

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. V. Ivanov, Attaching corners to Teichmüller space,  
*Algebra i Analiz*, 1989, Volume 1, Issue 5, 115–143

<https://www.mathnet.ru/eng/aa45>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 14, 2025, 05:34:29



Н. В. Иванов

### ПРИКЛЕИВАНИЕ УГЛОВ К ПРОСТРАНСТВУ ТАЙХМЮЛЛЕРА

В работе строится каноническая граница пространства Тайхмюллера, аналогичная границе Бореля–Серра симметрических пространств некомпактного типа. Существование такой границы и ее основные свойства являются существенным элементом глубокой и довольно таинственной аналогии между арифметическими группами и симметрическими пространствами, с одной стороны, и модулярными группами и пространствами Тайхмюллера — с другой. Точки границы определяются как изотопические классы некоторых геометрических структур на поверхности, обобщающих обычные гиперболические структуры. В то время как существование границы пространства Тайхмюллера, аналогичной границе Бореля–Серра, было более десяти лет назад анонсировано У. Харви, в настоящей работе впервые приводятся ее детальное построение, геометрическая интерпретация точек границы и доказательства ее основных свойств.

#### Введение

Настоящая работа посвящена аналогам в теории пространств Тайхмюллера (части) классических результатов Бореля и Серра [1]. В работе Бореля и Серра речь идет о построении некоторой естественной границы для симметрических пространств  $Y = G/K$ , где  $G$  — полупростая (или, более общим образом, редуктивная) группа Ли и  $K$  — максимальная компактная подгруппа. Точнее, группа  $G$  предполагается алгебраической и определенной над  $\mathbb{Q}$ , и вместе с  $G$  рассматривается некоторая ее арифметическая подгруппа  $\Gamma$ . В этой ситуации Борель и Серр строят, добавляя к  $Y$  некоторую границу, многообразие с углами  $\bar{Y}$ , содержащее  $Y$  в качестве внутренности (понятие многообразия с углами незначительно обобщает понятие многообразия с краем и напоминает ниже). При этом действие  $\Gamma$  на  $Y$  продолжается до действия на  $\bar{Y}$ . Это продолженное действие оказывается разрывным, а фактор  $\bar{Y}/\Gamma$  — компактным. Некоторая подгруппа конечного индекса в  $\Gamma$  действует на  $\bar{Y}$  свободно. Особенно важно то, что край  $\partial Y$  оказывается гомотопически эквивалентным так называемому комплексу Титса группы  $G$ . Эти результаты

Ключевые слова: пространства Тайхмюллера, комплексы кривых, гиперболические структуры, многообразия с углами, приклеивание границы.

тесно связаны с теорией приведения арифметических групп и служат основой для изучения когомологий арифметических групп.

То, что в теории пространств Тайхмюллера имеются аналоги этих результатов Бореля и Серра, обнаружил Харви [2]. Довольно ясно, что роль симметрических пространств  $G/K$  должны играть пространства Тайхмюллера  $T_S$  поверхностей  $S$  конечного типа, а роль арифметических групп  $\Gamma$  — соответствующие модулярные группы  $\text{Mod}_S$ . Харви обнаружил и аналоги комплексов Титса: ими являются введенные Харви [2] симплициальные комплексы — комплексы кривых. Вершинами комплекса кривых  $C(S)$  поверхности  $S$  являются изотопические классы нетривиальных (т.е. не стягиваемых по  $S$  в точку или край) окружностей на  $S$ . Множество вершин образует симплекс, если оно состоит из изотопических классов нескольких попарно не пересекающихся окружностей.

К сожалению, работа Харви [2] не содержит доказательств, и, насколько мне известно, за прошедшие десять лет они так и не появились. В своем недавнем обзоре [3] Харви снова обсуждает эту тему и снова без доказательств. При этом результаты, анонсированные Харви, являются существенным элементом глубокой и довольно таинственной аналогии между арифметическими группами и симметрическими пространствами  $G/K$ , с одной стороны, и модулярными группами и пространствами Тайхмюллера — с другой (подробное обсуждение этой аналогии, включающее когомологические аспекты, можно найти в [4]). В связи с этим в настоящей работе предлагается полное обоснование этих результатов, основанное на ряде новых идей.

Сформулируем главные результаты. Прежде всего напомним, что определение многообразия с углами отличается от определения обычных многообразий с краем лишь тем, что вместо  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  в качестве модельного пространства используется  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  (где  $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ). Поверхность  $S$  будет поверхностью конечного типа без края, т.е. результатом выкидывания конечного числа точек из замкнутой поверхности. Мы ограничимся рассмотрением поверхностей с отрицательной эйлеровой характеристикой, поскольку в остальных случаях интересующие нас результаты либо известны (в случае тора; этот случай охватывается [1]), либо бессодержательны. Мы определим пространство Тайхмюллера  $T_S$  как факторпространство  $H_S/\text{Diff}_0(S)$ , где  $H_S$  — пространство полных римановых метрик конечного объема и кривизны  $-1$  на  $S$ , а  $\text{Diff}_0(S)$  — группа диффеоморфизмов  $S \rightarrow S$ , изотопных  $\text{id}_S$ . В  $H_S$  можно ввести топологию, индуцированную  $C^\infty$ -топологией в пространстве римановых метрик, а в  $T_S$  — фактор-топологию. Однако в наших рассуждениях эта топология не будет играть практически никакой роли — они включают в себя другое построение топологии на  $T_S$  (см. п. 5.5). Наконец, модулярная группа Тайхмюллера  $\text{Mod}_S$  — это, по определению, фактор-группа  $\text{Diff}(S)/\text{Diff}_0(S)$ , где  $\text{Diff}(S)$  — это группа всех диффеоморфизмов  $S \rightarrow S$ . Группа  $\text{Mod}_S$  очевидным образом действует на  $T_S$  и на  $C(S)$ .

Наша цель — построить гладкое многообразие с углами  $X_S$  и действие  $\text{Mod}_S$  на  $X_S$  такие, что  $T_S$  является внутренностью многообразия  $X_S$ , т.е.  $T_S = X_S \setminus \partial X_S$ , и действие  $\text{Mod}_S$  на  $X_S$  продолжает естественное действие  $\text{Mod}_S$  на  $T_S$ . Кроме того, мы потребуем, чтобы  $X_S$  и действие  $\text{Mod}_S$  обладали следующими свойствами.

(i) Действие  $\text{Mod}_S$  на  $X_S$  разрывно. (Определение разрывных действий напомнимся в п. 6.2).

(ii) Некоторая подгруппа конечного индекса группы  $\text{Mod}_S$  действует на  $X_S$  свободно.

(iii) Фактор-пространство  $X_S/\text{Mod}_S$  компактно.

(iv) Край  $\partial X_S$  гомотопически эквивалентен геометрической реализации  $|C(S)|$  комплекса кривых  $C(S)$ .

Поскольку  $T_S$ , как известно, гомеоморфно евклидову пространству (при нашем построении топологии это будет просто очевидно),  $X_S$  будет автоматически обладать следующим важным свойством.

(v)  $X_S$  стягиваемо.

Обсуждение роли этих свойств можно найти в [4], § 4. Здесь мы отметим только, что они полностью аналогичны основным свойствам пространств  $\bar{Y}$ , построенных Борелем и Серром [1].

Я должен признать, что набросок конструкции такого  $X_S$ , содержащийся в работе Харви [2], выглядит вполне убедительно, и я без колебаний пользовался этими результатами уже в своих первых работах о когомологиях модулярных групп: см. [5] (в [4] был найден способ обходиться более простой формой связи между  $T_S$  и  $C(S)$ ). Правда, Харер [6] избегает пользоваться этими результатами. В действительности прямолинейные попытки реконструировать доказательство встречают значительные трудности.

Первая из этих трудностей (возможно, отчасти психологическая) связана с тем, что априори точки края  $\partial X_S$  не имеют никакого геометрического смысла (в [2] обсуждается только то, как надо добавлять край к  $T_S$ , и не объясняется, что надо добавлять). Вторая трудность связана с тем, что, как бы не определять точки края  $\partial X_S$ , они, видимо, окажутся объектами другой природы, нежели точки внутренности  $T_S$ . При этом, несколько неожиданно, наиболее трудным оказывается введение на  $X_S$  структуры гладкого многообразия, а не проверка свойств (i) – (iv).

Чтобы преодолеть первую трудность, мы определим точки границы  $\partial X_S$  как изотопические классы (т. е.  $\text{Diff}_0(S)$ -орбиты) некоторых геометрических структур на  $S$ , которые мы назовем сингулярными гиперболическими структурами. Это – полные римановы метрики конечного объема и кривизны  $-1$  на  $S \setminus C$ , где  $C$  – некоторое одномерное подмногообразие поверхности  $S$ . При этом требуется, чтобы метрика была стандартно устроена вблизи  $C$ . Точное определение см. в п. 4.1. Чтобы преодолеть вторую трудность, мы введем понятие слабой гиперболической структуры (см. п. 3.1). Эти структуры могут возникать путем „ослабления” как обычных, так и сингулярных гиперболических структур и служат мостом между ними. На  $X_S$  естественным образом вводится атлас, карты которого связаны с координатами Фенхеля–Нильсена. Главная трудность заключена в проверке согласованности карт в точках границы. Эта задача решается в два этапа. Сначала она сводится (с помощью леммы 5.3) к доказательству гладкой зависимости от параметров некоторых инвариантов слабых структур в семействах слабых структур, гладко зависящих от параметров. Затем эта гладкость зависимости от параметров доказывается на основе техники, развитой в § 1: Участвующие здесь семейства структур строятся с помощью скручиваний Фенхеля–Нильсена и потому оказываются лишь гладкими, а не вещественно аналитическими (см. п. 3.3, 4.3). В результате мы получаем на  $X_S$  лишь гладкую, а не вещественно аналитическую структуру. В действительности на этом пути можно получить и вещественно аналитическую структуру, однако для этого требуются дополнительные рассуждения, основанные на совсем других идеях. Я надеюсь обсудить эту тему в другом месте, вместе с элементарным подходом к построению комплексно аналитической структуры на  $T_S$ .

Все доказательства в работе по существу элементарны. В частности, мы не пользуемся комплексно аналитической теорией пространств Тайхмюллера. Необ-

ходимый запас сведений о пространствах Тайхмюллера почти полностью исчерпывается [7], Ехр. 3 и 7. Только при проверке свойства (i) мы сверх того используем недавнюю работу Берса и Гардинера [8], которая, впрочем, тоже использует довольно элементарные средства (см. доказательство леммы 6.4).

Все результаты этой работы применимы и к неориентируемым поверхностям, иногда с небольшими изменениями. Однако чтобы не загромождать изложения, мы в дальнейшем предполагаем рассматриваемую поверхность  $S$  ориентируемой и даже ориентированной.

[Наиболее существенные отличия неориентируемого случая отмечены в квадратных скобках. Первое из них – в число вершин комплекса  $C(S)$  не включаются изотопические классы окружностей, ограничивающих ленты Мебиуса. См. также [4].]

План работы таков. § 1 посвящен упомянутым выше результатам о гладкой зависимости от параметров. Отметим, что они имеют и самостоятельный интерес. Первая часть § 2 – это вспомогательные результаты о метриках на дисках с двумя дырами (края дыр иногда включаются в диск, иногда нет), для которых мне не удалось найти удобных ссылок. Вторая часть § 2 посвящена доказательству леммы 2.6, играющей решающую роль в построении гладкой структуры на  $X_S$ . Отметим, что лемма 2.6 вместе с леммой 1.10 мотивируют несколько неожиданный выбор квадратов функций длины, а не самих функций длины в качестве координат на  $X_S$ . См. п. 5.1 и 5.6. § 3 и 4 посвящены основным свойствам слабых и сингулярных гиперболических структур соответственно. Главные понятия здесь – скручивания (п. 3.3 и 4.3) и параметры скручивания (п. 3.6 и 4.4). § 5 посвящен построению гладкой структуры на  $X_S$ . Главное здесь, как уже было сказано, – проверка согласованности карт. Она осуществляется в п. 5.4 на основе леммы 5.3. В § 6 проверяются сформулированные выше свойства (i)–(iv). См. теоремы 6.5, 6.7 и 6.8.

Изложенный подход к построению  $X_S$  был анонсирован в [4], п. 4.7 и с дополнительными подробностями в [9].

## § 1. Семейства гиперболических метрик

Пусть  $S$  – поверхность конечного типа, возможно, с непустым краем. Гиперболической метрикой на  $S$  мы будем называть полную риманову метрику кривизны  $-1$  на  $S$ . Гиперболической структурой мы будем называть гиперболическую метрику с геодезическим краем. В этом параграфе мы исследуем гладкость зависимости от метрики различных выделенных кривых на  $S$  таких, как замкнутые геодезические в данном гомотопическом классе.

**1.1. Развертки.** Обозначим через  $\mathcal{U}$  верхнюю полуплоскость  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ , снабженную метрикой Пуанкаре. Пусть  $S \tilde{\rightarrow} S$  – универсальное накрытие. Разверткой гиперболической метрики  $h$  на  $S$  называется отображение  $d : S \tilde{\rightarrow} \mathcal{U}$ , локально являющееся изометрией между поднятием  $\tilde{h}$  метрики  $h$  и метрикой Пуанкаре. Как известно, такие отображения существуют и любые два таких отображения отличаются на движение  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ . Кроме того, если  $\partial S = \emptyset$ , то  $d$  биективно.

**1.2. Нормализованные развертки.** Фиксируем базисную точку  $b \in S \tilde{\phantom{\rightarrow}}$ , ненулевой касательный вектор  $v \in T_b S \tilde{\phantom{\rightarrow}}$  и ориентацию касательного пространства  $T_b S \tilde{\phantom{\rightarrow}}$ . Назовем развертку  $d$  нормализованной, если  $d(b) = \sqrt{-1}$ ,  $T_b d(v)$  – вектор с нулевой вещественной и положительной мнимой частью, и  $T_b d$  переводит ориентацию  $T_b S \tilde{\phantom{\rightarrow}}$  в стандартную. Очевидно, нормализованная развертка всегда существует и

однозначно определяется гиперболической метрикой  $h$ . Мы будем обозначать ее через  $d(h)$ .

