-1}H_{\Phi_{n,k-1}\bar{\Psi}_{n,k-1}},$$

и условие ii) –

$$H_{\Psi_{n,k}\bar{\Phi}_{n,k}} = H_{\Psi_{n,k-1}\bar{\Phi}_{n,k}}.$$

Согласно лемме 1, условие iii) обеспечивает унитарную эквивалентность операторов

$$|H_{\Phi_{n,k}\bar{\Psi}_{n,k-1}}| \simeq |H_{\Psi_{n,k-1}\bar{\Phi}_{n,k}}| \text{ и } |H_{\Phi_{n,k}\bar{\Psi}_{n,k}}| \simeq |H_{\Psi_{n,k}\bar{\Phi}_{n,k}}| \oplus I_{n,k},$$

где $I_{n,k}$ – единичный оператор на подпространстве размерности $\operatorname{card}\{i : i \leqslant n, s_i = a_{n,k}\}$. Собирая все вместе, получаем

$$a_{n,k}|H_{\Phi_{n,k}\bar{\Psi}_{n,k}}| \simeq a_{n,k}I_{n,k} \oplus a_{n,k-1}|H_{\Phi_{n,k-1}\bar{\Psi}_{n,k-1}}|.$$

Строгое неравенство $a_{n,k} > a_{n,k-1}$ позволяет решить интерполяционные задачи i)–ii) относительно $\Phi_{n,k}$, $\Psi_{n,k}$, зная $\Phi_{n,k-1}$, $\Psi_{n,k-1}$. Полагая $\Phi_n = \Phi_{n,m_n}$, $\Psi_n = \Psi_{n,m_n}$, мы получим семейство операторов H_n, удовлетворяющее условиям 1) и 2). Чтобы добиться выполнения условий 3) и 4) проследим за „близостью" функций $\Phi_{n,k}$ и $\Psi_{n,k}$ при последовательных значениях n, используя лемму 2.

При переходе к следующему значению n мы ничего не будем менять для $k<k_n$, т. е. положим $\Phi_{n,k}=\Phi_{n-1,k}$, $\Psi_{n,k}=\Psi_{n-1,k}$. Для $k\geqslant k_n$ введем сперва вспомогательное семейство $\{\widetilde{\Phi}_{n,k}, \widetilde{\Psi}_{n,k}\}$, удовлетворяющее условиям i)–ii), следующим образом:

если $m_n=m_{n-1}$, то $\widetilde{\Phi}_{n,k}=\Phi_{n-1,k}$, $\widetilde{\Psi}_{n,k}=\Psi_{n-1,k}$;

если $m_n=m_{n-1}+1$, то $a_{n,k_n}=s_n>a_{n,k_n-1}$, и поэтому разрешима интерполяционная задача

$$a_{n,k_n}\widetilde{\Phi}_{n,k_n}-a_{n,k_n-1}\Phi_{n,k_n-1}\in\Psi_{n,k_n-1}H^\infty,$$

решение которой определяет $\widetilde{\Phi}_{n,k_n}$, $\deg\widetilde{\Phi}_{n,k_n-1}=\deg\Psi_{n,k_n-1}$; кроме того, положим $\widetilde{\Psi}_{n,k_n}=\Psi_{n,k_n-1}$, и для $k>k_n$ пусть $\widetilde{\Phi}_{n,k}=\Phi_{n-1,k-1}$, $\widetilde{\Psi}_{n,k}=\Psi_{n-1,k-1}$.

Пусть теперь $k=k_n$, $\Phi_{n,k}=\widetilde{\Phi}_{n,k}$ и $\mu_k(t)=t$. Используя лемму 2 и следствие 2 к ней, построим произведение Бляшке $\Psi^t_{n,k}$, зависящее от параметра t, решая интерполяционную задачу

$$\Psi^t_{n,k}b_t-\Psi_{n,k-1}\in\Phi_{n,k}H^\infty,\quad \|\Psi^t_{n,k}-\widetilde{\Psi}_{n,k}\|_\infty\underset{t\to1}{\longrightarrow}0.$$

Далее, для $k=k_n+1$

$$a_{n,k}\Phi^t_{n,k}b_{\lambda_k(t)}-a_{n,k-1}\Phi_{n,k-1}\in\Psi^t_{n,k-1}b_tH^\infty,$$

$$\|\Phi^t_{n,k}-\widetilde{\Phi}_{n,k}\|_\infty\underset{t\to1}{\longrightarrow}0,$$

$$\Psi^t_{n,k}b_{\mu_k(t)}-\Psi^t_{n,k-1}b_t\in\Phi^t_{n,k}b_{\lambda_k(t)}H^\infty,$$

$$\|\Psi^t_{n,k}-\widetilde{\Psi}_{n,k}\|_\infty\underset{t\to1}{\longrightarrow}0.$$

