



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Белоногов, Характеризация некоторых конечных простых групп бипримарными подгруппами, *Алгебра и логика*, 1971, том 10, номер 6, 603–619

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

28 марта 2025 г., 11:49:35



## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП БИПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.А. БЕЛОНОВ

### В в е д е н и е

Конечная группа  $G$  называется б и п р и м а р н о й, если ее порядок  $|G|$  делится точно на два различных простых числа. В настоящей работе свойствами бипримарных подгрупп четного порядка охарактеризованы следующие серии конечных простых групп: проективные специальные линейные группы  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$ , проективные специальные унитарные группы  $PSU(3, 2^{2n})$  при  $n > 1$ , группы Сузуки  $Sz(q)$ , группа Янко  $J_1$  порядка 175560 и группы типа Ри. Основным результатом является теорема 1, в которой описываются конечные неразрешимые группы  $G$ , удовлетворяющие следующему условию.

**УСЛОВИЕ (\*).** Каждая бипримарная подгруппа четного порядка группы  $G$  либо 2-замкнута, либо расщепляема.

Группы, удовлетворяющие условию (\*), будем называть кратко **(\*)-группами**.

**ТЕОРЕМА 1.** Конечная неразрешимая группа  $G$  удовлетворяет условию (\*) тогда и только тогда, когда

$$G = H \lambda K,$$

где  $K$  - разрешимая (\*)-группа с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой,  $|K : C_K(H)|$  нечетен и выполнено одно из следующих условий:

1)  $H \cong Sz(q)$ ,  $M_9$  или  $PGL(2, q)$  при не-

чётном  $q > 3$  и  $(|H|, |K|) = 1$  ;

2)  $H \cong J_1$  или  $PSL(2, 2^n)$  при  $n > 1$  , и  $(|H|, |K|) = 2^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ;

3)  $H \cong PSL(2, p^n)$  при нечётном простом  $p$  и  $p^n > 5$  , и  $(|H|, |K|) = 2^\alpha p^b$ ,  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$ , причём

$$\alpha = 0 \text{ при } p^n \equiv \pm 1 \pmod{8},$$

$$b = 0 \text{ при } p^n \equiv 1 \pmod{4},$$

а при  $ab > 0$  холловская бипримарная  $\{2, p\}$  - подгруппа в  $K$  2-замкнута;

4)  $H = L_1 \times \dots \times L_s$ ,  $s > 1$ ,  $L_i \cong PSL(2, 3^{n_i})$  при  $i = 1, \dots, s$ , где  $n_1, \dots, n_s$  - попарно взаимно простые нечётные числа, и  $(|H|, |K|) = 2^\alpha 3^b$ ,  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$ , а при  $ab > 0$  холловская бипримарная  $\{2, 3\}$  - подгруппа в  $K$  2-замкнута.

Группу  $G$ , удовлетворяющую заключению теоремы 1, для которой выполнено условие  $i$ ), где  $i = 1, 2, 3$  или 4, будем называть группой типа  $(i)$ .

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Конечная простая неабелева группа  $G$  удовлетворяет условию  $(*)$  тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из групп

$$PSL(2, q) \text{ при } q > 3, Sz(q) \text{ и } J_1.$$

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Для конечной простой неабелевой группы  $G$  следующие условия эквивалентны:

1) каждая бипримарная подгруппа чётного порядка группы  $G$  обладает нильпотентным расщеплением;

2)  $G$  обладает нильпотентным расщеплением;

3)  $G \cong PSL(2, q)$  при  $q > 3$  или  $Sz(q)$ .

Действительно, так как группа Янко  $J_1$  имеет бипримарную подгруппу  $B \cong A_4 \times C_2$ , которая не является расщепляемой, то импли-

кация 1)  $\implies$  3) непосредственно вытекает из следствия 1; импликации же 3)  $\implies$  2) и 2)  $\implies$  1) очевидны.

Эквивалентность условий 2) и 3) была доказана ранее М. Сузуки [13].

Отметим также, что теорема 1 обобщает результат работы [1].

Следствие 1 можно усилить, расширив условие (ж) до следующего:

**УСЛОВИЕ (жж).** Каждая би примарная под-группа чётного порядка группы  $G$  является либо  $(TI)$ -группой, либо расщепляемой группой.

Под  $(TI)$ -группой понимается конечная группа, в которой любые две различные силовские 2-подгруппы пересекаются по единичной подгруппе (см. [15]). При этом 2-замкнутая группа также считается  $(TI)$ -группой.

**ТЕОРЕМА 2.** Конечная простая неабелева группа  $G$  удовлетворяет условию (жж) тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих групп:

$$PSL(2, q) \text{ при } q > 3,$$

$$PSU(3, 2^{2n}) \text{ при } n > 1,$$

$$Sz(q),$$

$$J_1,$$

группы типа Ри.

Под группой типа Ри понимается конечная простая неабелева группа  $G$ , в которой все инволюции сопряжены и централизатор инволюции  $j$  имеет вид  $C_G(j) = \langle j \rangle \times L$ , где  $L \simeq PSL(2, 3^{2n+1})$  при некотором  $n > 0$ . Многие свойства таких групп найдены в работах Янко и Томпсона [9] и Уарда [20]. Очень вероятно, что единственными группами типа Ри являются простые группы Ри  $G_2^f(3^{2n+1})$ .

Тот факт, что группы типа Ри удовлетворяют условию (жж) легко получить из [9]. Легко заметить также, что в группе, удовлетворяющей условию (жж), все 2-локальные подгруппы удовлетворяют условию (ж). Используя этот факт и теорему 1, можно получить доказательство

теоремы 2, повторив почти дословно доказательство леммы 1 из доказательства теоремы 1. Поэтому доказательство теоремы 2 мы не пишем.

**СЛЕДСТВИЕ.** Для конечной простой неабелевой группы  $G$  следующие условия эквивалентны:

- 1) каждая бипримарная подгруппа чётного порядка группы  $G$  является  $(TI)$ -группой;
- 2)  $G$  является  $(TI)$ -группой;
- 3)  $G \simeq PSL(2, 2^n)$  при  $n > 1$ ,  $PSU(3, 2^{2n})$  при  $n > 1$  или  $Sz(q)$ .

Действительно, импликация 1)  $\implies$  3) непосредственно следует из теоремы 2, а импликация 3)  $\implies$  2) и 2)  $\implies$  1) очевидны.

Эквивалентность условий 2) и 3) была доказана М.Сузуки в работе [15].

Напомним теперь некоторые определения и обозначения.