**1.3. Гладкие семейства.** Риманову метрику на  $S$  можно рассматривать как сечение расслоения билинейных форм, ассоциированного с касательным. Аналогично семейство  $\{g_t\}_{t \in P}$  римановых метрик на  $S$  можно рассматривать как сечение индуцированного расслоения над  $S \times P$ . Если  $P$  – гладкое многообразие, то семейство метрик называется гладким, если гладким является соответствующее сечение.

Аналогично определяется гладкость семейств других объектов. Например, семейство отображений  $\{f_t : M \rightarrow N\}_{t \in P}$  называется гладким, если гладко соответствующее отображение  $M \times P \rightarrow N$ . Семейство подмногообразий  $\{M_t\}_{t \in P}$  многообразия  $N$  называется гладким, если существует гладкое семейство вложений  $\{f_t : M \rightarrow N\}_{t \in P}$  такое, что  $M_t = f_t(N)$  для всех  $t$ . Читатель может сам сформулировать аналогичные определения в других ситуациях.

**1.4. Лемма.** Пусть  $\{h_t\}_{t \in P}$  – гладкое семейство гиперболических метрик на  $S$ . Тогда соответствующее семейство нормализованных разверток  $\{d(h_t) : S \rightarrow \mathcal{U}\}_{t \in P}$  тоже является гладким. Иначе говоря,  $d(h)$  гладко зависит от  $h$ .

**Доказательство.** Пусть  $h$  – некоторая гиперболическая метрика на  $S$ . Обозначим через  $\exp$  экспоненциальное отображение метрики Пуанкаре в точке  $\sqrt{-1}$  и через  $\exp_a$  – экспоненциальное отображение поднятия  $h$  метрики  $h$  в точке  $a \in S$ .

Рассмотрим произвольный путь  $p : [0, 1] \rightarrow S$ , начинающийся в  $b$ . Очевидно, для некоторого  $n$  существуют числа  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$  и открытые множества  $U_1, \dots, U_n$  в  $S$  такие, что  $p([x_{i-1}, x_i]) \subset U_i$ , и замыкание  $\bar{U}_i$  лежит внутри области определения отображения  $\exp_{a_i}^{-1}$  для некоторого  $a_i \in U_i$  (для всех  $i = 1, \dots, n$ ). Мы будем смотреть на  $a_i$  как на базисную точку открытого множества  $U_i$  и, как и в точке  $b$ , выберем в каждой точке  $a_i$  ориентацию и ненулевой касательный вектор. Это позволяет очевидным образом определить локальные нормализованные развертки  $d_i(h) : U_i \rightarrow \mathcal{U}$ . Чтобы получить развертку вдоль всего пути  $p$ , нужно согласовать эти локальные развертки в точках  $x_i$ . Именно существуют такие движения  $M_i(h) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ , что  $d_i(h)$  совпадает с  $M_i(h) \circ d_{i+1}(h)$  на касательном пространстве в  $p(x_i)$  при  $1 \leq i \leq n-1$  и  $M_0(h) \circ d_1(h)$  нормализовано (в точке  $b = p(0)$ ). Как известно и непосредственно проверяется, нормализованная развертка  $d(h)$  совпадает вблизи  $p(1)$  с  $M_0(h) \circ \dots \circ M_{n-1}(h) \circ d_n(h)$ .

Из определений развертки и экспоненциальных отображений вытекает, что  $d_i(h) = \exp \circ L_i(h) \circ \exp_{a_i}^{-1}$ , где  $L_i(h) : T_{a_i} S \rightarrow T_{\sqrt{-1}} \mathcal{U}$  – изометрия, сохраняющая ориентацию и переводящая выбранный вектор в вектор с нулевой вещественной и положительной мнимой частью.

Применим теперь эти соображения к метрикам  $h = h_t$ . Для  $t$ , достаточно близких к произвольному фиксированному  $t_0$ , годится тот же выбор точек  $x_i, a_i$  и множеств  $U_i$ , что и для  $t_0$ . При этом очевидно, что  $L_i(h_t)$  гладко зависит от  $t$ . А в силу теорем о зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров гладко зависит от  $t$  и  $\exp_{a_i}$ . Отсюда вытекает, что гладко зависят от  $t$  развертки  $d_i(h_t)$ , движения  $M_i(h_t)$  и, наконец, развертка  $d(h_t)$  вблизи  $p(1)$ . Поскольку путь  $p$  произволен, это завершает доказательство.

**1.5. Циклы.** Рассмотрим на гиперболической плоскости  $\mathcal{U}$  всевозможные геодезические, их эквидистанты, орициклы и окружности в смысле геометрии Лобачевского.

Пусть теперь  $h$  – гиперболическая метрика на  $S$ . Рассмотрим те кривые на  $S$ , поднятия которых в  $S^{\sim}$  развертка  $d(h)$  переводит в отрезки кривых на  $\mathcal{U}$  из предыдущего абзаца. Замкнутые кривые из этого класса мы будем называть циклами. Примерами циклов могут служить геодезические окружности и их эквидистанты. Отметим, что кривые из рассматриваемого класса – это в точности кривые постоянной кривизны в метрике  $h$ . Однако это обстоятельство для нас несущественно. Отметим еще, что такая кривая либо является геодезической, либо выпукла, либо вогнута – в зависимости от того, с какой стороны мы смотрим.

**1.6. Лемма.** Пусть  $C$  – некоторая нетривиальная окружность на  $S$ . Пусть  $\{h_t\}_{t \in P}$  – гладкое семейство гиперболических метрик на  $S$ , и пусть  $u \in P$ . Предположим, что на  $S$  существует окружность  $C_u$ , изотопная  $C$  и геодезическая в метрике  $h_u$ . Тогда для всех  $t$ , достаточно близких к  $u$ , на  $S$  существует окружность  $C_t$ , изотопная  $C$  и геодезическая в метрике  $h_t$ . При этом  $\{C_t\}$  – гладкое семейство.

**Доказательство.** Представим  $C$  в виде образа некоторого пути  $p: [0, 1] \rightarrow S$ ,  $p(0) = p(1)$ , и выберем какое-нибудь поднятие  $\tilde{p}: [0, 1] \rightarrow S^{\sim}$  этого пути. Далее, выберем некоторый репер  $r$  в точке  $p(0)$  и обозначим через  $r_0, r_1$  его поднятия в точке  $\tilde{p}(0), \tilde{p}(1)$  соответственно. Очевидно, для любого  $t \in P$  существует одно и только одно движение  $M_t: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ , переводящее репер  $d(h_t)(r_0)$  в  $d(h_t)(r_1)$ , и это движение не зависит от выбора  $r$ . При этом  $M_u$  является гиперболическим движением и его инвариантная прямая  $L_u$  такова, что  $d(h_u)^{-1}(L_u)$  накрывает  $C_u$ . Ясно, что для  $t$ , близких к  $u$ , движение  $M_t$  тоже является гиперболическим и его инвариантная прямая  $L_t$  близка к  $L_u$ . Более того, прообраз  $d(h_t)^{-1}(L_t)$  накрывает замкнутую геодезическую  $C_t$ , изотопную  $C_u$  и тем самым  $C$ . Наконец, поскольку  $d(h_t)$  гладко зависит от  $t$  в силу леммы 1.4,  $M_t$  тоже гладко зависит от  $t$ . Отсюда вытекает, что и  $L_t$ , и  $C_t$  гладко зависят от  $t$ , что и требовалось.

**1.7. Лемма.** Пусть  $\{h_t\}_{t \in P}$  – гладкое семейство гиперболических метрик на  $S$ , и пусть  $u \in P$ . Пусть  $x \in S$ , и пусть  $C_u$  – цикл в метрике  $h_u$ , проходящий через  $x$ . Тогда для всех  $t$ , достаточно близких к  $u$ , на  $S$  существует цикл  $C_t$  в метрике  $h_t$ , проходящий через  $x$  и изотопный  $C_u$ . При этом  $C_t$  гладко зависит от  $t$ .

**Доказательство.** Пусть  $z \in \mathcal{U}$ , и пусть  $M$  – движение  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  такое, что  $M(z) \neq z$ . Тогда существует ровно одна кривая из класса, рассмотренного в п. 1.5, инвариантная относительно  $M$  и проходящая через  $z$ . Действительно, такая кривая – это в точности пересечение с  $\mathcal{U}$  окружности или прямой (в евклидовом смысле), проходящей через три точки  $z, M(z), M(M(z))$ . Ясно, что эта кривая гладко зависит от  $M$  (там, где  $M(z) \neq z$ ).

Используя эти кривые вместо инвариантных кривых, мы можем рассуждать точно так же, как в доказательстве леммы 1.6. Лемма доказана.

**1.8. Лемма.** Пусть  $\{C_t\}_{t \in P}, \{D_t\}_{t \in P}$  – гладкие семейства кривых на  $\mathcal{U}$ , и пусть  $u \in P$ . Предположим, что в каждом из семейств все кривые выпуклы в одну и ту же сторону. Пусть точки  $c_u, d_u$  лежат внутри  $C_u, D_u$  соответственно, причем  $c_u \neq d_u$  и расстояние  $d(c_u, d_u)$  между ними является локальным минимумом функции расстояния  $d: C_u \times D_u \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Предположим, что  $C_u$  и  $D_u$  выпуклы в сторону отрезка, соединяющего  $c_u$  с  $d_u$ . Тогда для всех  $t$ , достаточно близких к  $u$ , существуют точки  $c_t \in C_t, d_t \in D_t$  такие, что расстояние  $d(c_t, d_t)$  является локальным минимумом функции расстояния  $d: C_t \times D_t \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . При этом  $c_t$  и  $d_t$  гладко зависят от  $t$ .

**Доказательство.** Ввиду теоремы о неявной функции достаточно доказать, что гессиан функции  $d: C_u \times D_u \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  в точке локального минимума  $(c_u, d_u)$  невырожден. Пусть  $A, B$  – геодезические, касающиеся  $C_u, D_u$  в точках  $c_u, d_u$  соот-

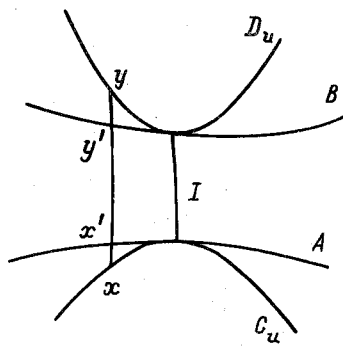


Рис. 1.

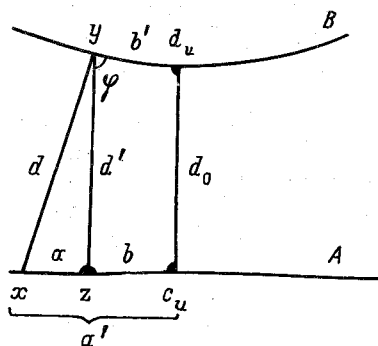


Рис. 2.

ветственно. Для любой пары точек  $(x, y) \in C_u \times D_u$ , достаточно близкой к  $(c_u, d_u)$ , геодезическая, проходящая через  $x, y$ , пересекает  $A$  и  $B$  в некоторых точках  $x'$  и  $y'$  соответственно. См. рис. 1. Ясно, что отображение  $F: (x, y) \rightarrow (x', y')$  является в окрестности пары  $(c_u, d_u)$  диффеоморфизмом. В силу предположения о направлении выпуклости  $d(x', y') \leq d(x, y)$ , т. е.  $d \circ F \leq d$  на  $C_u \times D_u$  (рис. 1). Далее, так как  $(c_u, d_u)$  — точка локального минимума, то отрезок  $I$ , соединяющий  $c_u$  с  $d_u$ , перпендикулярен кривым  $C_u$  и  $D_u$  и потому является общим перпендикуляром геодезических  $A$  и  $B$ . Следовательно,  $d(c_u, d_u) \leq d(x', y')$ , т. е.  $d(c_u, d_u) \leq d \circ F$ . Неравенства  $d(c_u, d_u) \leq d \circ F \leq d$  показывают, что если гессиан функции  $d$  вырожден, то вырожден и гессиан функции  $d \circ F$ . Поэтому нам достаточно доказать невырожденность гессиана функции  $d \circ F$ . А поскольку  $F$  является локальным диффеоморфизмом, нам достаточно доказать невырожденность гессиана функции расстояния  $d: A \times B \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  в точке  $(c_u, d_u)$ .

Для доказательства рассмотрим рис. 2. На нем  $x$  и  $y$  — произвольные точки гиперболических прямых  $A$  и  $B$  вблизи  $c_u$  и  $d_u$ , и  $z$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $y$  на прямую  $A$  (для  $y$ , достаточно близких к  $d_u$ , такой перпендикуляр существует). Положим  $a = d(x, z)$ ,  $b = d(z, c_u)$ ,  $a' = d(x, c_u)$ ,  $b' = d(y, d_u)$ ,  $d = d(x, y)$ ,  $d' = d(y, z)$ ,  $d_0 = d(c_u, d_u)$  и обозначим через  $\varphi$  угол между перпендикуляром  $yz$  и прямой  $B$  (рис. 2). Положим  $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . Стандартные соотношения гиперболической тригонометрии для четырехугольников с тремя прямыми углами и прямоугольных треугольников (см. [10], § 7.17 и 7.11 соответственно) дают соотношения

$$\operatorname{ch} d_0 = \operatorname{ch} d' \sin \varphi,$$

$$\operatorname{sh} b \operatorname{sh} d_0 = \cos \varphi,$$

$$\operatorname{ch} d = \operatorname{ch} d' \operatorname{cha}.$$

Докажем, что отображение  $y \rightarrow z$  локально является диффеоморфизмом  $B \rightarrow A$ . При фиксированном  $y$  точка  $z$  является точкой минимума функции  $x \rightarrow d(y, x)$ . Из формулы  $\operatorname{ch} d = \operatorname{ch} d' \operatorname{cha}$  вытекает, что это — невырожденная точка минимума (вторая производная  $d$  по  $a$  в 0 отлична от 0). Поэтому гладкость отображения



$y \mapsto z$  вытекает из теоремы о неявной функции. Гладкость отображения  $z \mapsto y$  тоже вытекает из теоремы о неявной функции, поскольку  $y$  — точка трансверсального пересечения перпендикуляра к  $A$  в  $z$  с прямой  $B$ . Следовательно,  $y \mapsto z$  — локальный диффеоморфизм.

