ИЮЛЬ 1994 г., ТОМ 30, № 7

УДК 517.958

М. М. КАРЧЕВСКИЙ, В. Н. ПАЙМУШИН

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В работе исследуются вариационные задачи, возникающие при описании напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойных оболочек.

Проблемы, связанные с исследованием устойчивости моментного равновесия трехслойных элементов конструкций [1], потребовали разработки для них уточненных вариантов теории. Соотношения такой уточненной теории, позволяющие исследовать смешанные формы потери устойчивости с большим показателем изменяемости параметров как невозмущенного, так и возмущенного НДС, были построены в работе [2] с использованием предложенного в [3] обобщенного вариационного принципа.

В настоящей работе изучаются вопросы существования и единственности решений соответствующих вариационных задач, предлагаются и исследуются методы их аппроксимации.

1. Постановка задачи. Задача о равновесии трехслойной пологой оболочки с трансверсально-мягким заполнителем может быть сформулирована [2] как задача об отыскании стационарных точек функционала

$$L(u,\sigma)=\Phi(u)+l(u,\sigma)-F(\sigma).$$

Здесь

$$\Phi(u)=\Phi_0(u)+\Phi_1(u^1)+\Phi_2(u^2),$$

$$\Phi_k(u^k)=\int_\Omega \varphi_k(\varepsilon^k,\varkappa^k)\,dx-\int_\Omega f^k\cdot u^k dx,\quad k=1,2,$$

$$\Phi_0(u)=\int_\Omega C_1(w^2-w^1)^2dx,$$

$$l(u,\sigma)=-\int_\Omega ((u_i^2-u_i^1)\sigma^i+\hbar_1\omega_i^1\sigma^i+\hbar_2\omega_i^2\sigma^i)\,dx,$$

$$F(\sigma)=\int_\Omega (C\sigma\cdot\sigma+C_2(\operatorname{div}\sigma)^2)\,dx,$$

Ω (ограниченная двумерная область) — проекция срединной поверхности оболочки на координатную плоскость x_1x_2, $u^k=(u_1^k,u_2^k,w^k)$, $k=1,2,$— смещения точек срединной поверхности нижнего $(k=1)$ и верхнего $(k=2)$ внешних слоев соответственно; u_i^k — касательные, w^k — нормальные смещения (прогибы), $\sigma=(\sigma^1,\sigma^2)$ — напряжения сдвига в заполнителе, $f^k=(f_1^k,f_2^k,f_3^k)$ — нагрузки, приложенные к внешним слоям; $\varepsilon^k=$ $=(\varepsilon_{11}^k,\varepsilon_{12}^k,\varepsilon_{22}^k)$, $\varkappa^k=(\varkappa_{11}^k,\varkappa_{12}^k,\varkappa_{22}^k)$ — компоненты тангенциальной и изгибной деформаций срединных поверхностей внешних слоев; приняты соотношения теории среднего изгиба:

$$2\varepsilon_{ij}^{k}=\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}+\frac{\partial w^k}{\partial x_i}\,\frac{\partial w^k}{\partial x_j}+k_{ij}^{k}w^k,$$

$$\varkappa_{ij}^{k}=-\frac{\partial w_i^k}{\partial x_j},\ i,j=1,2;$$

$\omega_i^k=\dfrac{\partial w^k}{\partial x_j}$, $i=1,2,$— углы поворота нормалей, k_{ij}^k — начальные кривизны внешних слоев; функции φ_k (плотности потенциальной энергии изгиба внешних слоев), матрица C, постоянные C_1, C_2 характеризуют материал внешних слоев и заполнителя; $\bar{h}_k=h+h_k$, $2h$ — толщина заполнителя, $2h_k$ $(k=1,2)$ — толщина внешнего слоя.

В дальнейшем будем предполагать, что внешние слои жестко закреплены по контуру, торцы заполнителя свободны от напряжений. Это означает, что искомые функции u^k, σ должны быть подчинены следующим граничным условиям:

$$u^k=0,\ \frac{\partial w^k}{\partial \nu}=0,\ \sigma\cdot\nu=0,\ x\in\Gamma,$$

Γ — граница области Ω, ν — нормаль, внешняя к области Ω.

Предполагается также, что

1) функции $\varphi_k(\xi)=\varphi_k(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_6)$ — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции и $c_{1k}|\xi|^p\leqslant\varphi_k(\xi)\leqslant c_{2k}|\xi|^p$, где c_{1k}, c_{2k}, $p=\mathrm{const}$, $p>1$, $c_{1k}, c_{2k}>0$;

2) матрица C симметрична и положительно определена, постоянные C_1, C_2 положительны;

3) $k_{ij}^k\in L_{r_k}$, $r_k>1$, $k=1,2$.