Группа называется *расщепляемой*, если она является теоретико-множественным объединением нескольких своих собственных попарно взаимно простых подгрупп. Говорят, что группа  $G$  обладает *нильпотентным расщеплением*, если она является теоретико-множественным объединением нескольких своих попарно взаимно простых nilпотентных подгрупп (в частности, и сама  $G$  может быть nilпотентной).

Каждая из записей  $A \wedge B$  и  $B \wedge A$  обозначает полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .  $\langle M \rangle$  обозначает группу, порожденную множеством  $M$ .

Следуя Сузуки [16], группу  $G$  назовем  $\mathcal{D}$ -группой, если она содержит собственную подгруппу  $A$  такую, что все элементы в  $G \setminus A$  имеют порядок 2. Бипримарная группа  $G$  является  $\mathcal{D}$ -группой тогда и только тогда, когда  $G = (Q \times T) \wedge \langle a \rangle$ , где  $Q$  - силовская подгруппа нечётного порядка из  $\mathcal{G}$ ,  $T$  - 2-группа,  $|\langle a \rangle| = 2$  и  $a^{-1}xa = x^{-1}$  для всех  $x \in Q \times T$ . В частности, подгруппа  $Q \times T$  абелева. Каждая бипримарная  $\mathcal{D}$ -группа расщепляема. Подробное изложение результатов о расщепляемых группах имеется в книге [2].

Из описания расщепляемых групп следует, что условие  $(\ast)$  эквивалентно следующему условию:

**УСЛОВИЕ  $(\ast')$ .** Если  $B = TQ$  - би примарная подгруппа группы  $G$ ,  $T$  - ее силовская 2-подгруппа и  $Q$  - ее силовская подгруппа нечётного порядка, то  $B$  есть группа одного из следующих типов:

- 1)  $B = T \rtimes Q$  (2-замкнута),
- 2)  $B = Q \rtimes T$  - группа Фробениуса,
- 3)  $B = Q \rtimes T$  -  $\mathcal{D}$ -группа,
- 4)  $B \simeq S_4$ .

Заметим, что в группах типов 2) - 4) нет нормальных подгрупп нечётного индекса.

$S_n$ ,  $A_n$  и  $C_n$  обозначают соответственно симметрическую группу степени  $n$ , знакопеременную группу степени  $n$  и циклическую группу порядка  $n$ .

$M_9$  - подгруппа из  $P\Gamma L(2,9)$ , являющаяся нерасщепляемым расширением  $PSL(2,9)$  с помощью группы порядка 2.

2-локальной подгруппой группы  $G$  называется нормализатор в  $G$  какой-либо ее неединичной 2-подгруппы.

Дальнейшее содержание работы составляет доказательство теоремы 1.

### § 1. Доказательство теоремы 1

**Необходимость.** Для доказательства теоремы мы применим схему доказательства теоремы 2 из [1]. Всюду в этом параграфе  $G$  обозначает конечную неразрешимую  $(\ast)$ -группу такую, что всякая неразрешимая  $(\ast)$ -группа меньшего порядка является группой одного из типов (1) - (4). Леммы 1 - 5 в совокупности доказывают, что группа  $G$  сама является группой одного из типов (1) - (4). Отсюда по закону индукции следует, что каждая неразрешимая  $(\ast)$ -группа есть группа одного из типов (1) - (4).

Нетрудно заметить, что группа  $G$  обладает следующими свойствами:

- (А) Каждая собственная неразрешимая подгруппа  $H$  группы  $G$

является группой одного из типов (1) - (4). В частности,  $H$  имеет характеристическую подгруппу, которая изоморфна  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$ ,  $Sz(q)$  или  $J_1$ .

(Б) Каждая собственная 2-локальная подгруппа группы  $G$  либо разрешима, либо есть группа одного из типов (2), (3) при  $p^2 \equiv \pm 3 \pmod{8}$  и (4). Если она неразрешима, то ее силовская 2-подгруппа - элементарная абелева.

(В) Каждая собственная фактор-группа группы  $G$  по разрешимой нормальной подгруппе является группой одного из типов (1) - (4).

ЛЕММА 1. Если группа  $G$  простая, то она изоморфна одной из групп  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$ ,  $Sz(q)$  и  $J_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы установим некоторые свойства силовских 2-подгрупп группы  $G$ , пользуясь известными классификационными результатами.

Если силовские 2-подгруппы группы  $G$  диэдральные, то по результату Горенштейна и Уолтера [7]  $G$  изоморфна  $PSL(2, p^2)$  при  $p > 2$  или  $A_7$ . Но группа  $A_7$  имеет подгруппу  $\langle (567), (12)(56), (1234)(56) \rangle \simeq C_3 \wedge S_4$ , которая не удовлетворяет условию (\*). Следовательно,  $G \simeq PSL(2, p^2)$  - группа типа (3).

Если силовские 2-подгруппы группы  $G$  полудиэдральные, то по результату Уонга [21] все инволюции группы  $G$  сопряжены между собой, а централизаторы инволюций не 2'-замкнуты. Пусть  $x$  - инволюция из центра силовской 2-подгруппы  $T$  группы  $G$ , так что  $T \subseteq C_G(x)$ .  $C_G(x)$  разрешим, так как в противном случае согласно свойству (Б) подгруппа  $T$  должна быть абелевой. Будучи не 2'-замкнутым  $C_G(x)$  должен содержать бипримарную холловскую подгруппу  $TQ$ , которая также не 2'-замкнута. Кроме того,  $TQ \not\cong S_4$ , так как  $Z(TQ) \ni x \neq 1$ , а  $Z(S_4) = 1$ . Далее,  $TQ$  не может быть и 2-замкнутой группой, так как в этом случае она должна быть и 2'-замкнутой, ввиду того, что  $Aut(T)$  есть 2-группа. Таким образом,  $TQ$  не удовлетворяет условию (\*), и, следовательно, случай полудиэдральной силовской 2-подгруппы невозможен.

Если силовские 2-подгруппы группы  $G$  абелевы, то по результату Уолтера [19] либо  $G \simeq PSL(2, q)$ , где  $q = 2^2$  или  $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$  (и тогда  $G$  - группа типа (2) или (3)), либо в  $G$

централизатор любой инволюции изоморфен  $C_2 \times PSL(2, q)$ , где  $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ . (Заметим, что вместо результата Уолтера [19] мы можем сослаться на результаты Бендера [4] и Уолтера [18]). Согласно результатам Янко [8] и Янко и Томпсона [9], либо  $G \simeq \mathcal{J}_1$  (и тогда  $G$  - группа типа (2)), либо  $q = 5^{2n+1}$  и  $G$  есть группа типа Ри в смысле Уарда [20]. В последнем случае по результату Уарда [20]  $G$  имеет подгруппу  $P \ltimes \langle j \rangle$ , где  $P$  есть 3-группа порядка  $q^3$ ,  $j$  - инволюция и  $|C_P(j)| = q$ . Ясно, что  $P \ltimes \langle j \rangle$  не удовлетворяет условию (\*). Таким образом, если силовские 2-подгруппы в  $G$  абелевы, то  $G$  - группа одного из типов (2), (3).