Расстояния  $a'$  и  $b'$ , снабженные обычным образом знаками, являются естественными локальными параметрами на прямых  $A$  и  $B$ . В силу предыдущего абзаца  $b'$  можно заменить на  $b$ . Далее, ясно, что и  $(a, b) = (a' - b, b)$  являются локальными параметрами. Наконец, из формулы  $\operatorname{sh} b \operatorname{sh} d_0 = \cos \varphi = \sin \psi$  вытекает, что  $b$  можно заменить на  $\psi$ . Выразим теперь  $\operatorname{ch} d$  через  $a$  и  $\psi$ :

$$\operatorname{ch} d = \operatorname{ch} d' \operatorname{ch} a = \frac{\operatorname{ch} d_0}{\sin \varphi} \operatorname{ch} a = \operatorname{ch} d_0 \frac{\operatorname{ch} a}{\cos \psi}.$$

Дифференцирование показывает, что гессиан функции  $\operatorname{ch} d$  (как функции от  $a, \psi$ ) равен  $\operatorname{ch} d_0 \cdot E$ , где  $E$  — единичная матрица, и, в частности, невырожден. Так как  $d_0 \neq 0$ , то  $\operatorname{ch}'(d_0) \neq 0$ , и потому невырожден и гессиан функции  $d$ . Это завершает доказательство.

**1.9. Голономия и длины.** отождествим обычным образом группу движений гиперболической плоскости  $\mathcal{U}$  с  $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Для  $x \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$  положим  $|\operatorname{tr}(x)| = |\operatorname{tr}(x \sim)|$ , где  $x \sim$  — любое из двух поднятий элемента  $x$  в  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ .

Пусть  $h$  — гиперболическая метрика на  $S$ . Кроме развертки, с ней связан гомоморфизм голономии  $\rho(h) : \pi_1(S) \rightarrow \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ , который характеризуется следующим свойством: для любых  $g \in \pi_1(S)$ ,  $x \in S \sim$

$$d(h)(gx) = \rho(h)(g)(d(h)(x)),$$

где  $(g, x) \mapsto gx$  — естественное действие  $\pi_1(S)$  на  $S \sim$ .

Пусть  $g \in \pi_1(S)$ . В случае, если  $|\operatorname{tr}(\rho(h)(g))| \geq 2$ , определим число  $l_g(h)$  формулой

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2} l_g(h) = \frac{1}{2} |\operatorname{tr}(\rho(h)(g))|.$$

Если петля, представляющая  $g$ , свободно гомотопна геодезической метрики  $h$ , то  $l_g(h)$  определено и равно длине этой геодезической. Этот стандартный факт вытекает, например, из [10], § 7.34. Например, если некоторая компонента края  $\partial S$  является геодезической, то  $l_g(h)$  равно длине этой геодезической для любого  $g$ , соответствующего этой компоненте. Аналогично если  $g$  представляется петлей, обходящей прокол (дыру без края), то  $l_g(h) = 0$ , поскольку в этом случае  $\rho(h)(g)$  является параболической изометрией.

**1.10. Лемма.** Пусть  $\{h_t\}_{t \in P}$  — гладкое семейство гиперболических метрик на  $S$ . Если  $l_g(h_t)$  определено для всех  $t \in P$ , то  $t \mapsto l_g^2(h_t)$  — гладкая функция.

**Доказательство.** Из леммы 1.4 вытекает, что  $\{\rho(h_t)(g)\}_{t \in P}$  — гладкое семейство (ср. доказательство леммы 1.6). Остается заметить, что  $l^2$  гладко выражается через  $\operatorname{ch} \frac{1}{2} l$ .

Отметим, что функция  $t \mapsto l_g(h_t)$ , вообще говоря, не является гладкой в тех точках  $t$ , в которых  $l_g(h_t) = 0$ . См. лемму 2.6. Однако в силу леммы 1.10 эти функции непрерывны.

## § 2. Гиперболические метрики на дисках с двумя дырами

Пусть  $P$  — диск с двумя дырами, и пусть  $Q$  — это либо  $P$ , либо результат выбрасывания из  $P$  некоторых (возможно, всех) компонент края.<sup>1</sup> В этом параграфе мы изучим гиперболические структуры и некоторые более общие гиперболические метрики на  $Q$  и построим специальные семейства гиперболических метрик на  $P$ . Напомним, что гиперболическая структура — это гиперболическая метрика с геодезическим краем.

**2.1. Инволюции на  $Q$ .** Соединим попарно компоненты края  $\partial P$  тремя попарно не пересекающимися отрезками. Эти отрезки разбивают  $P$  на два шестиугольника. Очевидно, существует инволюция  $\rho: P \rightarrow P$ , переставляющая эти шестиугольники, сохраняющая компоненты края  $\partial P$  и имеющая в качестве множества неподвижных точек объединение трех выбранных отрезков. Все такие инволюции, очевидно, сопряжены. При этом сопрягающий диффеоморфизм можно выбрать сохраняющим компоненты края, так что он изотопен  $\text{id}_P$ . Инволюция  $\rho$  индуцирует инволюцию  $Q \rightarrow Q$ , которую мы также обозначим через  $\rho$ . Очевидно,  $\rho$  обращает ориентацию.

**2.2 Л е м м а.** *Для любой гиперболической структуры  $h$  на  $Q$  существует изометрическая инволюция  $\rho_h: Q \rightarrow Q$ , сопряженная с  $\rho$ . Ее множество неподвижных точек состоит из трех геодезических дуг.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В случае  $Q = P$  это доказано в [7], Ехр. 3, § II. Пусть  $Q \neq P$ . Рассмотрим конформную структуру, соответствующую  $h$ . Она изоморфна либо сфере с тремя проколами, либо диску с двумя проколами, либо кольцу с одним проколом. Преобразованием Мёбиуса мы можем в первом случае совместить проколы с точками  $0, 1, \infty$ , а во втором случае — совместить один из проколов с центром диска. Ясно, что в любом случае получающаяся риманова поверхность допускает антиголоморфную инволюцию, сопряженную с  $\rho$  (рис. 3). Воспользуемся теперь тем, что исходная метрика  $h$  является внутренней метрикой рассматриваемой конформной структуры (см. [11], гл. II). Отсюда вытекает, что наша инволюция является изометрией. Наконец, множество неподвижных точек обращающей ориентацию изометрии всегда состоит из геодезических.

**2.3. Л е м м а.** *Гиперболическая структура  $h$  на  $Q$  определяется, с точностью до изотопии, длинами компонент края  $\partial Q$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Снова в случае  $Q = P$  это доказано в [7], Ехр. 3, § II. В случае  $\partial Q = \emptyset$  утверждение хорошо известно (никаких длин нет и есть только одна структура). Пусть  $Q \neq P$  и  $\partial Q \neq \emptyset$ . Разрежем  $Q$  по множеству неподвижных точек инволюции  $\rho_h$  из леммы 2.2. Мы получим два изометричных идеальных  $(b+3)$ -угольника, где  $b$  — число компонент края  $\partial Q$ ,  $b = 1$  или  $2$ . В этих  $(b+3)$ -угольниках по  $2b$  прямых углов, а остальные вершины лежат на бесконечности (рис. 4). Длины тех сторон этих  $(b+3)$ -угольников, которые возникают из компонент края, очевидно, равны половине длин соответствующих компонент края. Решающий факт заключается в том, что  $(b+3)$ -угольник с точностью до изометрии определяется длинами этих сторон. В случае  $b = 1$  это очевидно, в случае  $b = 2$  доказательство аналогично доказательству леммы 6 из [7], Ехр. 3, § II (и фактически в нем содержится).

Чтобы восстановить структуру  $h$ , нужно склеить два этих  $(b+3)$ -угольника по трем сторонам (краям разрезов) при помощи изометрии  $\rho_h$ . Поскольку сохраняющая ориентацию автоизометрия такого  $(b+3)$ -угольника, очевидно, является

<sup>1</sup> Допуская вольность речи, мы иногда будем называть и такие  $Q$  дисками с двумя дырами.

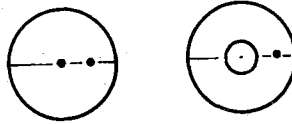


Рис. 3.

тождественным отображением, склеивание определено однозначно. Отсюда вытекает, что  $h$  определяется длинами компонент края с точностью до изометрии. Чтобы получить результат с точностью до изотопии, достаточно воспользоваться тем, что любая инволюция, сопряженная  $\rho$ , сопряжена  $\rho$  посредством диффеоморфизма, изотопного  $\text{id}_P$ .

**2.4. Допустимые метрики.** Возьмем какую-нибудь гиперболическую структуру  $h$  на  $Q$ . Вырежем из  $Q$  окрестности некоторых компонент края  $\partial P$ , ограниченные эквидистантами компонент или орициклами (в зависимости от того, входит компонента в  $\partial Q$  или нет). Мы получим многообразие  $Q'$  того же типа, что и  $Q$ , вместе с гиперболической метрикой  $h'$  — ограничением метрики  $h$ . Такие метрики  $h'$  мы будем называть *допустимыми*. Очевидным образом можно говорить и о допустимых метриках на  $Q$ . Край допустимой метрики, очевидно, вогнут.

Ясно, что при естественном отождествлении  $\pi_1(Q)$  и  $\pi_1(Q')$  гомоморфизмы голономии (п. 1.9)  $\rho(h)$  и  $\rho(h')$  совпадают. Поэтому длины компонент края  $\partial P$  в метрике  $h$  определяются метрикой  $h'$  на  $Q'$  (см. п. 1.9). Здесь мы полагаем длину, равной 0, если компонента не входит в  $\partial Q$ . Если компоненты края  $\partial P$  как-нибудь пронумерованы, то длину  $i$ -й компоненты мы будем обозначать через  $l_i(h')$ . В силу леммы 1.10 квадраты длин  $l_i^2(\cdot)$  гладко зависят от параметров в гладких семействах допустимых метрик (на фиксированном многообразии).

Отметим, что, с точностью до изотопии,  $h$  легко восстанавливается по  $h'$ . Именно к каждой негеодезической компоненте края  $\partial Q'$  нужно приклеить либо стандартный рог, либо стандартное кольцо, ограниченное геодезической окружностью и ее эквидистантой. Что нужно приклеивать — рог или кольцо — и чему равна длина этой геодезической окружности, определяется длинами из предыдущего абзаца.

Инволюция  $\rho_h$  из леммы 2.2, очевидно, сохраняет  $Q'$ . Обозначим индуцированную инволюцию через  $\rho_{h'} : Q' \rightarrow Q'$ . Множество неподвижных точек инволюции  $\rho_{h'}$ , как и  $\rho_h$ , очевидно, состоит из трех геодезических дуг. Эти дуги мы будем называть выделенными дугами (или отрезками) метрики  $h'$ .

**2.5. Лемма.** Если выделенный отрезок соединяет две компоненты края  $\partial Q'$ , то он является кратчайшим отрезком в  $Q'$ , соединяющим эти компоненты края. В гладких семействах допустимых метрик выделенные дуги гладко зависят от параметров.

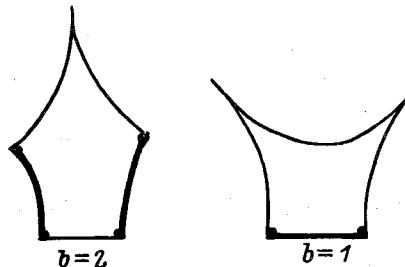


Рис. 4.

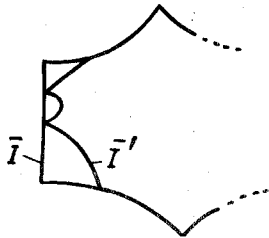


Рис. 5.

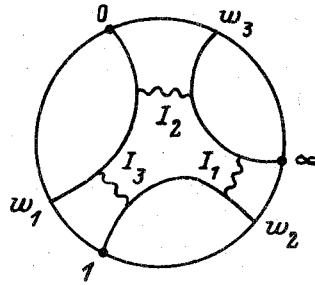


Рис. 6.

**Доказательство.** Пусть  $I$  – выделенный отрезок и  $I'$  – какой-нибудь другой отрезок, соединяющий две компоненты края. Рассмотрим фактор  $Q'/\rho_{h'}$ . Он является (идеальным) многоугольником, одной из сторон которого является образ  $\bar{I}$  отрезка  $I$ . Стороны, примыкающие к  $\bar{I}$ , не обязательно являются геодезическими, однако они выпуклы в сторону  $\bar{I}$ , и  $\bar{I}$  является их общим перпендикуляром. Поэтому  $\bar{I}$  является кратчайшим отрезком, соединяющим эти стороны. С другой стороны, образ  $\bar{I}'$  отрезка  $I'$  тоже соединяет эти стороны. Поэтому  $\bar{I}'$  длиннее  $\bar{I}$  и, следовательно,  $I'$  длиннее  $I$ . См. рис. 5. Первое утверждение доказано.

Для выделенных отрезков, соединяющих компоненты края, второе утверждение вытекает из первого и леммы 1.8. Случай выделенных дуг, уходящих на бесконечность, следующим образом сводится к случаю отрезков. Вырежем из  $Q'$  ограниченные орициклами окрестности тех компонент края  $\partial P$ , которые не входят в  $\partial Q$  и окрестности которых не вырезаны в  $Q'$ . Мы получим компактное многообразие  $Q''$  с метрикой  $h''$ . Пользуясь леммой 1.7, мы можем добиться, чтобы  $(Q'', h'')$  гладко зависели от параметров. Тогда и выделенные отрезки в  $Q''$  будут гладко зависеть от параметров. Поскольку выделенные дуги в  $Q'$  являются геодезическими и продолжают эти выделенные отрезки, они тоже гладко зависят от параметров.