И далее, при всех k, $k_n+2\leqslant k\leqslant m_n$ с помощью той же леммы индуктивно строим семейства $\Phi^t_{n,k}$, $\Psi^t_{n,k}$ и $\lambda_k(t)$, $\mu_k(t)$, решая интерполяционные задачи

$$a_{n,k}\Phi^t_{n,k}b_{\lambda_k(t)}-a_{n,k-1}\Phi^t_{n,k-1}b_{\lambda_{k-1}(t)}\in\Psi^t_{n,k-1}b_{\mu_{k-1}(t)}H^\infty,$$

$$\Psi^t_{n,k}b_{\mu_k(t)}-\Psi^t_{n,k-1}b_{\mu_{k-1}(t)}\in\Phi^t_{n,k}b_{\lambda_k(t)}H^\infty,$$

$$\|\Phi^t_{n,k}-\widetilde{\Phi}_{n,k}\|_\infty\underset{t\to1}{\longrightarrow}0,\quad \|\Psi^t_{n,k}-\widetilde{\Psi}_{n,k}\|_\infty\underset{t\to1}{\longrightarrow}0.$$

Завершая это построение при $k=m_n$, получаем функции

$$\Phi^t=\Phi^t_{n,m_n},\quad \Psi^t=\Psi^t_{n,m_n},\quad \lambda(t)=\lambda_{m_n}(t),\quad \mu(t)=\mu_{m_n}(t)$$

и семейство ганкелевых операторов $H^t=a_nH_{\Phi^t b_{\lambda(t)}\overline{\Psi^t}\overline{b}_{\mu(t)}}$ $(a_n=a_{n,m_n})$,

множество s-чисел которых есть $\{s_k:0\leqslant k\leqslant n\}$ при всех t, достаточно близких к 1. При этом $\Phi^t \to \widetilde{\Phi} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\Phi}_{n,m_n}$, $\Psi^t \to \widetilde{\Psi} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\Psi}_{n,m_n}$ и $a_n H_{\widetilde{\Phi}\bar{\widetilde{\Psi}}} = a_{n-1} H_{\Phi_{n-1}\bar{\Psi}_{n-1}} = H_{n-1}$.

Положим

$$\alpha^t = \frac{\Phi^t((\mu(t)))\, b_{\lambda(t)}(\mu(t))}{\Psi^t(\mu(t))}, \quad \beta^t = \frac{\Phi^t b_{\lambda(t)} - \alpha^t \Psi^t}{b_{\mu(t)}},$$

тогда $\Phi^t b_{\lambda(t)} = \alpha^t \Psi^t + \beta^t b_{\mu(t)}$ и

$$H^t = a_n \alpha^t H_{\bar{b}_{\mu(t)}} + a_n H_{\beta^t \bar{\Psi}^t}.$$

Покажем, что второе слагаемое стремится к H_{n-1}:

$$a_n H_{\beta^t \bar{\Psi}^t} = a_n H_{b_{\mu(t)}\beta^t \bar{\Psi}^t} + o(1) = a_n H_{b_{\lambda(t)}\Phi^t \bar{\Psi}^t} + o(1) =$$

$$= a_n H_{b_{\lambda(t)}\widetilde{\Phi}\bar{\widetilde{\Psi}}} + o(1) = a_n H_{\widetilde{\Phi}\bar{\widetilde{\Psi}}} + o(1) = H_{n-1} + o(1).$$

Поскольку ядра и образы в двух слагаемых асимптотически ортогональны, то

$$H^t = H_{n-1} + s_n(\cdot, f^t) g^t + o(1),$$

где $\| f^t \| = \| g^t \| = 1$, $f^t \in \operatorname{Ker} H_{n-1}$, $g^t \perp \operatorname{Range} H_{n-1}$. Это влечет асимптотическую близость разложений Шмидта (см. лемму 3), так что при t, достаточно близких к единице, выполняется условие 3), наложенное на операторы H_n. Пусть, кроме того, число t настолько велико, что нули функции Ψ^t близки к нулям функции Ψ_{n-1}, например,

$$\left| \sum_\lambda (1-|\lambda|)\, k_\lambda(\Psi^t) - \sum_\lambda (1-|\lambda|)\, k_\lambda(\Psi_{n-1}) \right| < 2^{-n}$$

и еще $|\mu(t)| > 1 - 2^{-n}$. Это позволит нам добиться выполнения условия 4). Фиксируя такое t и полагая $\Phi_n = \Phi^t b_{\lambda(t)}$, $\Psi_n = \Psi^t b_{\mu(t)}$, завершаем индукционный шаг в случае $\dim \operatorname{Ker} A = \infty$. Построенная таким образом последовательность операторов $\{H_n\}$ удовлетворяет условиям 1)–4), и, следовательно, теорема для этого случая доказана.

Если $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то необходима небольшая модификация конструкции. Поскольку $0 \in \sigma(A)$, то в этом случае обязательно $\inf\{s_n\} = 0$. Воспользуемся этим, чтобы на некоторых шагах индукции добавлять к функции Ψ_n фактор Бляшке b_μ с корнем μ, достаточно далеким от окружности, а близость разложений Шмидта будет достигаться за счет малости добавляемого на этом шаге s-числа s_n.