Если силовские 2-подгруппы группы  $G$  независимы (т.е. пересечение любых двух различных силовских 2-подгрупп равно единичной подгруппе), то по результату Сузуки [15]  $G$  изоморфна одной из групп  $PSL(2, 2^n)$  при  $n > 1$ ,  $Sz(q)$  и  $PSU(3, 2^{2n})$  при  $n > 1$ . Последняя группа имеет собственную подгруппу, изоморфную  $PSL(2, 2^n) \times F$ , где  $|F|$  равен  $2^n + 1$  или  $\frac{2^{2n} + 1}{3}$ , которая не удовлетворяет заключению теоремы. Поэтому  $G \simeq PSL(2, 2^n)$  или  $Sz(q)$  - группа типа (2) или (1).

В результате сделанных замечаний мы можем далее предполагать выполненными следующие два условия.

(Г) Силовские 2-подгруппы группы  $G$  не являются ни диэдральными, ни полудиэдральными, ни абелевыми.

(Д) Пересечение некоторых двух различных силовских 2-подгрупп группы  $G$  отлично от единичной подгруппы.

Рассмотрим множество  $\mathcal{N}$  всех попарных пересечений различных силовских 2-подгрупп группы  $G$  и обозначим через  $\mathcal{M}$  - множество всех максимальных по включению элементов из  $\mathcal{N}$ . Согласно свойству (Д) множество  $\mathcal{M}$  не пусто. Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1.  $N_G(\mathcal{D})$  разрешим для некоторой подгруппы  $\mathcal{D}$  из  $\mathcal{M}$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  - некоторая силовская 2-подгруппа из  $N_G(\mathcal{D})$  и  $\mathcal{T}$  - некоторая силовская 2-подгруппа из  $G$ , содержащая  $\mathcal{F}$ .

Ввиду выбора  $\mathcal{D}$  группа  $N_G(\mathcal{D})$  не 2-замкнута. Поэтому в  $N_G(\mathcal{D})$  существует бипримарная холловская подгруппа  $B$ , которая не 2-замкнута.  $B$  не является группой Фробениуса, так как  $\mathcal{D} < B$ . Кроме того,  $B$  не изоморфна  $S_4$ , так как в противном случае  $\mathcal{D}$



есть четверная группа и  $C_T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ , откуда по результату М. Сузуки [12]  $T$  есть диэдральная или полудиэдральная группа, а это невозможно по свойству (Г). Следовательно, по условию (\*)  $B$  есть  $\mathcal{D}$ -группа:  $B = Q \rtimes \tilde{T} = (Q \times T_1) \rtimes \langle \alpha \rangle$ , где  $|\langle \alpha \rangle| = 2$  и  $\alpha^{-1}x\alpha = x^{-1}$  для всех  $x \in Q \times T_1$ . Так как  $\mathcal{D} = B$ , то  $\mathcal{D} \subseteq T_1$ , а так как  $T_1$  содержится в пересечении двух различных силовских 2-подгрупп из  $B$ , а следовательно, и в пересечении двух различных силовских 2-подгрупп из  $G$ , то  $\mathcal{D} = T_1$ . Таким образом,  $B = (Q \times \mathcal{D}) \rtimes \langle \alpha \rangle$ . Если  $|\tilde{T}| = 4$ , то, очевидно,  $C_T(\tilde{T}) = T_1$  и по результату Сузуки [12]  $T$  диэдральная или полудиэдральная группа, что противоречит свойству (Г). Следовательно,  $|\tilde{T}| \geq 8$  и  $|\mathcal{D}| \geq 4$ .

Допустим, что  $\tilde{T} < T$ . Тогда  $\tilde{T} < N_T(\tilde{T})$  и можно выбрать элемент  $t \in N_T(\tilde{T}) \setminus \tilde{T}$  такой, что  $t^2 \in \tilde{T}$ . Но тогда  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}^t = \langle \tilde{T}, t \rangle$ , причём  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}^t \neq 1$ , так как  $|\tilde{T} : \mathcal{D}| = |\tilde{T} : \mathcal{D}^t| = 2$  и  $|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}^t| \geq 4$ . Следовательно, существует инволюция  $j$ , содержащаяся в  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}^t \cap Z(\langle \tilde{T}, t \rangle)$  и тогда  $C_G(j) \geq \langle \tilde{T}Q, t \rangle \geq \langle \tilde{T}, t \rangle > \tilde{T}$ . Поэтому  $\mathcal{D}$  не нормальна в  $\langle \tilde{T}, t \rangle$  и, в частности,  $\langle \tilde{T}, t \rangle$  неабелева. Так как, очевидно,  $C_G(j) < G$  и силовская 2-подгруппа в  $C_G(j)$  неабелева, то согласно свойству (Б)  $C_G(j)$  разрешим. Тогда  $B$  содержится в холловской бипримарной подгруппе  $Q, T_1$  из  $C_G(j)$ , где  $(|Q, 1|, |T_1|) = 1, Q_1 \geq Q$  и  $T_1 > \tilde{T}$ . Из условия (\*) вытекает, что  $Q, T_1$  является  $\mathcal{D}$ -группой:  $Q, T_1 = (Q_1 \times \mathcal{D}_1) \rtimes \langle \alpha_1 \rangle$  где  $|\langle \alpha_1 \rangle| = 2$  и  $\alpha_1^{-1}x\alpha_1 = x^{-1}$  для всех  $x \in Q_1 \times \mathcal{D}_1$ . Но отсюда следует, что  $\alpha_1 \in Q_1, T_1 \setminus Q_1, \mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D} \subseteq C_G(Q) \subseteq \mathcal{D}_1$ . Следовательно,  $\mathcal{D} = Q_1, T_1$ , а это невозможно, так как  $T_1 \notin N_G(\mathcal{D})$ . Полученное противоречие показывает, что  $\tilde{T} = T$ , т.е. силовские 2-подгруппы из  $N_G(\mathcal{D})$  являются силовскими 2-подгруппами в  $G$ .