**2.6. Лемма.** Для любого  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  существует окрестность  $U$  точки  $u$  в  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$  и семейство  $\{h_\lambda\}_{\lambda \in U}$  допустимых метрик на  $P$  такое, что:

(i)  $l_i(h_\lambda) = \sqrt{\lambda_i}$  для всех  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in U$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $l_i$  –  $i$ -й инвариант из п. 2.4;

(ii) если  $u_j \neq 0$ , то  $j$ -я компонента края  $\partial P$  является геодезической для всех метрик  $h_\lambda$ ,  $\lambda \in U$ ;

(iii) если  $u_j = 0$ , то длина  $j$ -й компоненты края  $\partial P$  в метрике  $h_u$  может быть сделана сколь угодно малой.

**Доказательство.** В ходе доказательства мы будем иметь дело не только с допустимыми метриками. Заметим, что, используя п. 1.9, можно определить инварианты  $l_i$  и для более общих метрик на  $P$ . Именно мы положим  $l_i(\cdot) = l_{g_i}(\cdot)$ ,

где  $g_i$  – элемент группы  $\pi_1(P)$ , определенный произвольной петлей, обходящей один раз вокруг  $i$ -й компоненты края. От выбора петли это определение не зависит.

Мы разобьем доказательство на три пункта. В п. 1 мы построим некоторое семейство метрик  $\{h_w\}$ , для которого мы сможем вычислить инварианты  $l_i(h_w)$ . Метрики  $h_w$ , вообще говоря, не будут допустимыми. В п. 2 мы покажем, как замена параметров получить из  $\{h_w\}$  такие семейства  $\{h_\lambda\}$ , что  $l_i(h_\lambda) = \sqrt{\lambda_i}$ . Наконец, в п. 3 мы объясним, как преобразовать метрики  $h_\lambda$  в допустимые.

1. Исходной точкой построения служит рис. 6. На нем в качестве модели гиперболической плоскости взят диск, хотя формулы мы будем по-прежнему писать для верхней полуплоскости. Точки  $0, 1, \infty$  разбивают абсолют на три интервала  $(0, 1), (1, \infty), (\infty, 0)$ . Пусть  $w_1, w_2, w_3$  — точки на абсолют, лежащие соответственно в полуоткрытых интервалах  $(0, 1], (1, \infty], (\infty, 0]$ . Пусть  $L_1, L_2, L_3$  — гиперболические прямые, соединяющие соответственно  $0$  с  $w_1, 1$  с  $w_2, \infty$  с  $w_3$ . Соединим попарно эти прямые попарно непересекающимися отрезками  $I_1, I_2, I_3$ , как на рисунке. Мы требуем, чтобы отрезки  $I_i$  имели в своих концах касание бесконечного порядка с перпендикулярами к прямым  $L_j$ .

Рассмотрим часть  $X$  гиперболической плоскости, ограниченную отрезками  $I_1, I_2, I_3$  и отрезками прямых  $L_1, L_2, L_3$ , соединяющими их концы. Склеим два экземпляра  $X$  вдоль этих отрезков прямых  $L_1, L_2, L_3$ . Результат  $Y$  этого склеивания имеет очевидную структуру гладкого многообразия (ср. [7], Эксп. 3, § II; здесь важно условие касания) и диффеоморфен  $P$ . Кроме того,  $Y$  наследует из гиперболической плоскости гиперболическую метрику  $h$ . Ясно, что

$$l_i(h) = 2\rho(L_j, L_k),$$

где  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ,  $l_i(\cdot)$  — инвариант, отвечающий той компоненте края, которая получается удвоением отрезка  $I_i$ , и  $\rho(L_j, L_k)$  — расстояние между прямыми  $L_j$  и  $L_k$ .

Расстояния  $\rho(L_j, L_k)$  можно выразить через  $w_1, w_2, w_3$ . Именно если точки абсолюта  $z_1, y_1, y_2, z_2$  следуют в выписанном порядке и прямые  $K_1, K_2$  соединяют  $z_1$  и  $z_2, y_1$  и  $y_2$  соответственно, то

$$[z_1, y_1, y_2, z_2] \cdot \text{th}^2 \left( \frac{1}{2} \rho(K_1, K_2) \right) = 1,$$

где  $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$  — двойное отношение (см. [10], § 7.23). Отсюда мы получаем

$$\text{th}^2 \frac{1}{4} l_1 = [w_2, \infty, w_3, 1]^{-1} = \frac{1-w_3}{w_2-w_3},$$

$$\text{th}^2 \frac{1}{4} l_2 = [w_3, 0, w_1, \infty]^{-1} = \frac{w_3}{w_3-w_1},$$

$$\text{th}^2 \frac{1}{4} l_3 = [w_1, 1, w_2, 0]^{-1} = \frac{w_2(w_1-1)}{w_1-w_2}.$$

Изложенная конструкция зависит от параметров  $w_1, w_2, w_3$  и выбора отрезков  $I_1, I_2, I_3$ . Ясно, что отрезки можно выбрать гладко зависящими от параметров. Мы получим семейство многообразий  $X = X(w)$  и  $Y = Y(w)$ , причем  $Y(w)$  снабжено гиперболической метрикой  $h(w)$ . Положим  $X_0 = X(1, \infty, 0), Y_0 = Y(1, \infty, 0)$ . Ясно, что существует гладкое семейство диффеоморфизмов  $\varphi(w) : X_0 \rightarrow X(w)$ , и, более того, его можно выбрать так, что два экземпляра  $\varphi$  составят гладкое семейство диффеоморфизмов  $\psi(w) : Y_0 \rightarrow Y(w)$ . Ср. [7], Эксп. 3, конец § II, где речь идет о построении непрерывного семейства, однако лишь потому, что гладкость там не нужна. Прообраз при диффеоморфизме  $\psi(w)$  метрики  $h(w)$  является

гиперболической метрикой на  $Y_0$ . Перенеся эти метрики на  $P$  при помощи какого-нибудь фиксированного диффеоморфизма  $P \rightarrow Y_0$ , мы получим гладкое семейство  $\{h_w\}$ . Их инварианты  $l_i(\cdot)$ , очевидно, задаются приведенными выше формулами.

2. Докажем сначала, что любой набор  $l_1, l_2, l_3 \geq 0$  встречается в качестве инвариантов  $l_1(h_w), l_2(h_w), l_3(h_w)$ . Заметим для этого, что для любых  $l_1, l_2, l_3 \geq 0$  найдутся три прямые, попарные расстояния между которыми равны  $l_1/2, l_2/2, l_3/2$ . В случае положительных  $l_i$  это следует из леммы 6 в [7], Эксп. 3; с тривиальными изменениями ее доказательство применимо и в том случае, когда некоторые  $l_i$  равны 0. Ясно, что если мы совместим движением подходящие три из шести концов этих прямых с точками  $0, 1, \infty$ , то мы найдем нужные  $w_1, w_2, w_3$ .

Положим теперь  $w_1 = 1-x, w_2 = 1/y, w_3 = -z$ , где  $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq z < \infty$ . Тогда

$$\operatorname{th}^2 \frac{1}{4} l_1 = \frac{y + yz}{1 + yz},$$

$$\operatorname{th}^2 \frac{1}{4} l_2 = \frac{z}{z + 1 - x},$$

$$\operatorname{th}^2 \frac{1}{4} l_3 = \frac{x}{xy - y + 1}.$$

Рассмотрим отображение  $L$ , переводящее  $(x, y, z)$  в тройку правых частей этих формул. Его якобиан имеет вид

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

Диагональные члены равны  $(1-y)/(xy-y+1)^2, ((1+z)/(1+yz))^2, (1-x)/(z+1-x)^2$ , а внедиагональные члены  $-x(1-x)/(xy-y+1)^2, y(1-y)/(1+yz)^2, z/(z+1-x)^2$ . Якобиан равен произведению диагональных членов плюс произведение внедиагональных членов, т.е.

$$((1-y)(1+z)(1-x) + x(1-x)y(1-y)z)/D = (1-x)(1-y)(1+z+xyz)/D,$$

где  $D$  — произведение знаменателей, и потому всегда отличен от 0.

Следовательно, пользуясь теоремой об обратной функции, в окрестности любой точки  $(x_0, y_0, z_0)$  параметры  $(x, y, z)$  можно заменить на такие параметры  $(u_1, u_2, u_3)$ , что  $\operatorname{th}^2 \frac{1}{4} l_i = u_i$ , т.е.  $\operatorname{th} \frac{1}{4} l_i = \sqrt{u_i}, i = 1, 2, 3$ . Положим далее  $u_i(\lambda_i) = \operatorname{th}^2 \frac{1}{4} \sqrt{\lambda_i}$ . Поскольку  $u_i(\lambda_i)$  — гладкая функция на  $\mathbf{R}_{\geq 0}$  с необращающейся в 0 производной, параметры  $u_i$  можно заменить на  $\lambda_i$ , для которых  $\operatorname{th} \frac{1}{4} l_i = \operatorname{th} \frac{1}{4} \sqrt{\lambda_i}$ , т.е.  $l_i(h_{\lambda}) = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, 3$ .

Тем самым мы нашли обещанные замены параметров в окрестности любой точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Принимая во внимание сказанные в первом абзаце этой части доказательства, в этих локальных семействах встречаются любые значения  $(l_1, l_2, l_3)$  и, что то же самое, любые значения  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

3. Теперь мы преобразуем построенные метрики в допустимые. Мы можем считать, что отрезки  $I_i$  из п. 1 лежат достаточно близко к абсолютну. Тогда в  $P$ , снабженном метрикой  $h_\lambda$ , для каждой компоненты края  $\partial P$  существует цикл, гомотопный этой компоненте. Если  $\lambda_i \neq 0$ , то в качестве  $i$ -го цикла можно взять геодезическую. Более того, для  $\lambda$ , достаточно близких к  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , где  $u_i \neq 0$ , эта геодезическая гладко зависит от  $\lambda$  в силу леммы 1.6. Аналогично для  $\lambda$ , достаточно близких к такому  $u$ , что  $u_i = 0$ ,  $i$ -й цикл можно выбрать гладко зависящим от  $\lambda$ , пользуясь леммой 1.7. Для этого нужно только фиксировать подходящую точку  $x \in P$ . При этом если  $I_i$  лежит достаточно близко к абсолютну, а  $x$  — достаточно близко к бесконечности, то длина этого цикла сколь угодно мала. Вырежем теперь из  $P$  кольца, ограниченные выбранными циклами. Мы получим семейство многообразий  $P'_\lambda$ , снабженных допустимыми метриками  $h'_\lambda$ . Так же как в п. 1, эти метрики можно перенести на  $P$  при помощи гладкого семейства диффеоморфизмов. В результате мы получим семейства метрик на  $P$ , обладающие всеми нужными свойствами.

### § 3. Слабые гиперболические структуры

В этом параграфе вводится чисто техническое понятие слабой гиперболической структуры и обсуждаются основные свойства этих структур.

3.1. **О п р е д е л е н и е.** *Слабая гиперболическая структура*  $w$  на поверхности  $S$  — это четверка  $(A, B, g, \mu)$ , состоящая из подповерхностей  $A$  и  $B$  поверхности  $S$ , гиперболической метрики  $g$  на  $B$  и (неособого) слоения с трансверсальной мерой  $\mu$  на  $A$ . При этом должны быть выполнены следующие условия (i) — (iv).

(i)  $S = A \cup B, A \cap B = \partial A \subset \partial B, \partial S \subset \partial B$ .

(ii)  $A$  является дизъюнктивным объединением нескольких колец.

(iii) Каждая компонента края  $\partial S$  является геодезической в метрике  $g$ . Каждая компонента края  $\partial B$  является циклом в метрике  $g$ , выпуклым в направлении  $B$ , так что  $B$  с метрикой  $g$  локально вогнута.

(iv) Слоение  $\mu$  трансверсально  $\partial A$ . Его трансверсальная мера индуцирует на каждой компоненте края  $\partial A$  меру, пропорциональную длине дуги, определенной метрикой  $g$ .

В силу классификации слоений с мерой на кольце (см. [7], Ехр. 6, § 1) на каждой компоненте поверхности  $A$  слоение  $\mu$  диффеоморфно стандартному слоению на цилиндре  $S^1 \times [0, 1]$  со слоями  $\theta \times [0, 1]$  и мерой, пропорциональной  $d\theta$ .

Каждую компоненту поверхности  $A$  можно стянуть на некоторую окружность в  $S$ . Изотопические классы этих окружностей определены однозначно. Ввиду теоремы Гаусса—Бонне из условия выпуклости в (iii) вытекает, что окружности, отвечающие разным компонентам, неизотопны. Совокупность изотопических классов этих окружностей образует симплекс комплекса  $C(S)$ , который мы обозначаем через  $\sigma(w)$ .

Семейство слабых гиперболических структур по определению считается гладким, если все составляющие  $A, B, g, \mu$  гладко зависят от параметров. При желании читатель может дать более формальное определение.

В определении слабой гиперболической структуры не исключается случай  $A = \emptyset$ . В этом случае речь идет просто об обычных гиперболических структурах.

[Случай неориентируемых поверхностей отличается только тем, что некоторым компонентам  $A$  разрешается быть лентами Мёбиуса.]

**3.2. Ослабление структуры.** Пусть  $w = (A, B, g, \mu)$  — слабая гиперболическая структура, и пусть  $\tau$  — симплекс комплекса  $C(S)$ . Структуру  $w$  мы будем называть  $\tau$ -хорошей, если  $\sigma(w) \subset \tau$  и каждую вершину разности  $\tau \setminus \sigma(w)$  можно представить окружностью, лежащей в  $B$  и геодезической в метрике  $g$ . Из условия выпуклости в (iii) вытекает, что такая геодезическая только одна, если она существует.

Предположим, что  $w$  является  $\tau$ -хорошей, и построим по  $w$  структуру  $w'$  такую, что  $\sigma(w) = \tau$ . Представим вершины симплекса  $\tau \setminus \sigma(w)$  геодезическими и для каждой из этих геодезических  $D$  возьмем какую-нибудь кольцевую окрестность  $A_D$ , ограниченную ее эквидистантами. Снабдим  $A_D$  слоением, слоями которого являются отрезки геодезических, ортогональных  $D$ , и снабдим это слоение какой-нибудь трансверсальной мерой, пропорциональной на  $D$  длине дуги. Кольца  $A_D$  выберем так, чтобы они попарно не пересекались. Добавив к  $A$  объединение всех  $A_D$  и выбросив из  $B$  их внутренности, мы получим новую структуру  $w'$ . Любая такая структура называется *ослаблением* структуры  $w$ .