Итак, пусть построены операторы $H_1, \dots, H_n$. Оператор H_{n+1} мы выберем из семейства операторов H^s, которые имеют, во-первых, те же s-числа, что и оператор H_n, причем соответствующий отрезок ряда Шмидта будет тоже близок (удовлетворять условию 3)), и, во-вторых, еще одно s-число, равное s, являющееся параметром, пробегающим значения от нуля до $\min\{s_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$.

Фиксируем точку λ, $|\lambda| < 1/2$, положим $a_{n,0} = s$, $\Phi_0^s = 1$, $\Psi_0^s = b_\lambda$, и для $s < a_{n,1}$ найдем конечные произведения Бляшке Φ_k^s и Ψ_k^s, решая следующие интерполяционные задачи

$$a_{n,k}\Phi_k^s - a_{n,k-1}\Phi_{k-1}^s \in \Psi_{k-1}^s H^\infty;$$

$$\Psi_k^s - \Psi_{k-1}^s \in \Phi_k^s H^\infty;$$

$$\deg \Phi_{k+1}^s = \deg \Psi_k^s = \deg \Phi_{k-1}^s + \operatorname{card}\{i : i \leqslant n,\ s_i = a_{n,k}\}.$$

Следствие 1 к лемме 2 позволяет удовлетворить еще следующему условию сходимости: $\| \Phi_k^s - \Phi_{n,k} b_\lambda \|_\infty \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$; $\| \Psi_k^s - \Psi_{n,k} b_\lambda \|_\infty \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, $1 \leqslant k \leqslant m_n$. Таким образом, $H^s \overset{\text{def}}{=} a_n H_{\Phi_{m_n}^s \overline{\Psi}_{m_n}^s} \longrightarrow a_n H_{\Phi_n \overline{\Psi}_n} = H_n$, что позволяет утверждать близость разложений Шмидта у H^s и H_n, требуемую условием 3) для достаточно малых s. Кроме того, сходимость $\Psi_{m_n}^s \longrightarrow \Psi_n b_\lambda$ гарантирует неравенство

$$\sum_\lambda (1 - |\lambda|)\, k_\lambda (\Psi_{m_n}^s) > \sum_\lambda (1 - |\lambda|)\, k_\lambda (\Psi_n) + 1/2$$

при достаточно малых s. Фиксируем некоторое s_N из семейства $\{s_k : k > n\}$, для которого это имеет место, после чего положим $H_{n+1} = H^{s_N}$ (и соответственно $\Phi_{n+1,k} = \Phi_k^{s_N}$, $\Psi_{n+1,k} = \Psi_k^{s_N}$). Естественно теперь перенумеровать семейство $\{s_k\}$, присвоив номер $n+1$ числу s_N и увеличив на единицу номера у всех s_k, $n<k<N$. Потом продолжим построение функций $\Phi_{n,k}$ и $\Psi_{n,k}$ до номера $n=N$ включительно по первоначальной схеме, а затем на шаге с номером $N+1$ снова применим описанную процедуру, добавляя в Ψ_n еще один корень, не превосходящий по модулю $1/2$ и т. д. Это позволяет добиться выполнения условия 4) б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_\lambda (1 - |\lambda|)\, k_\lambda (\Psi_n) = \infty$ и тем самым завершить доказательство теоремы. ●

Список литературы

[1] *Hruščëv S. V., Peller V. V.* Moduli of Hankel operators, past and future // Lect. Notes. in Math. *1984.* Vol. 1043. P. 92–97.

[2] *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги // Мат. сб.*1971.* Т. 86, № 1. С. 34–75.

[3] *Пеллер В. В., Хрущев С. В.* Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат. наук. *1982.* Т. 37, № 1. С. 53–124.

[4] *Nikol'skii N. K.* Ha-plitz operators: a survey of some recent results // Operators and Function Theory / Ed. S. C. Power. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. Boston; Lancaster, *1985.* P. 87–137.

[5] *Васюнин В. И., Треиль С. Р.* Обратная спектральная задача для модуля ганкелева оператора. Препринт ЛОМИ, P-8-85. Л., *1985.*

[6] *Ober R.* A note on a system theoretic approach to a conjecture by Peller–Khrushchev // System and Control Letters. *1988.* Vol. 8. P. 303–306.

[7] *Ober R.* A note on a System Theoretic Approach to a Conjecture by Peller–Khrushchev: The general Case. Preprint Cambridge University. *1987.*

[8] *Rosenblum M.* On the Hilbert matrix // Proc. Amer. Math. Soc. *1958.* Vol. 9, N 1. P. 137–140.

[9] *Треиль С. Р.* Модули ганкелевых операторов и задача В. В. Пеллера–С. В. Хрущева // Исследования по линейным операторам и теории функций. XIV: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Т. 141. Л.: Наука, *1985*. С. 39–55.

[10] *Douglas R. G.* Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators // CBMS, Providence, Amer. Math. Soc. *1973*. N 15.

[11] *Уолш Дж.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит. *1961*.

[12] *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, *1980*.

Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 15 февраля 1989 г.