Так как по свойству (Г) подгруппа  $T$  неабелева, то  $\mathcal{D}$ -единственная подгруппа в  $T$  с тем свойством, что  $|T : \mathcal{D}| = 2$  и  $T \setminus \mathcal{D}$  состоит из инволюций. Отсюда следует, в частности, что  $\mathcal{D}$  характеристична в  $T$  и, следовательно,  $N_G(T) \subseteq N_G(\mathcal{D})$ .

Покажем теперь, что  $C_G(x) \subseteq N_G(\mathcal{D})$  для любого элемента  $x$  из  $Z(T)$ . Так как  $T \subseteq C_G(x)$  и так как по (Г)  $T$  неабелева, то по (Б)  $C_G(x)$  разрешим. Рассмотрим в нем произвольную бипримарную холловскую подгруппу  $TQ$ , содержащую  $T$ .  $TQ$  не является группой Фробениуса и не изоморфна  $S_4$ , так как  $x \in Z(TQ)$ . Поэтому, ввиду (\*), либо  $TQ = T \rtimes Q$ , либо  $TQ = Q \rtimes T$  -  $\mathcal{D}$ -группа. В первом случае  $TQ \subseteq N_G(T) \subseteq N_G(\mathcal{D})$ . Во втором случае, ввиду единственности подгруппы  $\mathcal{D}$  в  $T$  со свойством, что  $|T : \mathcal{D}| = 2$  и  $T \setminus \mathcal{D}$  состоит из инволюций,  $TQ = (Q \times \mathcal{D}) \rtimes \langle \alpha \rangle$  и, следовательно,  $TQ \subseteq N_G(\mathcal{D})$ . Таким образом, всег-

да  $TQ \subseteq N_G(\mathcal{D})$ , откуда, ввиду произвольности выбора  $TQ$ , вытекает, что  $C_G(\mathcal{Z}) \subseteq N_G(\mathcal{D})$ . Итак,  $C_G(\mathcal{Z}) \subseteq N_G(\mathcal{D})$  для любого  $\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(T)$

Пусть  $T_1$  - произвольная силовская 2-подгруппа из  $G$ , содержащая  $\langle \alpha \rangle \times \mathcal{Z}(T)$  ( $\mathcal{Z}(T) = \{d \in \mathcal{D} \mid d^2 = 1\}$ ). Так как  $T$  не диэдральная по свойству (Г), то  $\mathcal{D}$  нециклическая и, следовательно,  $|\mathcal{Z}(T)| \geq 4$ . Далее,  $T_1 = \mathcal{D}_1 \rtimes \langle \alpha_1 \rangle$ , где  $|\langle \alpha_1 \rangle| = 2$ ,  $\alpha_1^{-1} d \alpha_1 = d^{-1}$  для всех  $d \in \mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{Z}(T_1) = \{d \in \mathcal{D}_1 \mid d^2 = 1\}$ . Так как  $T_1 \supseteq \mathcal{Z}(T)$  и  $|\mathcal{Z}(T)| \geq 4$ , то  $\mathcal{Z}(T) \cap \mathcal{D}_1 \neq 1$ . Но тогда в  $\mathcal{Z}(T) \cap \mathcal{D}_1$  имеется инволюция  $x$  и, следовательно,  $x \in \mathcal{Z}(T) \cap \mathcal{Z}(T_1)$ . Поэтому  $\langle T, T_1 \rangle \subseteq C_G(x) \subseteq N_G(\mathcal{D})$ , откуда  $T_1 \supseteq \langle \mathcal{D}, \alpha \rangle = T$ , т.е.  $T_1 = T$ . Таким образом,  $T$  есть единственная силовская 2-подгруппа в  $G$ , содержащая  $\langle \alpha \rangle \times \mathcal{Z}(T)$ .

Допустим теперь, что инволюция  $\alpha$  сопряжена в  $G$  с некоторым элементом из  $\mathcal{D}$ :  $\alpha = d^x$ ,  $d \in \mathcal{D}, x \in G$ . Тогда  $\langle \alpha \rangle \times \mathcal{Z}(T) \subseteq C_G(\alpha) = C_G(d)^x$ , откуда следует, что  $C_G(\alpha)$  содержит некоторую силовскую 2-подгруппу группы  $G$ . Но если  $T_1$  - силовская 2-подгруппа из  $C_G(\alpha)$ , содержащая  $\langle \alpha \rangle \times \mathcal{Z}(T)$ , то по доказанному ранее  $T_1 = T$ . Таким образом,  $T \subseteq C_G(\alpha)$ , т.е.  $\alpha \in \mathcal{Z}(T)$  что невозможно. Следовательно,  $\alpha$  не сопряжена в  $G$  ни с одним элементом из  $\mathcal{D}$ . Но тогда по теореме Чунихина ([3] теорема 1)  $\alpha$  не содержится в ядре переноса  $G \rightarrow T/\mathcal{D}$ , и, следовательно, группа  $G$  непростая. Таким образом, случай 1 невозможен.

**СЛУЧАЙ 2.**  $N_G(\mathcal{D})$  неразрешим для любой подгруппы  $\mathcal{D}$  из  $\mathcal{M}$ .

Согласно свойству (Б) нормализатор любой подгруппы  $\mathcal{D}$  из  $\mathcal{M}$  имеет вид  $N_G(\mathcal{D}) = H \rtimes K \geq H \times \mathcal{D}$ , где  $H \cong J_1$ ,  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$  или  $PSL(2, 3^{r_1}) \times \dots \times PSL(2, 3^{r_s})$ , где  $s \geq 2$  и  $r_1, \dots, r_s$  - попарно взаимно простые нечётные числа. Но тогда централизатор любого элемента  $d$  из  $\mathcal{D}$  содержит  $H$  и, следовательно, неразрешим. По свойству (Б) силовские 2-подгруппы в  $C_G(d)$  абелевы, следовательно, по свойству (Г) они не являются силовскими 2-подгруппами в  $G$ . Отсюда, ввиду произвольности подгруппы  $\mathcal{D}$  из  $\mathcal{M}$ , следует, что элемент  $x \neq 1$ , входящий в центр какой-либо силовской 2-подгруппы  $T$  группы  $G$ , не может содержаться в пересечении двух различных силовских 2-подгрупп группы  $G$ . В частности,  $C_G(x)$  содержит только одну силовскую 2-подгруппу (а

именно  $T$  ) и, значит,  $C_G(x) \subseteq N_G(T)$ .