Если  $\{w_t\}_{t \in P}$  — гладкое семейство  $\tau$ -хороших структур, то, пользуясь леммами 1.6 и 1.7, ослабления  $w'_t$  этих структур можно выбрать так, что они будут образовывать гладкое семейство.

**3.3. Скручивания слабых гиперболических структур.** Как и в случае обычных гиперболических структур (ср. [4], п. 4.3), скручивания определяются с помощью раз и навсегда фиксированного гладкого семейства диффеоморфизмов  $\{\varphi_t: S^1 \times X \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times X \times [0, 1]\}_{t \in \mathbb{R}}$  такого, что:

- (i)  $\varphi_t$  совпадает с  $\text{id}$  вблизи  $S^1 \times 1$ ;
- (ii)  $\varphi_t$  совпадает с некоторым поворотом цилиндра  $S^1 \times [0, 1]$  вблизи  $S^1 \times 0$ ;
- (iii) поднятие диффеоморфизма  $\varphi_t$  на универсальное накрывающее  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  цилиндра  $S^1 \times [0, 1]$  (накрытие задается формулой  $(\theta, t) \mapsto (e^{i\theta}, t)$ ), совпадающее с  $\text{id}$  вблизи  $\mathbb{R} \times 1$ , совпадает вблизи  $\mathbb{R} \times 0$  со сдвигом на расстояние  $t$  (знак  $t$  и ориентация  $S^1$  определяют направление сдвига).

Ясно, что такое семейство существует.

Рассмотрим  $\tau$ -хорошую структуру  $w = (A, B, g, \mu)$ . Для каждого  $v \in \sigma(w)$  обозначим через  $A_v$  компоненту поверхности  $A$ , соответствующую  $v$ , и возьмем какое-нибудь вложение  $E_v: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \text{int } A_v$ , сохраняющее ориентацию и индуцирующее из  $\mu$  стандартное слоение (с мерой, пропорциональной  $d\theta$ ; ср. п. 3.1). Далее, представим каждую вершину  $v$  разности  $\tau \setminus \sigma(w)$  геодезической  $C_v$  в  $B$ . Как-нибудь ориентируем эти геодезические и отметим на них точки. Тогда для каждого  $v \in \tau \setminus \sigma(w)$  однозначно определен диффеоморфизм  $d_v: S^1 \rightarrow C_v$ , сохраняющий ориентацию и отмеченные точки и умножающий длины на  $l_v/2\pi$ , где  $l_v$  — длина  $C_v$ . Здесь  $S^1$  — единичная окружность в  $\mathbb{R}^2$  с отмеченной точкой  $(1, 0)$ . При достаточно малых  $\epsilon$  формулы

$$E_v(x, t) = \exp_y(\epsilon t v_y),$$

$$y = d_v(x),$$

где  $v_y$  — ориентированная нормаль к  $C_v$  в  $y$  ( $v_y \in T_y S$ ), определяют вложение  $E_v: S^1 \times [0, 1] \rightarrow B$ . При достаточно малых  $\epsilon$  их образы попарно не пересекаются.

Пусть теперь  $\theta \in \mathbb{R}^\tau$  (где  $\mathbb{R}^\tau$  — как обычно, пространство функций  $\tau \rightarrow \mathbb{R}$ ). *Скрученная структура*  $w(\theta)$  имеет вид  $(A, B, g(\theta), \mu(\theta))$ . Метрика  $g(\theta)$  совпадает



с  $g$  вне образов вложений  $E_\nu$  и совпадает на  $\text{Im } E_\nu$  с образом метрики  $g$  при диффеоморфизме  $E_\nu \circ \varphi_{\theta(\nu)} \circ E_\nu^{-1}$  при всех  $\nu \in \tau \setminus \sigma(w)$ . Аналогично  $\mu(\theta)$  совпадает с  $\mu$  вне образов вложений  $E_\nu$  и совпадает на  $\text{Im } E_\nu$  с образом  $\mu$  при  $E_\nu \circ \varphi_{\theta(\nu)} \circ E_\nu^{-1}$  при всех  $\nu \in \sigma(w)$ . Это определяет структуру  $w(\theta)$  (которая, впрочем, зависит не только от  $\theta$ , но и от  $\epsilon$  и выбора  $E_\nu$ ).

Пусть теперь  $\{w_t\}_{t \in P}$  — гладкое семейство  $\tau$ -хороших структур. Ясно, что вложения  $E_\nu$  можно выбрать гладко зависящими от  $t$  (для  $\nu \in \tau \setminus \sigma(w_t)$  это обеспечивается леммой 1.6). Тогда и семейство  $\{w_t(\theta)\}_{t \in P, \theta \in \mathbb{R}^r}$ , очевидно, будет гладким.

Скручивания очевидным образом согласованы с ослаблением структур. Именно если  $w'$  — ослабление структуры  $w$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^r$  и структуры  $w, w'$  —  $\tau$ -хорошие, то  $w'(\theta)$  — ослабление структуры  $w(\theta)$  (при согласованном выборе вложений).

[В неориентируемом случае вершины симплекса  $\tau$  должны представляться двусторонними окружностями.]

**3.4. Оснащения.** Пусть  $\sigma$  — симплекс максимальной размерности комплекса  $C(S)$ .

Представим вершины симплекса  $\sigma$  попарно не пересекающимися окружностями  $\Gamma_\nu$ ,  $\nu \in \sigma$ . Если разрезать  $S$  вдоль этих окружностей, то мы получим несколько дисков с двумя дырами. Если склеить по  $\Gamma_\nu$  примыкающие к  $\Gamma_\nu$  диски с двумя дырами, то мы получим некоторую поверхность  $Q_\nu$ , диффеоморфную либо сфере с четырьмя дырами, либо тору с одной дырой. Некоторые из дыр на самом деле являются проколами — те, которые соответствуют проколам самой  $S$ . Фиксируем в каждом  $Q_\nu$  собственную дугу  $I_\nu$ , трансверсально пересекающую  $\Gamma_\nu$  в одной точке, и такую, что  $\partial I_\nu \subset \partial Q_\nu$ . Так что  $I_\nu$  соединяет компоненту края или прокол с компонентой края или проколом. Отметим, что если фиксировать эти компоненты края (или проколы), то, с точностью до объемлемой изотопии, любые две таких дуги отличаются на некоторую степень скручивания Дена вдоль  $\Gamma_\nu$  (это вытекает из классификации отрезков на диске с двумя дырами). Наконец, ориентируем все окружности  $\Gamma_\nu$ . Вместе с ориентацией  $S$  эти ориентации определяют ориентации дуг  $I_\nu$  — условием согласованности в точке пересечения.

Набор этих данных — окружностей  $\Gamma_\nu$ , дуг  $I_\nu$ , ориентаций — мы будем называть  $\sigma$ -оснащением поверхности  $S$ .

[В неориентируемом случае нужно выбирать дуги  $I_\nu$  только для двусторонних  $\Gamma_\nu$  и ориентировать их независимо от  $\Gamma_\nu$ .]

**3.5. Допустимые структуры.** Слабая структура  $w = (A, B, g, \mu)$  называется *допустимой*, если существует поверхность  $\bar{B}$  вместе с гиперболической структурой  $\bar{g}$  такая, что  $B$  с метрикой  $g$  получается вырезанием из  $\bar{B}$  некоторых колец, ограниченных эквидистантами компонент края или орициклами (в последнем случае из  $\bar{B}$  вырезается рог). Ср. п. 2.4. Если структура  $w' = (A', B', g', \mu')$  является ослаблением допустимой структуры  $w$ , то она тоже допустима. Действительно, чтобы получить  $\bar{B}'$ , достаточно разрезать  $\bar{B}$  вдоль нескольких геодезических.

**3.6. Параметры скручивания.** Пусть  $\sigma$  — симплекс максимальной размерности комплекса  $C(S)$ . Мы фиксируем некоторое  $\sigma$ -оснащение. Для его составных частей мы будем использовать обозначения п. 3.4.

Пусть  $w = (A, B, g, \mu)$  — некоторая допустимая  $\sigma$ -хорошая слабая гиперболическая структура на  $S$ . Для таких  $w$  мы определим инвариант  $\Theta(w) \in \mathbb{R}^\sigma$  — параметры скручивания. (Он зависит от выбора  $\sigma$ -оснащения. Однако этот выбор никогда не играет роли, и мы его не указываем в обозначениях.)

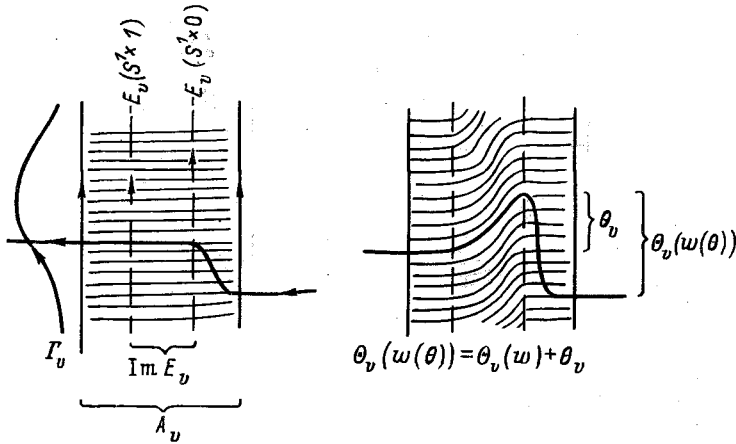


Рис. 7

Предположим сначала, что  $\sigma(w) = \sigma$ . В этом случае все компоненты многообразия  $B$  — диски с двумя дырами. Их метрики допустимы в смысле п. 2.4, поскольку  $w$  допустима. Поэтому в каждом из них имеется три выделенных дуги — см. п. 2.4. Далее, компоненты поверхности  $A$  взаимно-однозначно соответствуют вершинам симплекса  $\sigma$ . Приклеим к кольцу  $A_v$ , соответствующему  $v \in \sigma$ , компоненты  $P_v, P'_v$  поверхности  $B$ , примыкающие к  $A_v$  (возможно,  $P_v = P'_v$ ). Полученная поверхность  $R_v$  естественно диффеоморфна  $Q_v$  из п. 3.4; диффеоморфизм с точностью до изотопии определен однозначно. Этот диффеоморфизм переводит  $I_v$  в некоторую дугу  $J_v$  в  $R_v$ . Ясно, что из выделенных дуг в  $P_v, P'_v$  и некоторого отрезка  $K_v$  в  $A_v$  можно составить дугу в  $R_v$ , (объемлемо) изотопную  $J_v$ . Отрезок  $K_v$  определен с точностью до изотопии, связанной на концах. Ориентация дуги  $I_v$ , очевидно, определяет ориентацию отрезка  $K_v$ . Кроме того, ориентация окружности  $\Gamma_v$ , очевидно, определяет трансверсальную ориентацию слоения  $\mu$  на  $A_v$ . Рассмотрим 1-форму  $\varphi_v$ , задающую это трансверсально ориентированное слоение на  $A_v$  (форма  $\varphi_v$  определена однозначно), и положим

$$\Theta_v = 2\pi \int_{K_v} \varphi_v / \mu(C_v),$$

где  $C_v$  — любая из двух компонент края  $\partial A_v$ . Наконец, определим  $\Theta(w) \in \mathbb{R}^\sigma$  как вектор с координатами  $\Theta_v$ .

Рассмотрим теперь общий случай ( $\sigma(w) \neq \sigma$ ). Возьмем какое-нибудь ослабление  $w'$  структуры  $w$  такое, что  $\sigma(w') = \sigma$ . Непосредственно проверяется, что  $\Theta(w')$  не зависит от выбора  $w'$  (дело в том, что выделенные отрезки для разных ослаблений, очевидно, продолжают друг друга). Поэтому мы можем положить  $\Theta(w) = \Theta(w')$ .

Если  $\{w_t\}$  — гладкое семейство допустимых  $\sigma$ -хороших структур, то отображение  $t \mapsto \Theta(w_t)$  гладко. Это вытекает из следующих двух замечаний. Во-первых, в силу п. 3.2 мы можем найти гладкое семейство ослаблений  $\{w'_t\}$ . Во-вторых, выделенные отрезки гладко зависят от  $t$  в силу леммы 2.5.

**3.7. Лемма.** Пусть  $w$  — допустимая  $\sigma$ -хорошая слабая структура, и пусть  $\theta \in \mathbb{R}^\sigma$ . Тогда  $\Theta(w(\theta)) = \Theta(w) + \theta$ .

Это вытекает непосредственно из определений. Ситуацию иллюстрирует рис. 7.

Отметим, что здесь важен согласованный выбор всех ориентаций в п. 3.3 и 3.4. Без него в правой части нужно  $\theta$  заменить на  $\theta'$ , где  $\theta'$  отличается от  $\theta$  знаками некоторых компонент. [Именно так обстоит дело в неориентируемом случае.]

#### § 4. Сингулярные гиперболические структуры

В этом параграфе вводится понятие сингулярной гиперболической структуры и обсуждаются основные свойства таких структур. Как мы увидим в § 5, эти структуры представляют точки границы пространства Тайхмюллера.

**4.1. О п р е д е л е н и е.** *Сингулярная гиперболическая структура*  $s$  на поверхности  $S$  — это пара  $(C, h)$ , состоящая из замкнутого одномерного подмногообразия  $C$  поверхности  $S$  и гиперболической структуры  $h$  на  $S \setminus C$ . При этом должны быть выполнены следующие условия (i), (ii).

(i) Объем поверхности  $S \setminus C$  в метрике  $h$  конечен.

(ii) Для каждой компоненты  $D$  подмногообразия  $C$  существуют окрестность  $U$  этой компоненты,  $\epsilon > 0$  и диффеоморфизм  $d: U \rightarrow S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$ , переводящий метрику  $h$  на  $U \setminus D$  в следующую метрику на  $S^1 \times (-\epsilon, \epsilon) \setminus S^1 \times 0$ :

$$t^2 d\theta^2 + dt^2/t^2,$$

где  $\theta$  — стандартный угловой параметр на  $S^1$  и  $t \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$ .