В простейшем случае, когда материал внешних слоев подчиняется закону Гука, функции φ_k — положительно-определенные квадратичные формы, условие 1) выполнено при $p=2$. Условие 2) выполнено, если материал заполнителя подчиняется закону Гука.

Замечание 1. Сформулированная задача может описывать в уточненной постановке [2] НДС как во всей области трехслойной оболочки или пластины, так и в некоторой локализованной области непологой оболочки в заранее, вообще говоря, неизвестной зоне потери устойчивости.

2. Исследование разрешимости задачи. В соответствии с условиями 1)—3) функционал $L(u,\sigma)$ естественно рассматривать как функционал над пространством $V\times E_0$, $(u\in V,\ \sigma\in E_0)$, где $V=\{\mathring{W}_p^{(1)}\times\mathring{W}_p^{(1)}\times\mathring{W}_p^{(2)}\}^2$, $E_0=\{\sigma\in(L_2)^2,\ \operatorname{div}\sigma\in L_2,\ \sigma\cdot\nu=0,\ x\in\Gamma\}$ (по поводу основных свойств пространства E_0 см., например, [4]).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)—3). Тогда функционал L имеет хотя бы одну стационарную точку, если: 1) $p\geqslant 2$, $f^k\in V^*$, $k=1,2$; 2) $p<2$, $f^k\in V^*$, $f_i^k=0$, $i,k=1,2$.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $p>1$. Форма $l(u,\tau)$ — непрерывная билинейная форма над $V\times E_0$.*

Следствие. *Существует линейный ограниченный оператор $L_{12}:E_0\to V^*$ такой, что $l(u,\tau)=\langle L_{12}\tau,u\rangle_V$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ — отношение двойственности между V, V^*.*

Лемма 2. *Стационарная точка функционала L — решение системы уравнений*

$$L_{11}u+L_{12}\sigma=0, \tag{1}$$

$$L_{12}^{*}u-L_{22}\sigma=0, \tag{2}$$

где $L_{11}: V \to V$, $L_{22}: E_0 \to E_0$ — *градиенты функционалов* Φ, F *соответственно.*

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Функционал* $\Phi: V \to R$ *слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен.*

Доказательство. Функционалы $\Phi_1, \Phi_2: \mathring{W}_p^{(1)} \times \mathring{W}_p^{(1)} \times \mathring{W}_p^{(2)} \to R$ слабо полунепрерывны снизу и коэрцитивны [5]. Функционал $\Phi_0: V \to R$ также, очевидно, слабо полунепрерывен снизу и неотрицателен. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 4. *Оператор* $L_{22}: E_0 \to E_0$ *самосопряжен и положительно определен.*

Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 вытекает существование оператора L_{22}^{-1}, обратного к L_{22}, поэтому задача (1), (2) эквивалентна уравнению

$$L_{11}u + Bu = 0, \tag{3}$$

где $B = L_{12}L_{22}^{-1}L_{12}^*: V \to V^*$.

Уравнению (3) поставим в соответствие задачу минимизации

$$\min_{u \in V} \Phi_4(u), \tag{4}$$

где $\Phi_4(u) = \Phi(u) + \langle Bu, u \rangle_V / 2$.

Ясно, что $\langle Bu, u \rangle_V \geqslant 0$ при любом $u \in V$, поэтому Φ_4 коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу. Отсюда следует, что задача (4), а следовательно, и уравнение (3) имеют хотя бы одно решение. Теорема доказана.

3. Геометрически линейное приближение. Если при описании прогибов внешних слоев ограничиться геометрически линейным приближением, т. е. в выражениях для компонент тангенциальной деформации пренебречь квадратичными слагаемыми, то функционалы Φ_1, Φ_2, а следовательно, и Φ — выпуклые функционалы (см., например, [5]) и относительно свойств стационарных точек функционала L нетрудно получить дополнительную информацию.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* Φ — *выпуклый функционал. Тогда всякая стационарная точка функционала* L *есть его седловая точка.*

Действительно, если (u, τ) — стационарная точка функционала L, то (u, τ) — решение системы (1), (2), и для любого $v \in V$ имеем $\langle L_{12}\tau, v \rangle_V = \langle \tau, L_{12}^* v \rangle_{E_0} = -\langle L_{11}u, v \rangle_V$, следовательно,

$$L(v, \tau) = \Phi(v) - F(\tau) + \langle \tau, L_{12}^* v \rangle_{E_0} = \Phi(v) - F(\tau) - \langle L_{11}u, v \rangle_V,$$

$$L(u, \tau) = \Phi(u) - F(\tau) + \langle \tau, L_{12}^* u \rangle_{E_0} = \Phi(u) - F(\tau) - \langle L_{11}u, u \rangle_V.$$

Ясно, что $L(v, \tau) - L(u, \tau) = \Phi(v) - \Phi(u) - \langle L_{11}u, v - u \rangle_V \geqslant 0$, поскольку Φ — выпуклый функционал и его градиент совпадает с субградиентом (см., например, [6]).