Пусть теперь  $x$  - некоторая инволюция из центра некоторой силовой 2-подгруппы  $T$  группы  $G$ . Рассмотрим слабое замыкание  $V$  элемента  $x$  в  $C_G(x)$  относительно  $G$ :  $V = \langle x^g \mid g \in G, x^g \in C_G(x) \rangle$ . Так как  $C_G(x) \subseteq N_G(T)$ , то  $V \subseteq T$ . Далее, так как  $x^g \in Z(T^g)$ , то  $x^g$  содержится точно в одной силовой 2-подгруппе группы  $G$ . Но инволюция  $x^g$  из  $V$  содержится в  $T$  и  $T^g$ . Следовательно,  $T = T^g$ ,  $g \in N_G(T)$  и  $x^g \in Z(T)$ . Но тогда  $V \subseteq Z(T)$ . Таким образом, мы нашли в  $G$  инволюцию  $x$ , содержащуюся в  $Z(T)$ , такую, что слабое замыкание ее  $V$  в  $C_G(x)$  относительно  $G$  абелево. По результату Шульца [11] отсюда следует, что  $G \simeq PSL(2, 2^m)$ ,  $Sz(q)$  или  $PSU(3, 2^{2m})$ ,  $m > 1$ . Но как уже отмечалось раньше, группа  $PSU(3, 2^{2m})$  не удовлетворяет условию (\*). Следовательно,  $G$  есть группа типа (1) или (2).

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если группа  $G$  не простая, то она имеет нормальную подгруппу, изоморфную  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$ ,  $Sz(q)$  или  $J_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа  $G$  имеет собственную неразрешимую нормальную подгруппу, то утверждение леммы непосредственно вытекает из свойства (A).

Предположим теперь, что  $G$  не имеет неразрешимых собственных нормальных подгрупп и, в частности,  $G' = G$ . Пусть  $M$  - минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда  $M$  - элементарная абелева группа порядка  $z^d$ , где  $z$  - простое число. Согласно свойству (B) и сделанному выше предположению, фактор-группа  $G/M$  изоморфна одной из групп:  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$ ,  $Sz(q)$  и  $J_1$ .

Если  $z > 2$ , то, согласно условию (\*), подгруппа  $M \cap T$ , где  $T$  - некоторая силовская 2-подгруппа из  $G$ , либо 2-замкнута, либо является  $D$ -группой. В обоих случаях  $M$  централизует некоторую инволюцию из  $T$  и, следовательно,  $M \subseteq Z(G)$ .

Если же  $z = 2$ , то, рассмотрев полный прообраз в  $G$  какой-либо диэдральной бипримарной подгруппы из  $G/M$ , мы также получим, что  $M \subseteq Z(G)$ .

Теперь  $G/M \neq J_1$ , так как мультипликатор группы  $J_1$  тривиален (см. [8]). Далее, по результату Шура ([10], теорема 9 и

ее следствие на стр. 120) при  $G/M \simeq PSL(2, q)$  будет либо  $q=9$  и  $\tau=3$ , либо  $G \simeq SL(2, q)$  и  $q$  нечётно. В последнем случае  $G$  не удовлетворяет условию (\*). Если же  $\tau > 2$  и  $G/M \simeq PSL(2, q)$  или  $Sz(q)$ , то  $\tau$  не делит  $|G/M|$  (иначе, в  $G/M$  есть диэдральная подгруппа  $D/M$  порядка  $2\tau$  и  $D$  не удовлетворяет условию (\*)), откуда  $G = M \times X$  в противоречие с тем, что  $G' = G$ . В оставшемся случае, когда  $\tau=2$  и  $G/M \simeq Sz(q)$ , в  $G/M$  есть подгруппа Фробениуса  $F/M$  порядка  $4s$ , где  $s$  - нечетное простое число, и  $F$  не удовлетворяет условию (\*).

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если  $G$  имеет нормальную подгруппу  $H$ , изоморфную  $Sz(q)$ ,  $J_1$  или  $PSL(2, 2^n)$  при  $n \geq 3$ , то 1)  $G = H \lambda K$ , где  $K$  разрешима, 2)  $(|H|, |K|) = 2^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , причём  $\alpha = 0$  при  $H \simeq Sz(q)$ , 3) силовские 2-подгруппы в  $K$  элементарные абелевы и централизуют  $H$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $C = C_G(H)$  и рассмотрим два случая.

1) Пусть  $C = 1$ . Тогда  $G$  изоморфна подгруппе из  $Aut(H)$ . Так как  $Aut(J_1) \simeq J_1$  (см. [8]), то при  $H \simeq J_1$  будет  $G = H$  и лемма верна.

Пусть  $H \simeq Sz(2^n)$  или  $PSL(2, 2^n)$ ,  $n \geq 3$ . Тогда  $Aut(H) \simeq H \lambda \langle \alpha \rangle$ , где  $|\langle \alpha \rangle| = n$  (см. [14] и [6]), и, следовательно,  $G = H \lambda K$ , где  $K$  - циклическая группа и  $|K|$  делит  $n$ . Пусть  $P$  - произвольная силовская подгруппа из  $H$ . Нетрудно проверить, что подгруппа  $N_G(P)$  может удовлетворять условию (\*) только при условии, что  $(|P|, |K|) = 1$ . Поэтому

$$(|H|, |K|) = 1.$$

В этом случае лемма доказана.

2) Пусть теперь  $C \neq 1$ . Рассмотрим подгруппу  $HC = H \times C$ . Подгруппа  $H$ , как легко видеть, имеет диэдральную подгруппу  $D_{2\tau}$  порядка  $2\tau$  для любого нечётного простого числа  $\tau$ , делящего  $|H|$ . Если  $H \simeq Sz(q)$ , то  $H$  имеет еще подгруппу Фробениуса  $F$  порядка  $4s$  для некоторого  $s$ , делящего  $|H|$ . Обозначим через  $S_p$  некоторую силовскую  $p$ -подгруппу из  $C$ . Применяя условие (\*) к

подгруппам  $D_{2\alpha} \times S_2$ ,  $D_{2\alpha} \times S_{\alpha}$  и  $F \times S_2$ , видим, что силовская 2-подгруппа  $S_2$  в  $C$  элементарная абелева,  $(|H|, |C|) = 2^{\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) и  $\alpha = 0$  при  $H \simeq Sz(q)$ . Отсюда следует также, что подгруппа  $C$  разрешима.

Фактор-группа  $G/C$  удовлетворяет условию (\*) по свойству (B) и изоморфна подгруппе из  $\text{Aut}(H)$ . Согласно случаю 1)  $G/C = HC/C \rtimes K/C$ , где  $K/C$  - циклическая группа и  $(|HC/C|, |K/C|) = 1$ . Но тогда  $G = H \rtimes K$ ,  $K$  разрешима,  $(|H|, |K|) = (|H|, |C|) = 2^{\alpha}$  и силовские 2-подгруппы из  $K$  содержатся в  $C$ .

Лемма 3 доказана.