Не исключается случай  $C = \emptyset$ .

Выбор метрики  $t^2 d\theta^2 + dt^2/t^2$  в качестве модельной мотивируется тем, что  $S^1 \times (-\epsilon, 0)$  и  $S^1 \times (0, \epsilon)$  в этой метрике изометричны стандартному рогу  $S^1 \times (\epsilon^{-1}, \infty)$  с метрикой  $(d\theta^2 + dt^2)/t^2$ . Отметим, что диффеоморфизм  $d$  из условия (ii), очевидно, определен однозначно с точностью до поворота.

Из условия (i) вытекает, что компоненты многообразия  $C$  нетривиальны и попарно неизотопны. Их изотопические классы образуют симплекс  $\sigma(s)$  комплекса  $C(S)$ , называемый *симплексом особенностей* структуры  $s$ . Сами компоненты называются *особенностями* структуры  $s$ , а  $C$  — *многообразием особенностей*.

На множестве сингулярных гиперболических структур очевидным образом действует группа  $\text{Diff}(S)$ . Две структуры называются изотопными, если одну можно перевести в другую посредством диффеоморфизма, изотопного  $\text{id}_S$ , т. е. если они лежат в одной орбите группы  $\text{Diff}_0(S)$ .

Очевидное понятие гладкого семейства сингулярных структур представляет только ограниченный интерес, поскольку в таких семействах обычные структуры не могут превращаться в сингулярные с  $C \neq \emptyset$ . Преодолению этой трудности служит понятие слабой структуры из § 3.

**4.2. Слабые структуры, ассоциированные с сингулярными.** Пусть  $s = (C, h)$  — сингулярная гиперболическая структура, и пусть  $\tau$  — симплекс комплекса  $C(S)$ . Предположим, что  $\sigma(s) \subset \tau$ , и построим по  $s$  слабую структуру  $w$  такую, что  $\sigma(w) = \tau$ .

Для каждой особенности  $D$  структуры  $s$  рассмотрим диффеоморфизм  $d: U \rightarrow S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$  из условия (ii) п. 4.1 и положим  $A_D = d^{-1}(S^1 \times [-\epsilon', \epsilon''])$  для некоторых  $\epsilon', \epsilon'' < \epsilon$ ;  $0 < \epsilon', \epsilon''$ . Снабдим  $A_D$  слоением с мерой, индуцированным посредством  $d$  из стандартного слоения на  $S^1 \times [-\epsilon', \epsilon'']$  со слоями  $\theta \times [-\epsilon', \epsilon'']$ , и мерой, пропорциональной  $d\theta$ . Далее, представим вершины симплекса  $\tau \setminus \sigma(s)$  геодезическими и для каждой из этих геодезических  $D$  определим кольцо  $A_D$  и соответствующее слоение точно так же, как в п. 3.2. Положим  $w = (A, B, g, \mu)$ , где

$A$  — объединение колец  $A_D$  (которые, естественно, выбираются попарно не пересекающимися),  $B = S \setminus \text{int } A$ ,  $g$  — ограничение метрики  $h$ , а  $\mu$  — определенные выше слоения. Любая такая структура  $w$  называется *ассоциированной* с  $s$ .

Очевидно, слабые структуры, ассоциированные с сингулярными, допустимы в смысле п. 3.5.

**4.3. Скручивания сингулярных гиперболических структур.** Пусть  $s = (C, h)$  — сингулярная структура, и пусть  $\tau$  — симплекс комплекса  $C(S)$ . Предположим, что  $\sigma(s) \cup \tau$  является симплексом, и определим для каждого  $\theta \in \mathbb{R}^T$  скрученную структуру  $s(\theta)$ . Ср. п. 3.3.

Как-нибудь ориентируем особенности структуры  $s$ . Представим каждую вершину  $v$  симплекса  $\sigma(s) \cap \tau$  особенностью  $D_v$ . Рассмотрим соответствующий  $D_v$  диффеоморфизм  $d: U \rightarrow S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$  из условия (ii) п. 4.1 и определим вложение  $E_v: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$  формулой  $E_v = d^{-1}(x, \pm \epsilon' t)$ , где  $0 < \epsilon' < \epsilon$ , а знак „+“ или „-“ выбран так, что образ  $\text{Im } E_v$  лежит с той же стороны от  $D_v$ , что и ориентированная нормаль к  $D_v$ . Далее, представим вершины симплекса  $\tau \setminus \sigma(s)$  геодезическими и, отправляясь от этих геодезических, построим вложение  $E_v$  для  $v \in \tau \setminus \sigma(s)$  точно так же, как строились вложения  $E_v$  для  $v \in \tau \setminus \sigma(w)$  в п. 3.3.

Структура  $s(\theta)$  имеет вид  $(C, h(\theta))$ , где метрика  $h(\theta)$  совпадает с  $h$  вне образов вложений  $E_v$  и совпадает с образом метрики  $h$  при диффеоморфизме  $E_v \circ \varphi_{\theta(v)} \circ E_v^{-1}$  на  $\text{Im } E_v$  при всех  $v \in \tau$ . (Как и в п. 3.3, скрученная структура зависит не только от  $\theta$ , но и от выбора вложений  $E_v$ ).

Скручивания сингулярных структур вполне аналогичны скручиваниям (деформациям Фенхеля–Нильсена) обычных гиперболических структур. В частности, изотопический класс структуры  $s(\theta)$  зависит только от  $\theta$  и изотопического класса структуры  $s$ . При этом  $s(\theta)(\theta')$  изотопна  $s(\theta + \theta')$  при любых  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^T$ . Поэтому скручивания определяют действия аддитивной группы  $\mathbb{R}^T$  на множестве изотопических классов таких структур  $s$ , что  $\sigma(s) \cup \tau$  — симплекс. См. также п. 4.7.

Скручивания сингулярных и слабых структур естественно связаны друг с другом. Именно пусть слабая структура  $w$  ассоциирована с сингулярной структурой  $s$ , и пусть  $\sigma(w) \subset \tau$ . Тогда, очевидно, вложения  $E_v$ , участвующие в построении скручиваний, можно выбрать так, что  $w(\theta)$  будет ассоциирована с  $s(\theta)$  для всех  $\theta \in \mathbb{R}^T$ .

**4.4. Инварианты сингулярных структур.** Пусть  $s$  — сингулярная структура. Для каждой вершины  $v$  комплекса  $C(S)$  такой, что  $\sigma(s) \cup \{v\}$  — симплекс, положим  $l_v(s)$ , равным 0, если  $v \in \sigma(s)$ , и длине (единственной) геодезической в изотопическом классе  $v$ , если  $v \notin \sigma(s)$ . Для каждого симплекса  $\tau$  комплекса  $C(S)$  такого, что  $\sigma(s) \cup \tau$  — симплекс, определим  $L_\tau(s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^T$  как вектор с координатами  $l_v(s)$ ,  $v \in \tau$ .

Пусть далее,  $\sigma$  — некоторый симплекс максимальной размерности комплекса  $C(S)$  такой, что  $\sigma(s) \subset \sigma$ . Фиксируем некоторое  $\sigma$ -оснащение поверхности  $S$ . Это позволит говорить о параметрах скручивания допустимых  $\sigma$ -хороших слабых структур. Пусть  $w$  — слабая структура, ассоциированная с  $s$ , и такая, что  $\sigma(w) \subset \sigma$ . Структура  $w$  допустима и, очевидно, может быть выбрана  $\sigma$ -хорошей. Непосредственно проверяется, что параметры скручивания  $\Theta(w)$  зависят только от  $s$ . Ср. предпоследний абзац п. 3.6. Мы положим  $\Theta(s) = \Theta(w)$ . В случае необходимости указать  $\sigma$  мы будем обозначать этот инвариант через  $\Theta_\sigma(s)$ .

Очевидно, инварианты  $L_\tau(s)$  и  $\Theta_\sigma(s)$  зависят только от изотопического класса  $\bar{s}$  структуры  $s$ . Так что мы можем положить  $L_\tau(\bar{s}) = L_\tau(s)$ ,  $\Theta_\sigma(\bar{s}) = \Theta_\sigma(s)$ ,  $l_v(\bar{s}) = l_v(s)$ .

Отметим, что ввиду п. 4.3 из леммы 3.7 вытекает, что  $\Theta_\sigma(s(\theta)) = \Theta_\sigma(s) + \theta$ ,  $\theta \in \mathbf{R}^\sigma$ .

4.5. Лемма. Пусть  $\sigma$  — симплекс максимальной размерности комплекса  $C(S)$ , и пусть  $\tau \subset \sigma$ . Обозначим через  $Y_\tau$  множество изотопических классов таких сингулярных структур  $s$ , что  $\sigma(s) = \tau$ . Тогда отображение

$$(L_{\sigma\tau}, \Theta_\sigma) : Y_\tau \rightarrow \mathbf{R}_{>0}^{\sigma \setminus \tau} \times \mathbf{R}^\sigma$$

биективно.

Доказательство. Согласно п. 4.3, скручивания определяют действие группы  $\mathbf{R}^\sigma$  на  $Y_\tau$ . Очевидно, орбиты этого действия лежат в слоях отображения  $L_{\sigma\tau}$ . Докажем, что, более того, орбиты совпадают со слоями.

Пусть  $s = (C, h)$  — некоторая сингулярная структура такая, что  $\sigma(s) = \tau$ . Представим вершину симплекса  $\sigma \setminus \tau$  геодезическими и разрежем поверхность  $S \setminus C$  вдоль этих геодезических. Каждая компонента полученной поверхности  $R$  является диском с двумя дырами, из которого, возможно, выкинуты некоторые компоненты края. В силу леммы 2.3 гиперболические структуры на этих компонентах (индуцированные  $h$ ) определяются  $L_{\tau\sigma}(s)$  с точностью до изотопии. Попытаемся теперь восстановить  $s$  по гиперболическим структурам на компонентах.

Пусть  $\bar{R}$  — результат разрезания поверхности  $S$  вдоль  $C$  и геодезических из предыдущего абзаца. Сначала мы восстановим  $\bar{R}$ . Для этого нужно компактифицировать окружностями те концы поверхности  $R$ , которые примыкают к  $C$ . Метрика превращает каждый такой конец в стандартный рог. Поэтому для каждого конца существуют его окрестность  $U$ ,  $\epsilon > 0$  и диффеоморфизм  $d : U \rightarrow S^1 \times (0, \epsilon)$ , переводящий метрику на  $U$  в стандартную метрику  $t^2 d\theta^2 + dt^2/t^2$  (ср. п. 4.1). Приклеим к  $R$  несколько экземпляров  $S^1 \times [0, \epsilon)$  посредством таких  $d$  (для всех рассматриваемых концов). Полученная поверхность, очевидно, определяется только метрикой на  $R$ , не зависит от выбора  $d$ ,  $\epsilon$  и канонически отождествляется с  $R$ .

Чтобы восстановить  $S$  по  $\bar{R}$ , нужно склеить друг с другом некоторые компоненты края  $\partial\bar{R}$ . Каждая компонента края  $\partial\bar{R}$  снабжена метрикой: для компонент, возникших из геодезических, метрики индуцируются метрикой  $h$ ; для компонент, возникших из особенностей, метрики индуцируются диффеоморфизмами  $d$  из предыдущего абзаца из стандартной метрики на  $S^1$ . Ясно, что склеивание происходит по изометриям компонент края. Ситуация полностью аналогична тому, что происходит для обычных гиперболических структур (см. [7], Экз. 7). Так что любые два способа склеивания отличаются на некоторое скручивание. Это означает, что каждый слой отображения  $L_{\sigma\tau}$  лежит в некоторой орбите и тем самым совпадает с ней.

Заметим теперь, что из формулы  $\Theta_\sigma(s(\theta)) = \Theta_\sigma(s) + \theta$  (конец п. 4.4) вытекает, что  $\Theta_\sigma$  биективно на каждой орбите (и, следовательно, действие свободно). Поскольку слои отображения  $L_{\sigma\tau}$  совпадают с орбитами, отсюда вытекает инъективность отображения  $(L_{\sigma\tau}, \Theta_\sigma)$ . Его сюръективность вытекает из сюръективности  $L_{\sigma\tau}$ , которая в свою очередь вытекает из того, что гиперболическими структурами на многообразиях  $Q$  из § 2 реализуются любые наборы длин компонент края (см., например, п. 2.4 и лемму 2.6). Это завершает доказательство.

4.6. Следствие. Если слабая структура  $w$  ассоциирована с двумя сингулярными структурами  $s, s'$ , то  $s$  изотопна  $s'$ .

Доказательство. Инварианты  $L$  и  $\Theta$  этих структур  $s, s'$  определяются структурой  $w$ .

**4.7. Скручивания сингулярных структур и скручивания Дена.** Пусть  $s$  – сингулярная структура и  $\tau$  – симплекс комплекса  $C(S)$ , причем  $\sigma(s) \subset \tau$ .

Для каждого  $\nu \in \tau$  обозначим через  $t_\nu$  правое скручивание Дена вдоль любой окружности из изотопического класса  $\nu$ ;  $t_\nu \in \text{Mod}_S$ . Для  $n \in \mathbb{Z}^r$  обозначим через  $t(n)$  композицию элементов  $t_\nu^{n(\nu)}$ , – порядок композиции не играет роли, поскольку эти элементы коммутируют. Пусть  $\bar{s}$  – изотопический класс структуры  $s$ , как и выше. Тогда  $t(n)s$  совпадает с изотопическим классом структуры  $s(2\pi n)$ . В частности,  $\Theta_\tau(t(n)\bar{s}) = \Theta_\tau(\bar{s}) + 2\pi n$ .

Как и в случае обычных гиперболических структур, это вытекает непосредственно из определений.

## § 5. Приклеивание границы

В этом параграфе мы определяем  $X_S$  и вводим на  $X_S$  структуру гладкого многообразия с углами.