С другой стороны, для любого $\sigma \in E_0$ аналогично получаем $L(u, \sigma) - L(u, \tau) = -(F(\sigma) - F(\tau) - \langle L_{22}\tau, \sigma - \tau \rangle_{E_0}) \leqslant 0$, поскольку F — квадратичный и, следовательно, выпуклый функционал.

Таким образом, $L(u, \sigma) \leqslant L(u, \tau) \leqslant L(v, \tau)$ $\forall v \in V$, $\forall \sigma \in E_0$, т. е. (u, τ) — седловая точка функционала L.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда компонента* τ *стационарной точки функционала* L *определяется однозначно. Если дополнительно функции* φ_k, *а следовательно, и функционал* Φ *строго выпуклы, то и компонента* u *стационарной точки функционала* L *определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть (u_1, τ_1), (u_2, τ_2) — стационарные точки функционала L. Тогда $\langle L_{11}u_1 - L_{11}u_2, u_1 - u_2 \rangle + \langle L_{22}\tau_1 - L_{22}\tau_2, \tau_1 - \tau_2 \rangle = 0$. Градиент выпуклого (строго выпуклого) функционала — монотонный (строго монотонный) оператор (см., например, [6]). Поэтому $\tau_1 = \tau_2$, если Φ выпуклый, и $\tau_1 = \tau_2$, $u_1 = u_2$, если Φ — строго выпуклый функционал. Теорема доказана.

4. Внутренняя аппроксимация [7] задачи (1), (2). Пусть V_h, E_{0h}, $h \to 0$,— семейства подпространств, полные в V, E_0 соответственно. Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать пару функций $u_h \in V_h$, $\tau_h \in E_{0h}$ — стационарную точку функционала L на $V_h \times E_{0h}$:

$$\frac{d}{dt} L(u_h + tv_h, \tau_h + t\sigma_h)|_{t=0} = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \ \sigma_h \in E_{0h}.$$

Полагая $a_{11}(u, v) = \langle L_{11}u, v \rangle$ $\forall u, v \in V$, $a_{22}(\tau, \sigma) = \langle L_{22}\tau, \sigma \rangle$ $\forall \tau, \sigma \in E_0$, получим для отыскания u_h, τ_h систему уравнений

$$a_{11}(u_h, v_h) + l(\tau_h, v_h) = 0 \ \forall v_h \in V_h, \tag{5}$$

$$a_{22}(\tau_h, \sigma_h) - l(\tau_h, u_h) = 0 \ \forall \sigma_h \in E_{0h}. \tag{6}$$

Замечание 2. При построении пространств V_h, E_{0h} можно использовать, например, хорошо известные пространства конечных элементов, полные в $\mathring{W}_p^{(1)}$, $\mathring{W}_p^{(2)}$ (см., например, [7, 8]).

Теорема 4. *При любом $h > 0$ решение задачи (5), (6) существует. Последовательность u_h, τ_h приближенных решений допускает равномерную по h априорную оценку: $\|u_h\|_V \leqslant c_1$, $\|\tau_h\|_{E_0} \leqslant c_2$.*

Доказательство. Существование решения задачи (5), (6) доказывается фактически точно так же, как и для исходной задачи, путем сведения задачи (5), (6) к задаче минимизации функционала

$$\Phi_4^h(u_h) = \Phi(u_h) + \langle L_{12}^h (L_{22}^h)^{-1} L_{12}^{h*} u_h, u_h \rangle_V / 2$$

на пространстве V_h. Здесь $L_{12}^h : E_{0h} \to V_h$, $L_{22}^h : E_{0h} \to E_{0h}$ — линейные операторы, определяемые тождествами:

$$\langle L_{12}^h \sigma_h, v_h \rangle_V = l(\sigma_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \ \sigma \in V_h,$$

$$\langle L_{22}^h \sigma_h, \tau_h \rangle_{E_0} = a_{22}(\tau_h, \sigma_h) \quad \forall \sigma_h, \tau_h \in E_{0h}.$$

Для получения априорной оценки заметим, что $\Phi_4^h(u_h) \leqslant \Phi_4^h(0) = 0$, откуда вследствие положительной определенности оператора L_{22}^h и коэрцитивности функционала Φ получаем $\|u_h\|_V \leqslant c_1$. Априорная оценка для τ_h теперь может быть получена на основании уравнения (6). Теорема доказана.