**ЛЕММА 4.** Если  $G$  имеет нормальную подгруппу  $L$ , изоморфную  $PSL(2, p^n)$  при нечётном  $p^n > 3$  и  $C_G(L)$  разрешима, то либо  $G = L \rtimes K$  - группа типа (3), либо  $G = H \rtimes K$ , где  $H \simeq PGL(2, p^n)$  или  $M_9$ , и  $(|H|, |K|) = 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим  $C = C_G(L)$ . Тогда  $G/C$  изоморфна подгруппе из  $\text{Aut}(L) \simeq P\Gamma L(2, p^n) = PGL(2, p^n) \rtimes \langle \alpha \rangle$ , где  $|\langle \alpha \rangle| = n$  (см. [6]). Рассмотрим два случая.

1) Пусть  $|G:LC|$  нечетен. Тогда  $G/C = LC/C \rtimes K/C$ , где  $K/C$  - циклическая подгруппа нечётного порядка, делящего  $n$ . Отсюда  $G = L \rtimes K$ ,  $K$  разрешима и  $|K:C_K(L)| = |K:C|$  нечетен. Понятно также, что силовская 2-подгруппа в  $K$  элементарная абелева и что  $(|L|, |K|) = 2^{\alpha} p^{\beta}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Если  $p^n \equiv \pm 1 \pmod{8}$ , то  $L$  имеет подгруппу, изоморфную  $S_4$ , и, следовательно,  $\alpha = 0$ . Если  $p^n \equiv 1 \pmod{4}$ , то  $\beta = 0$ , так как иначе нормализатор в  $G$  силовской  $p$ -подгруппы из  $L$  не удовлетворяет условию (\*).

Допустим, что  $\alpha\beta > 0$ . Пусть  $P$  - силовская  $p$ -подгруппа из  $L$  и  $T$  - силовская 2-подгруппа из  $K$ . Тогда  $N_G(P)$  разрешима и его холловская бипримарная  $\{2, p\}$ -подгруппа имеет вид  $T\tilde{P}$ , где  $\tilde{P} > P$  и  $|\tilde{P}| = p^c$ . Так как  $C_{\tilde{P}}(T) \supseteq P \neq 1$ , то согласно условию (\*), подгруппа  $T\tilde{P}$  2-замкнута. Но тогда 2-замкнута и холловская бипримарная  $\{2, p\}$ -подгруппа в  $K$ , поскольку  $K \simeq N_G(P)/N_L(P)$ .

Таким образом, в случае 1)  $G$  оказывается группой типа (3).

2) Пусть  $|G:LC|$  четен. Положив  $\bar{G} = G/C$  и  $\bar{L} = LC/C$ ,

мы можем считать, что  $PSL(2, p^n) = \bar{L} \circ \bar{G} \leq (\bar{L} \lambda \langle \tau \rangle) \lambda \langle \alpha \rangle$ , где  $\bar{L} \lambda \langle \tau \rangle = PGL(2, p^n)$ ,  $|\langle \alpha \rangle| = n$  и  $\alpha$  действует на  $\bar{L} \lambda \langle \tau \rangle$  как автоморфизм, индуцируемый автоморфизмом  $x \rightarrow x^p$  поля  $GF(p^2)$ . Следовательно,  $\bar{G}$  имеет подгруппу  $\bar{X}$ , содержащую  $\bar{L}$  как подгруппу индекса 2. Роль  $\bar{X}$  могут выполнять только три подгруппы:  $\bar{L} \lambda \langle \tau \rangle$ ,  $\bar{L} \lambda \langle \alpha^{\frac{n}{2}} \rangle$  и  $\bar{L} \cdot \langle \alpha \rangle$ , где  $\alpha = \tau \alpha^{\frac{n}{2}}$ , причём последние два случая возможны только при чётном  $n$ .

а) Пусть  $\bar{X} = \bar{L} \lambda \langle \alpha^{\frac{n}{2}} \rangle$ . Тогда  $\alpha^{\frac{n}{2}}$  централизует подгруппу  $PSL(2, p^{\frac{n}{2}})$ . В этой подгруппе имеется подгруппа  $A \cong A_4$ . Так как  $n$  чётно, то  $N_{\bar{X}}(A) \cong S_4$ . Но теперь  $N_{\bar{X}}(A) = N_{\bar{L}}(A) \lambda \langle \alpha^{\frac{n}{2}} \rangle$  не удовлетворяет условию (\*). Таким образом,  $\alpha^{\frac{n}{2}} \notin \bar{G}$ .

б) Пусть  $\bar{X} = \bar{L} \langle \alpha \rangle$ , где  $\alpha = \tau \alpha^{\frac{n}{2}}$  ( $\alpha^2 \in \bar{L}$ ). Так как в этом случае  $n$  чётно, то силовская 2-подгруппа из  $\bar{L}$  содержится в диэдральной максимальной подгруппе  $D$  порядка  $p^n - 1$  из  $\bar{L}$ . Если  $|D|$  делится на нечётное простое число  $\ell$ , то, как легко проверить, холловская бипримарная  $\{2, \ell\}$ -подгруппа в  $N_{\bar{X}}(D)$  не удовлетворяет условию (\*). Следовательно,  $p^n - 1 = 2^m$  ( $m \geq 1$ ). Но это возможно лишь в случае, когда  $n = 1$  или  $p^n = 9$  ([17], лемма 3). Так как у нас  $n$  чётно, то  $p^n = 9$ . В этом случае  $\bar{X} = M_9$ , и нетрудно установить, что тогда  $G = M_9 \times C$ , где  $(|M_9|, |C|) = 1$ . Таким образом, либо  $p^n = 9$  и  $G$  удовлетворяет заключению леммы 5, либо  $\tau \alpha^{\frac{n}{2}} \notin \bar{G}$ .

в) Пусть  $\bar{X} = \bar{L} \lambda \langle \tau \rangle = PGL(2, p^n)$ . Тогда  $\bar{G} = \bar{X} \lambda \bar{K}$ , где  $\bar{K}$  - циклическая, причём из а) и б) следует, что  $|\bar{K}|$  нечётен. Пусть  $\bar{X} = X/C$ . Тогда  $X = (L \times C) \langle \beta \rangle$ , где  $|\langle \beta \rangle| = 2^s \geq 2$  и  $\beta^2 \in C$ . Так как  $X/C$  имеет подгруппу, изоморфную  $S_4$ , то из условия (\*) следует, что  $|C|$  нечётен. Поэтому  $\beta^2 = 1$  и  $X = H \lambda C$ , где  $H = L \lambda \langle \beta \rangle \cong PGL(2, p^n)$ . Применяя к подгруппе  $X$  условие (\*), получаем  $X = H \times C$ . Теперь  $G = H \lambda K$ , где  $K$  - разрешимая группа нечётного порядка. Нетрудно заметить также, что  $(|H|, |K|) = 1$ .