**5.1. Определение.** Определим  $X_S$  как множество изотопических классов сингулярных гиперболических структур на  $S$  (см. п. 4.1). Ясно, что  $\text{Mod}_S$  действует на  $X_S$ .

Для каждого симплекса  $\sigma$  комплекса  $C(S)$  обозначим через  $X(\sigma)$  множество изотопических классов таких сингулярных структур  $s$  на  $S$ , что  $\sigma(s) \subset \sigma$ . Инвариант  $L_\sigma$  из п. 4.4 определяет отображение  $L_\nu : X(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\sigma$ . Обозначим через  $L_\sigma^2$  отображение  $X(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\sigma$ , координатными функциями которого являются квадраты координатных функций отображения  $L_\nu$  (т. е.  $l_\nu^2, \nu \in \sigma$ ).

Для симплекса  $\sigma$  максимальной размерности обозначим через  $\Phi_\sigma$  отображение  $(L_\sigma^2, \Theta_\sigma) : X(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\sigma \times \mathbb{R}^\sigma$ . Из леммы 4.5 вытекает, что  $\Phi_\sigma$  биективно. Действительно,  $X(\sigma)$  является дизъюнктивным объединением множеств  $Y_\tau, \tau \subset \sigma$ , а  $\mathbb{R}_{>0}^\sigma$  – дизъюнктивным объединением множеств  $\mathbb{R}_{>0}^{\sigma \setminus \tau}, \tau \subset \sigma$  (по определению,  $\mathbb{R}_{>0}^\emptyset = \{0\}$ ).

Отображения  $\Phi_\sigma$  являются картами на множестве  $X_S$ . В этом параграфе мы докажем, что эти карты задают на  $X_S$  структуру гладкого многообразия с углами. Для этого нужно проверить, что: (i) множества  $X(\sigma)$  покрывают  $X_S$ ; (ii) карты  $\Phi_\sigma$  согласованы; (iii) топология, определенная на  $X_S$  этими картами, хаусдорфова и имеет счетную базу. Утверждение (i), конечно, очевидно. Наличие счетной базы вытекает из того, что у нас имеется только счетное число карт. Так что остается проверить хаусдорфовость и согласованность карт.

**5.2. Хаусдорфовость.** Пусть  $x, x' \in X_S, x \neq x'$ , и пусть сингулярные структуры  $s, s'$  представляют точки  $x, x'$  соответственно. Если  $\sigma(s) \cup \sigma(s')$  является симплексом, то  $x, x' \in X(\sigma)$  для некоторого максимального симплекса  $\sigma \supset \sigma(s) \cup \sigma(s')$ . Очевидно, что в этом случае у  $x, x'$  есть непересекающиеся окрестности. Если  $\sigma(s) \cup \sigma(s')$  не является симплексом, то найдутся вершины  $\nu, \nu'$  симплексов  $\sigma(s), \sigma(s')$  соответственно такие, что  $\nu, \nu'$  нельзя представить непересекающимися окружностями. В силу леммы 1 из [11], гл. II, п. 3.3 существует такое  $\epsilon > 0$ , что геодезические окружности длины  $< \epsilon$  (на поверхности с гиперболической структурой) не пересекаются. Положим  $U = \{z \in X(\sigma) : l_\nu(z) < \epsilon\}, U' = \{z \in X(\sigma') : l_{\nu'}(z) < \epsilon\}$ , где  $\sigma \supset \sigma(s), \sigma' \supset \sigma(s')$  – некоторые максимальные симплексы. Ясно, что  $U \cap U' = \emptyset, x \in U, x' \in U'$  и  $U, U'$  – открытые множества. Это доказывает хаусдорфовость.

5.3. Лемма. Пусть  $\sigma$  – симплекс максимальной размерности, и пусть  $u = (u', u'') \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma \times \mathbb{R}^\sigma$ . Пусть  $\sigma(u')$  – множество тех вершин симплекса  $\sigma$ , которым соответствуют нулевые координаты вектора  $u' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma$ . Тогда существует окрестность  $U$  точки  $u$  в  $\mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma \times \mathbb{R}^\sigma$  и гладкое семейство  $\{w_t\}_{t \in U}$  допустимых слабых структур такое, что:

- (i)  $\sigma(w_t) = \sigma(u')$  для всех  $t$ ;
- (ii) каждая структура  $w_t$  ассоциирована с некоторой сингулярной структурой  $s_t$ ;
- (iii)  $(L_\sigma^2(s_t), \Theta_\sigma(s_t)) = t$ .

При этом если задан еще один симплекс  $\tau$ , содержащий  $\sigma(u')$ , то семейство  $\{w_t\}$  можно выбрать так, что все структуры  $w_t$  будут  $\tau$ -хорошими.

Доказательство. В качестве первого шага мы покажем, что существуют окрестность  $U'$  точки  $u' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma$  и гладкое семейство  $\{w_t\}_{t \in U'}$  допустимых слабых структур, удовлетворяющее условиям (i), (ii), и такое, что  $L_\sigma^2(s_t) = t$ .

Представим вершины симплекса  $\sigma$  попарно не пересекающимися окружностями  $\Gamma_\nu$ ,  $\nu \in \sigma$  (ср. п. 3.4). Они разбивают поверхность  $S$  на несколько дисков с двумя дырами (или проколами). Для каждого  $\nu \in \sigma(u')$  фиксируем некоторое кольцо  $A_\nu$ , содержащее  $\Gamma_\nu$  в качестве деформационного ретракта. Эти кольца можно предполагать попарно не пересекающимися. Пусть  $A$  – объединение этих колец, и пусть  $B = S \setminus \text{int}(A)$ . Структуры  $w_t$  будут иметь вид  $(A, B, g_t, \mu_t)$ .

Далее, фиксируем для каждого прокола поверхности  $S$  некоторую его кольцевую окрестность, лежащую в  $B$ , и вырежем из  $B$  все эти окрестности. Обозначим полученную (компактную) поверхность через  $B'$ . Разрезая  $B'$  вдоль окружностей  $\Gamma_\nu$ ,  $\nu \in \sigma \setminus \sigma(u')$ , мы получим несколько дисков с двумя дырами  $P_1, \dots, P_n$ . Метрики  $g_t$  склеиваются из допустимых метрик на  $P_1, \dots, P_n$ . Для каждого  $t$  на каждом  $P_i$  выбирается допустимая метрика  $g_t^i$  такая, что:

- (a) компоненты края, примыкающие к окружностям  $\Gamma_\nu$ ,  $\nu \in \sigma \setminus \sigma(u')$ , являются геодезическими;
- (b) компоненты края, примыкающие к кольцам  $A_\nu$ ,  $\nu \in \sigma(u')$ , являются негеодезическими циклами;
- (c) длина  $l_j(g_t^i)$ , соответствующая  $j$ -й компоненте края (см. п. 2.4), равна  $\sqrt{t(\nu)}$ , если она примыкает к  $\Gamma_\nu$  или  $A_\nu$  ( $\nu \in \sigma$ ), и равна 0, если компонента примыкает к окрестности прокола.

Здесь  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma$  рассматривается как функция  $\sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Склеивая  $P_i$  по изометриям компонент края, мы получим некоторую гиперболическую метрику  $g_t^i$  на  $B'$ . Очевидно, ее можно продолжить до гиперболической метрики  $g_t$  на  $B$ . Выбрав теперь какое-нибудь слоение  $\mu_t$  на  $A$ , удовлетворяющее условию (iv) из п. 3.1, мы получим гиперболическую структуру  $w_t = (A, B, g_t, \mu_t)$ . Поскольку  $g_t$  склеивается из допустимых метрик на дисках с двумя дырами, структура  $w_t$  допустима. По построению она удовлетворяет условию (i). Кроме того, по построению длины, соответствующие двум компонентам края  $\partial A_\nu$ , совпадают для всех  $\nu \in \sigma(u')$ . Отсюда вытекает, что выполнено и условие (ii). При этом ясно, что  $L_\sigma^2(s_t) = t$  для соответствующей сингулярной структуры  $s_t$ .

Как мы сейчас увидим, эти построения можно осуществить так, что семейство  $\{w_t\}$  будет гладким. Действительно, пользуясь леммой 2.6, мы можем считать все семейства  $\{g_t^i\}_{t \in U'}$  гладкими. Склеивая  $P_i$  по гладким семействам изометрий, мы получим гладкое семейство  $\{g_t^i\}$ . Ясно, что семейство продолжений и семей-

ство слоений  $\{\mu_t\}$  можно выбрать гладкими. Таким образом, мы построили обещанное семейство  $\{w_t\}_{t \in U'}$ .

Согласно п. 3.3, мы можем теперь построить гладкое семейство скрученных структур  $\{w_t(\theta)\}_{t \in U', \theta \in \mathbb{R}^\sigma}$ . Рассмотрим теперь семейство  $\{w_t\}_{t \in U' \times \mathbb{R}^\sigma}$ , заданное формулой  $w_t = w_{t'}(\theta - \Theta_\sigma(w_{t'}))$ , где  $t = (t', \theta)$ . Согласно п. 3.6, отображение  $t' \mapsto \Theta_\sigma(w_{t'})$  является гладким, и потому семейство  $\{w_t\}$  — гладкое. Ясно, что  $\sigma(w_t) = \sigma(u')$  для всех  $t$  и каждая структура  $w_t$  ассоциирована с некоторой сингулярной структурой  $r_t$  (поскольку этими свойствами обладают  $w_{t'}, t' \in U'$ ). При этом  $L_\sigma^2(r_t) = L_\sigma^2(s_{t'}) = t'$  (где  $w_{t'}$  ассоциировано с  $s_{t'}$ ) и  $\Theta_\sigma(w_t) = \Theta_\sigma(w_{t'}) + \theta - \Theta_\sigma(w_{t'}) = \theta$  в силу леммы 3.7.

Так что мы можем взять  $\{w_t\}$  в качестве искомого семейства. Остается позаботиться о том, чтобы структуры были  $\tau$ -хорошими. Если  $w_u$  —  $\tau$ -хорошая структура, то все  $w_t$  для  $t$  достаточно близких к  $u$ , будут  $\tau$ -хорошими в силу леммы 1.6. Поэтому достаточно позаботиться о том, чтобы  $w_u$  была  $\tau$ -хорошей. Представим вершины симплекса  $\tau \setminus \sigma(u')$  геодезическими структурами  $r_u$ . Ясно, что  $w_u = (A, B, g_u, \mu_u)$  будет  $\tau$ -хорошей, если  $\text{int } B$  содержит эти геодезические. Для этого в свою очередь достаточно, чтобы длины компонент края  $\partial B$ , примыкающих к окрестностям проколов и кольцам  $A_v, w \in \sigma(u')$ , были достаточно малы. Этого, очевидно, можно добиться, пользуясь п. (iii) леммы 2.6.

**5.4. Согласованность карт.** Пусть  $\sigma, \tau$  — два симплекса максимальной размерности. Нам нужно доказать, что отображение  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma^{-1}$  является гладким на  $\Phi_\sigma(X(\sigma) \cap X(\tau))$ . Заметим, что  $X(\sigma) \cap X(\tau) = X(\sigma \cap \tau)$ . Пусть  $x \in X(\sigma \cap \tau)$ , и пусть  $\Phi_\sigma(x) = u = (u', u'') \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma \times \mathbb{R}^\sigma$ . Покажем, что  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma^{-1}$  гладко в точке  $u$ . Заметим, что  $\sigma(u') \subset \sigma \cap \tau \subset \tau$ . Рассмотрим далее семейство  $\{w_t\}_{t \in U}$ , доставляемое леммой 5.3 для  $\sigma, u, \tau$ . Пусть  $\bar{s}_t$  — изотопический класс структуры  $s_t$  из п. (ii) леммы 5.3. Тогда, очевидно,  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma^{-1}(t) = \Phi_\tau(\bar{s}_t)$  для всех  $t \in U$ . По определению,  $\Phi_\tau(\bar{s}_t) = (L_\tau^2(\bar{s}_t), \Theta_\tau(\bar{s}_t)) = (L_\tau^2(s_t), \Theta_\tau(s_t))$ . Поскольку структуры  $w_t$  являются  $\tau$ -хорошими, то  $\Theta_\tau(s_t) = \Theta_\tau(w_t)$  и в силу п. 3.6  $\Theta_\tau(w_t)$  гладко зависит от  $t$ . Что касается  $L_\tau^2(s_t)$ , то в силу п. 1.9  $L_\tau^2(s_t)$  зависит только от  $w_t$  (более точно, от гиперболической метрики, входящей в  $w_t$ ), и в силу леммы 1.10 отображение  $t \mapsto L_\tau^2(s_t)$  является гладким. Следовательно,  $\Phi_\tau(\bar{s}_t)$  гладко зависит от  $t$ , т. е.  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma^{-1}$  — гладкое отображение вблизи точки  $\Phi_\sigma(x) = u$ . Это доказывает согласованность карт  $\Phi_\tau, \Phi_\sigma$ .

**5.5. Замечание.** Из [7], Exр. 7 вытекает, что топология на  $T_S$ , индуцированная из  $X_S$ , совпадает с обычной. Из [11], гл. II можно вывести, что то же верно и в отношении гладкой структуры. В нашем контексте удобнее вводить в  $T_S$  топологию и гладкую структуру, индуцируя их из  $X_S$ , а не апеллируя к классическим определениям. В любом случае очевидно, что  $T_S$  диффеоморфно евклидову пространству.

**5.6. Замечание.** Пусть  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  — некоторый гомеоморфизм. Обозначим через  $L_\sigma^f$  отображение  $X(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^\sigma$ , координатными функциями которого являются функции  $f(l_v(\cdot))$ ,  $v \in \sigma$ . Заменяя в описании карт  $\Phi_\sigma$  отображения  $L_\sigma^2$  на  $L_\sigma^f$ , мы получим новый набор карт на  $X_S$ . Оказывается, эти карты также согласованы, если функция  $g: \lambda \mapsto (f^{-1}(\lambda))^2$  является гладкой (в частности, в точке 0).