Теорема 5. *Существует последовательность $h \to 0$ такая, что $u_h \rightharpoonup u$ (слабо), $\tau_h \to \tau$ (сильно), где (u, τ) — стационарная точка функционала L.*

Доказательство. Из теоремы 4 вытекает существование $u \in V$, $\tau \in E_0$ и последовательности $h \to 0$ таких, что $u_h \rightharpoonup u$, $\tau_h \rightharpoonup \tau$. Покажем, что (u, τ) — стационарная точка функционала L.

Пусть $v \in V$, $\sigma \in E_0$ произвольны. В силу полноты последовательности пространств V_h, E_{0h} в V, E_0 соответственно существуют последовательности v_h, σ_h такие, что $v_h \to v$, $\sigma_h \to \sigma$.

По определению u_h, τ_h имеем

$$F(\tau_h) - l(\tau_h, u_h) \leqslant F(\sigma_h) - l(\sigma_h, u_h). \tag{7}$$

Ясно, что $u_h \to u$ (сильно) в $V_1 = L_q \times L_q \times \mathring{W}_q^{(1)}$ $\forall q > 1$. Поэтому $l(\tau_h, u_h) \to l(\tau, u)$. Используя теперь непрерывность и слабую полунепрерывность снизу квадратичного функционала F, получим

$$F(\tau) \leqslant \varliminf_{h \to 0} F(\tau_h), \quad F(\sigma) = \lim_{h \to 0} F(\sigma_h),$$

$$F(\tau) - l(\tau, u) \leqslant F(\sigma) - l(\sigma, u). \tag{8}$$

Вследствие произвольности σ неравенство (8) означает, что $L_{12}^{*}u - L_{22}\tau = 0$.

Далее, в силу определения u_h имеем $\Phi(u_h) + l(\tau_h(u_h), u_h)/2 \leqslant \Phi(v_h) + l(\tau_h(v_h), u_h)/2$, где $\tau_h(v_h) = (L_{22}^{h})^{-1} L_{12}^{h*} v_h$. Используя теперь рассуждения, аналогичные применявшимся при проведении предельного перехода в неравенстве (7), получим $\Phi(u) + l(\tau(u), u)/2 \leqslant \Phi(v) + l(\tau(v), u)/2$, где $\tau(v) = (L_{22})^{-1} L_{12}^{*} v$, причем поскольку v произвольно, то $L_{11}u + L_{12}\tau = 0$.

Таким образом, u, τ — стационарная точка L. Докажем теперь сильную сходимость τ_h к τ. Имеем $a_{22}(\tau_h, \sigma_h) - l(\tau_h, u_h) = 0$ $\forall \sigma_h \in E_{0h}$, $a_{22}(\tau, \sigma) - l(\tau, u) = 0$ $\forall \sigma \in E_0$, откуда элементарными выкладками получаем $a_{22}(\tau_h - \tau, \tau_h - \tau) = l(\tau_h - \tau, u_h - u) + l(\tau - \sigma_h, u_h - u) + a_{22}(\tau_h - \tau, \sigma_h - \tau)$, и, значит, $\|\tau_h - \tau\|_{E_0} \leqslant c(\|u_h - u\|_V + \|\sigma_h - \tau\|_{E_0}) \to 0$ при соответствующем выборе последовательности σ_h. Теорема доказана.

Замечание 3. При исследовании разрешимости и сходимости приближенной задачи (5), (6) можно отказаться от предположения о том, что u_h минимизирует Φ_4^h на V_h. Разрешимость задачи и сходимость приближенного решения к точному удается при этом доказать, используя результаты теории коэрцитивных псевдомонотонных операторов [9].

Замечание 4. Сильную сходимость u_h к u в пространстве V можно доказать в геометрически линейном приближении при условиях на функции φ_k, обеспечивающих сильную монотонность и липшиц-непрерывность оператора L_{11}.

Литература

1. Паймушин В. Н., Орлов Ю. В. // Изв. вузов. Авиационная техника. 1990. № 2. С. 17—22.
2. Паймушин В. Н. // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 11. С. 32—38.
3. Паймушин В. Н. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 23, № 2. С. 1083—1086.
4. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. М., 1980.
5. Карчевский М. М. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 7. С. 1196—1203.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.
7. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
8. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию 1 марта 1994 г.