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Если  $G$  имеет нормальную подгруппу  $L$ , изоморфную  $PSL(2, p^n)$  при нечётном  $p^n > 3$ , и  $C_G(L)$  неразрешим, то  $p = 3$ ,  $n$  - нечётное и  $G$  есть группа типа (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим опять  $C = C_G(L)$  и рассмотрим подгруппу  $LC = L \times C$ . По свойству (A)  $C$  имеет подгруппу  $E$ ,

которая изоморфна  $PSL(2, q)$  при  $q > 3$ ,  $Sz(q)$  или  $J_1$ . Применим условие (\*) к подгруппе  $L \times E$ . По лемме 3  $E$  не изоморфна  $Sz(q)$ ,  $J_1$  или  $PSL(2, 2^m)$  при  $m \geq 3$ . Поэтому  $E \simeq PSL(2, 2^m)$  при нечетном простом  $\tau$  ( $PSL(2, 4) \simeq PSL(2, 5)$ ). Далее устанавливаем  $p = \tau = 3$  (иначе в  $L \times E$  имеется подгруппа  $H \simeq D_6 \times C_3$ , не удовлетворяющая условию (\*)),  $n$  и  $m$  - нечетные числа (иначе  $L \times E \geq H \simeq S_4 \times C_2$ ) и  $(3^{2n} - 1, 3^{2m} - 1) = 8$  или, что равносильно,  $(n, m) = 1$  (иначе  $L \times E \geq H \simeq D_{2\tau} \times C_\tau$ , где  $\tau$  - нечетное простое число, делящее  $(3^{2n} - 1, 3^{2m} - 1)$ ). Через  $D_n$  мы обозначили здесь диэдральную группу порядка  $n$ .

Фактор-группа  $G/C$  изоморфна подгруппе из  $Aut(L) \simeq PGL(2, 3^n) = PGL(2, 3^n) \rtimes \langle \alpha \rangle$ , где  $|\langle \alpha \rangle| = n$ .

1) Пусть  $|G:LC|$  нечетен. Тогда  $G/C = LC/C \rtimes X/C$  и, следовательно,  $G = L \rtimes X$ . По свойству (A)  $X = (L_2 \times \dots \times L_s) \rtimes K$ , где  $K$  - разрешима,  $L_i \simeq PSL(2, 3^{n_i})$  ( $i = 2, \dots, s$ ) и  $X$  есть группа типа (3) или (4) в зависимости от того, будет ли  $s = 2$  или  $s > 2$ . В любом случае будет  $G = H \rtimes K$ , где  $H = L \times L_2 \times \dots \times L_s$ , и  $G$  является группой типа (4).

2) Пусть  $|G:LC|$  четен. Тогда  $G/C = H/C \rtimes X/C$ , где  $H/C = L \langle b \rangle C/C \simeq L \langle b \rangle / \langle b^2 \rangle \simeq PGL(2, 3^n)$  и  $|\langle b \rangle| = 2^k \geq 2$ . Так как в  $L \langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$  есть подгруппа, изоморфная  $S_4$ , то, ввиду условия (\*), должно быть  $b^2 = 1$ . Поэтому  $G$  имеет подгруппу  $(L \times E) \rtimes \langle b \rangle$ , где  $E \simeq PSL(2, 3^m)$ . Нетрудно заметить, что в группах  $L$  и  $E$  существуют  $\langle b \rangle$ -допустимые подгруппы  $U$  и  $V$  соответственно такие, что  $U \simeq V \simeq A_4$  и  $U \rtimes \langle b \rangle \simeq S_4$ . Но тогда подгруппа  $(U \times V) \rtimes \langle b \rangle$  не удовлетворяет условию (\*). Следовательно, случай 2) невозможен.

Лемма 5 доказана

Леммы 1-5 в совокупности доказывают, что конечная группа, удовлетворяющая условию (\*), является группой одного из типов (1)-(4).

## § 2. Доказательство теоремы 1

Достаточность. ЛЕММА 6. Группы каждого из типов (1) - (4) удовлетворяют условию (\*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $G = H \rtimes K$  - группа одного из типов

(1) - (4) и  $B$  - произвольная максимальная бипримарная подгруппа чётного порядка из  $G$ . Пусть  $|B| = 2^\alpha \tau^\beta$ ,  $\tau$  - простое нечетное число,  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta \geq 1$ . Возможны три случая.

1) Пусть  $\tau$  не делит  $|K|$ . Тогда  $\tau$  делит  $|H|$ . При естественном гомоморфизме  $G$  на  $G/H$  подгруппа  $B$  отобразится на подгруппу  $BH/H$ , содержащуюся в некоторой силовой 2-подгруппе  $F/H$  из  $G/H$ . Тогда  $B \subseteq F = H \times T$ , где  $T = F \cap K$  есть некоторая силовая 2-подгруппа из  $C_K(H)$ . Ввиду максимальной  $B$  будет  $T \subseteq B$  и, следовательно,

$$B = B_1 \times T, \quad \text{где } B_1 = B \cap H.$$

По условию  $T$  - элементарная абелева группа.

Если  $H \cong Sz(q), M_q$  или  $PGL(2, q)$  при нечётном  $q > 3$ , то  $T = 1$  и  $B = B_1 \subseteq H$ . Но  $H$  удовлетворяет условию (\*) (для  $H \cong M_q$ , см. [1]).

Если  $H \cong J_1$ , то  $B_1$  есть либо группа диэдра порядка  $2n$ , где  $n = 3, 5, 6, 7, 10, 11$  или  $19$ , либо 2-замкнутая группа (изоморфная  $A_4 \times C_2$ ). В любом случае  $B = B_1 \times T$  удовлетворяет условию (\*).

Если  $H \cong PSL(2, 2^r)$ , то  $B_1$  либо 2-замкнута, либо есть группа диэдра, порядок которой не делится на 4. Но тогда  $B$  удовлетворяет условию (\*).

Пусть  $H \cong PSL(2, p^r)$ ,  $p > 2$  и  $p^r > 3$ . Если  $T = 1$ , то  $B \subseteq H$  и, очевидно, удовлетворяет условию (\*). Если  $T \neq 1$ , то  $p^r \equiv \pm 3 \pmod{8}$  и в этом случае  $B_1$  либо 2-замкнута, либо является группой диэдра порядка, не делящегося на 8. Но тогда  $B$  удовлетворяет условию (\*).

Пусть  $H = L_1 \times \dots \times L_s$ ,  $s \geq 2$ ,  $L_i \cong PSL(2, 3^{r_i})$ . Если  $B_1 \subseteq L_i$  при некотором  $i = 1, \dots, s$ , то либо  $B_1 \cong A_4$ , либо  $B_1$  есть группа диэдра порядка, не делящегося на 8. В общем случае, опуская несложную проверку, мы имеем

$$B_1 = (B_1 \cap L_1) \times \dots \times (B_1 \cap L_s).$$

Отсюда ясно, что  $B$  удовлетворяет условию (\*).

2) Пусть  $\tau$  не делит  $|H|$ . Тогда  $\tau$  делит  $|K|$ .  $B = TR$ , где  $|T| = 2^\alpha$  и  $|R| = \tau^\beta$ . Переходя, если нужно, к сопряженной с  $B$  подгруппе, мы можем считать, что  $R \subseteq K$ . Положим  $T_1 = B \cap H$



$T_1$  есть нормальная 2-подгруппа в  $B$ , и  $B/T_1 \simeq BH/H \simeq$  подгруппе из  $K$  ( $K \simeq G/H$ )

Если  $T_1 = 1$ , то  $B$  изоморфна подгруппе из  $K$  и, следовательно, удовлетворяет условию (\*).

Если  $T_1 \neq 1$  и  $T_1 = T$ , то  $B = T \wedge R$  2-замкнута.

Пусть  $1 < T_1 < T$ . Тогда силовская 2-подгруппа в  $G$  - элементарная абелева, что существенно в дальнейшем. Группа  $B/T_1$ , будучи изоморфной бипримарной  $\{2, \tau\}$  - подгруппе из  $K$ , должна удовлетворять условию (\*). Ясно, что  $B/T_1 \not\cong S_4$ . Если  $B/T_1$  2-замкнута, то и  $B$  2-замкнута. Если же  $B/T_1$  не 2-замкнута, то она является  $D$ -группой:  $B/T_1 = (R/T_1/T_1 \wedge \langle \alpha \rangle T_1/T_1) \times T_2/T_1$ , где  $|\langle \alpha \rangle| = 2$ . Тогда  $B/T_1$  порождается своими силовскими 2-подгруппами, а следовательно,  $BH/H \subseteq C_K(H)H/H$  и  $BH \subseteq C_K(H) \times H$ . Поэтому  $R \subseteq C_K(H)$  и, в частности,  $R$  централизует  $T_1$ . Но тогда  $R$  централизует  $T_2$  (так как  $R$  централизует также и  $T_2/T_1$ ), а поэтому  $B = (R \wedge \langle \alpha \rangle) \times T_2$ . Но теперь  $B$  есть  $D$ -группа и, следовательно, удовлетворяет условию (\*).

3) Пусть  $\tau$  делит  $(|H|, |K|)$ . Тогда либо  $G$  есть группа типа (3) и  $\tau = \rho$ , либо  $G$  есть группа типа (4) и  $\tau = 3$ . В любом случае холловская бипримарная  $\{2, \tau\}$  - подгруппа в  $K$  2-замкнута. Поэтому  $NB = H \wedge K_1$ , где  $K_1$  - 2-замкнутая  $\{2, \tau\}$  - подгруппа из  $K$ . Пусть  $K_1 = T_1 \wedge R_1$ , где  $T_1$  - 2-группа и  $R_1$  -  $\tau$ -группа. Тогда  $NB = (H \wedge T_1) \wedge R_1$  и  $T_1 \subseteq B$ . По пункту 1) подгруппа  $B \cap NT_1$  2-замкнута. Но она является нормальной подгруппой  $\tau$ -индекса в  $B$ . Следовательно, подгруппа  $B$  2-замкнута.

Лемма 6 доказана.

Леммы 1-6 в совокупности доказывают теорему 1.

#### Л и т е р а т у р а

1. В.А.БЕЛОНОГОВ, Характеризация некоторых конечных простых групп, Изв. АН СССР, сер.матем., 35, №4 (1971), 788-798.
2. В.М.БУСАРКИН, Ю.М.ГОРЧАКОВ, Конечные расщепляемые группы, "Наука", 1968.
3. С.А.ЧУНИХИН, О существовании подгрупп у конечной группы, Труды семинара по теории групп, ГОНТИ, 1938, 106-125.

4. H. BENDER, On groups with abelian Sylow 2-subgroups, *Math.Z.*, 117, N1-4 (1970), 164-176.
5. L. E. DICKSON, *Linear Groups*, Dover, 1958.
6. J. DIEUDONNÉ, On the automorphisms of the classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, N2 (1951).
7. D. GORENSTEIN, J. H. WALTER, The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups. I, II, III, *J. Algebra*, 2 (1965), 85-151, 218-270, 354-393.
8. Z. JANKO, A new finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, *J. Algebra*, 3, N2 (1966), 147-186.
9. Z. JANKO, J. G. THOMPSON, On a class of finite groups of Ree, *J. Algebra*, 4, N2 (1966), 274-292.
10. I. SCHUR, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitution, *J. reine und angew. Math.*, 132, N2 (1907), 85-137.
11. E. SHULT, On the fusion an involution in its centralizer, *Notices Amer. Math. Soc.*, 17, N3 (1970), 548.
12. M. SUZUKI, A characterization of simple groups  $LF(2, \rho)$ , *J. Fac. Univ. Tokyo, Sect. I*, 6 (1951), 259-293.
13. M. SUZUKI, On a finite groups with a partition, *Arch. Math.*, 12, N4 (1961), 241-254.
14. M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups, *Ann. Math.*, 75, N1 (1962), 105-145.
15. M. SUZUKI, Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent, *Ann. Math.*, 80, N1 (1964), 58-77.
16. M. SUZUKI, A characterization of the simple groups  $PSL(2, q)$ , *J. Math. Soc. Japan*, 20, N1-2 (1968), 342-349.
17. J. G. THOMPSON, A special class of nonsolvable groups, *Math.Z.*, 72, N5 (1960), 458-462.
18. J. H. WALTER, Finite groups with abelian Sylow 2-subgroups of order 8, *Inventiones math.*, 2, N5 (1967), 332-376.
19. J. H. WALTER, The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups, *Ann. Math.*, 89, N3 (1969), 405-514.
20. H. N. WARD, On Ree's series of simple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 121, N1 (1966), 62-89.
21. W. J. WONG, On finite groups whose 2-Sylow subgroups have cyclic subgroups of index 2, *J. Austral. Math. Soc.*, 4, N1 (1964), 90-112.