Чтобы доказать это, нужно внести следующие изменения в лемму 5.3 и п. 5.4. В формулировке леммы 5.3  $L_\sigma^2$  заменяется на  $L_\sigma^f$ , а  $\sqrt{t(v)}$  в доказательстве — на



$f^{-1}(t(v))$ , и семейства  $h_\lambda$  из леммы 2.6 заменяются на семейства  $h_{g_*(\lambda)}$ , где  $g_*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (g(\lambda_1), g(\lambda_2), g(\lambda_3))$  (ясно, что  $l_i(h_{g_*(\lambda)}) = \sqrt{g(\lambda_i)} = f^{-1}(\lambda_i)$ ). В п. 5.4 ссылку на лемму 1.10 нужно заменить следующим соображением: те координатные функции отображения  $L_\tau^f$ , которые обращаются в 0 в  $x$ , совпадают с координатными функциями отображения  $L_\sigma^f$  (это  $f(l_\nu(\cdot))$ ,  $\nu \in \sigma(u')$ ), а остальные являются гладкими в силу леммы 1.10.

Таким образом, мы можем взять, например,  $f(x) = x^{2/N}$ , где  $N$  — натуральное число, в частности,  $f(x) = x$  (но не  $f(x) = x^M$ , где  $M$  — натуральное число  $> 2$ ). Наш выбор  $f(x) = x^2$  является в определенном смысле предельным, и он наиболее естественен ввиду лемм 1.10 и 2.6.

## § 6. Основные свойства

В этом параграфе мы докажем основные свойства действия  $\text{Mod}_S$  на  $X_S$  — разрывность, наличие подгруппы конечного индекса, действующей свободно, и компактность фактора. В заключение мы найдем гомотопический тип края  $\partial X_S$ .

**6.1. Подгруппы  $\Gamma_S(m)$ .** Для любого натурального числа  $m$  мы обозначаем через  $\Gamma_S(m)$  ядро естественного гомоморфизма

$$\text{Mod}_S \rightarrow \text{Aut}(H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})).$$

Согласно известной теореме Серра, при  $m \geq 3$  действие подгруппы  $\Gamma_S(m)$  на  $T_S$  свободно. Кроме того, если  $m \geq 3$  и некоторый элемент  $f \in \Gamma_S(m)$  оставляет на месте некоторый симплекс  $\sigma$  комплекса  $C(S)$ , то  $f$  оставляет на месте все вершины симплекса  $\sigma$ . Этот элементарный факт вытекает из теоремы 6 работы [12].

В дальнейшем мы фиксируем  $m \geq 3$  и полагаем  $\Gamma = \Gamma_S(m)$ .

[В случае неориентируемой  $S$  в качестве  $\Gamma$  нужно взять подгруппу тех элементов группы  $\text{Mod}_S$ , (некоторое) поднятие которых на ориентирующее накрытие  $S \sim$  лежит в  $\Gamma_S \sim(m)$  (где  $m$  фиксировано и  $\geq 3$ ).]

**6.2. Разрывные действия.** Пусть некоторая абстрактная группа  $G$  действует на топологическом пространстве  $X$ . Напомним, что действие называется разрывным, если у любой точки  $x \in X$  найдется окрестность  $U$  такая, что  $g(U) \cap U = \emptyset$  для всех, кроме конечного числа, элементов  $g \in G$ . Очевидно, это условие равносильно следующему: группы изотропии всех точек конечны, и у любой точки  $x$  найдется такая окрестность  $U$ , что  $g(U) \cap U = \emptyset$  при  $gx \neq x$ . Для локально компактных пространств оно равносильно также следующему условию: для каждого компактного  $K \subset X$  пересечение  $K \cap gK \neq \emptyset$  только для конечного числа элементов  $g \in G$ . Отсюда вытекает, что для локально компактных пространств свойство разрывности действия инвариантно при переходе к подгруппам конечного индекса.

**6.3. Функции длины на  $X(\sigma)$ .** Пусть  $\sigma$  — симплекс комплекса  $C(S)$ . Представим его вершины попарно не пересекающимися окружностями и обозначим через  $C$  их объединение. Пусть  $R$  — одна из компонент поверхности  $S \setminus C$  и  $g \in \pi_1(R)$ . Определим функцию длины  $l_g: X(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Каждую точку  $x \in X(\sigma)$ , очевидно, можно представить сингулярной структурой  $s = (C', h)$  такой, что  $C' \subset C$ . Пусть  $h'$  — ограничение метрики  $h$  на  $R$ . Мы полагаем  $l_g(x) = l_g(h')$  (см. п. 1.9). Ясно, что это определение корректно. Если  $g$

можно представить вложенной окружностью, то, очевидно,  $l_g = l_\nu$ , где  $\nu$  — изотопический класс этой окружности (см. п. 4.4).

Функции  $l_g$  непрерывны. Для доказательства достаточно воспользоваться определением топологии в  $X_S$ , леммой 5.3, которая позволяет реализовать окрестности точек в  $X_S$  гладкими семействами слабых структур, и леммой 1.10, из которой вытекает, что  $l_g$  непрерывна в таких семействах.

**6.4. Лемма.** Пусть  $R$  — поверхность конечного типа с непустым краем. Для любой гиперболической структуры  $h_0$  на  $R \setminus \partial R$  найдутся элементы  $g_1, \dots, g_n \in \pi_1(R \setminus \partial R) = \pi_1(R)$  и число  $\epsilon_0 > 0$ , такие, что верно следующее.

Пусть  $h_1, h_2$  — две гиперболические структуры на  $R$  такие, что  $|l_{g_i}(h_k) - l_{g_i}(h_0)| < \epsilon_0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $k = 1, 2$ . Тогда любой диффеоморфизм  $F: R \rightarrow R$ , переводящий  $h_1$  в  $h_2$ , изотопен диффеоморфизму, переводящему  $h_0$  в  $h_0$ .

**Доказательство.** Оно основано на результатах Берса и Гардинера [8]. От читателя требуется некоторое знакомство с этой работой.

Пусть  $R_0 = R \setminus \partial R$ . Любую гиперболическую структуру  $h$  на  $R_0$  или  $R$  можно естественно сопоставить некоторую точку  $\varphi(h)$  пространства Фрике  $\mathcal{F}(R_0)$ . Именно рассмотрим риманову поверхность  $\mathcal{U}/\text{Im } \rho(h)$ , где  $\rho(h)$  — голономия структуры  $h$  (см. п. 1.9). Факторизация отображения развертки  $d(h)$  доставляет каноническое вложение  $i(h): R_0 \rightarrow \mathcal{U}/\text{Im } \rho(h)$ . Как известно, оно гомотопно гомеоморфизму, а в случае структуры на  $R_0$ , очевидно, и само является гомеоморфизмом. Поверхность  $\mathcal{U}/\text{Im } \rho(h)$  вместе с таким гомеоморфизмом определяет точку пространства  $\mathcal{F}(R_0)$ , которую мы и обозначим через  $\varphi(h)$ . Отметим, что сужением метрики Пуанкаре поверхности  $\mathcal{U}/\text{Im } \rho(h)$  на  $i(h)(R_0)$  является исходная метрика  $h$ .

Согласно теореме II из [8], модулярная группа  $\mathcal{FM}(R_0)$  действует на  $\mathcal{F}(R_0)$  разрывно. Поэтому найдется такая окрестность  $V$  точки  $\varphi(h_0)$  в  $\mathcal{F}(R_0)$ , что из  $\varphi(h_1), \varphi(h_2) \in V, f(\varphi(h_1)) = \varphi(h_2)$ , где  $f \in \mathcal{FM}(R_0)$ , следует  $f(\varphi(h_0)) = \varphi(h_0)$ . Применим это к  $f = F_*$ , где  $F$  — диффеоморфизм, переводящий  $h_1$  в  $h_2$ . Ясно, что  $F_*(\varphi(h_1)) = \varphi(h_2)$ , и потому  $F_*(\varphi(h_0)) = \varphi(h_0)$ . Так как  $i(h_0)$  — диффеоморфизм, последнее означает, что  $F$  гомотопен и, значит, изотопен диффеоморфизму, переводящему  $h_0$  в  $h_0$ .

По определению (см. [8]), топология в  $\mathcal{F}(R_0)$  является слабейшей топологией, превращающей все функции длины  $l(C)$  из [8] в непрерывные. В силу отображения  $\varphi$  этим функциям соответствуют как раз функции длины  $l_{g_i}(\cdot)$ . Поэтому  $V$  можно выбрать так, что  $\varphi(h) \in V$  тогда и только тогда, когда  $|l_{g_i}(h) - l_{g_i}(h_0)| < \epsilon_0$  для подходящих  $g_1, \dots, g_n$  и  $\epsilon_0$ .

**6.5. Теорема.** Группа  $\text{Mod}_S$  действует на  $X_S$  разрывно; подгруппа  $\Gamma$  действует свободно.

**Доказательство.** Достаточно доказать, что  $\Gamma$  действует разрывно и свободно (см. п. 6.2).

Рассмотрим произвольную точку  $x \in X_S$ . Очевидно, достаточно указать такую окрестность  $U$  точки  $x$ , что  $\gamma U \cap U = \emptyset$  при  $\gamma \neq 1, \gamma \in \Gamma$ . Представим  $x$  сингулярной структурой  $s = (C, h_0)$ . Если  $C = \emptyset$ , то существование окрестности  $U$  вытекает из разрывности действия модулярной группы на пространстве Тайхмюллера (и того, что  $\Gamma$  действует свободно). Пусть  $C \neq \emptyset$ , и пусть  $\sigma = \sigma(s)$ . Возьмем какой-нибудь максимальный симплекс  $\tau$ , содержащий  $\sigma$ . Положим

$$m = \min\{l_\nu(s) : \nu \in \tau \setminus \sigma\}, M = \max\{l_\nu(s) : \nu \in \tau \setminus \sigma\}.$$

В силу леммы 1 из [11], глава II, п. 3.3 существует  $\epsilon > 0$  такое, что если геодезическая окружность длины  $< \epsilon$  на некоторой гиперболической поверхности пересекается с некоторой другой геодезической окружностью, то длина последней  $> M + 1$ . Очевидно, можно считать, что  $\epsilon < 1$  и  $\epsilon < m/2$ . Положим

$$U_1 = \{y \in X(\sigma) : |l_\nu(y) - l_\nu(x)| < \epsilon \text{ при } \nu \in \tau\}.$$

Далее, пусть  $C'$  — объединение нескольких компонент многообразия  $C$ . Пусть  $R$  — результат разрезания разности  $S \setminus C'$  вдоль  $C \setminus C'$ . Применим к  $R$  и к гиперболической структуре  $h_0$  на  $S \setminus C = R \setminus \partial R$  лемму 6.4. В результате мы получим положительное число  $\epsilon_0$  и некоторые элементы  $g_i \in \pi_1(R \setminus \partial R) = \pi_1(S \setminus C)$ . Проведем это для всевозможных  $C'$  (включая и  $C' = \emptyset, C$ ). Пусть  $\delta$  — минимум полученных чисел  $\epsilon_0$ , и пусть  $g_1, \dots, g_m$  — совокупность всех полученных  $g_i$ . Положим

$$U_2 = \{y \in X(\sigma) : |l_{g_i}(y) - l_{g_i}(x)| < \delta \text{ при } i = 1, \dots, m\},$$

где  $l_{g_i}$  — функции из п. 6.3. Наконец, положим

$$U_3 = \{y \in X(\sigma) : |\Theta_\tau(y) - \Theta_\tau(x)| < \pi\},$$

где норма  $|\cdot|$  — это максимум модулей компонент вектора.

Мы покажем, что можно взять  $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ . Ясно, что  $U_1, U_2, U_3$  и, следовательно,  $U$  — окрестности точки  $x$ .

Докажем сначала, что если  $\gamma U_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ , то  $\gamma$  оставляет на месте вершины симплекса  $\sigma$ . Пусть  $y \in \gamma U_1 \cap U_1$ . Тогда  $\gamma^{-1}y \in U_1$ , и потому  $l_\nu(y) = l_\nu(\gamma^{-1}y) < \epsilon$  при  $\nu \in \sigma$  (поскольку  $l_\nu(x) = 0$  при  $\nu \in \sigma$ ). Отсюда вытекает, что  $\sigma \cup \gamma\sigma$  — симплекс. Допустим, что  $\gamma\sigma \setminus \sigma \neq \emptyset$ . Возьмем  $\nu \in \gamma\sigma \setminus \sigma$ . Представим точку  $y$  сингулярной структурой  $s' = (C', h')$ . Геодезическая  $D$  метрики  $h'$ , лежащая в изотопическом классе  $\nu$ , имеет длину  $< \epsilon < m/2$ , поскольку  $\gamma^{-1}y \in U_1$ . С другой стороны, любая геодезическая, изотопический класс которой лежит в  $\tau \setminus \sigma$ , имеет длину  $> m - \epsilon > m/2$ , поскольку  $y \in U_1$ . Следовательно,  $\nu \notin \tau \setminus \sigma$ . Далее, так как  $\nu \in \gamma\sigma \setminus \sigma$  и  $\sigma \cup \gamma\sigma$  — симплекс, то  $D$  не пересекает тех геодезических, изотопические классы которых лежат в  $\sigma$ . Так как  $\tau$  — максимальный симплекс и  $\nu \notin \tau \setminus \sigma$ , отсюда вытекает, что  $D$  пересекает некоторую геодезическую  $D'$ , изотопический класс которой лежит в  $\tau \setminus \sigma$ . В силу выбора  $\epsilon$ , длина  $D' > M + 1$ . С другой стороны, длина  $D'$  должна быть  $< M + \epsilon < M + 1$ , поскольку  $y \in U_1$ . Полученное противоречие показывает, что  $\gamma\sigma \setminus \sigma = \emptyset$ , т. е.  $\gamma\sigma \subset \sigma$ , и потому  $\gamma\sigma = \sigma$ . Поскольку  $\gamma \in \Gamma$ , отсюда вытекает, что  $\gamma$  оставляет на месте все вершины симплекса  $\sigma$  (см. п. 6.1).

Пусть теперь  $\gamma$  оставляет на месте все вершины симплекса  $\sigma$ , и пусть  $\gamma U_2 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Мы можем представить  $\gamma$  диффеоморфизмом  $G: S \rightarrow S$ , сохраняющим все компоненты многообразия  $C$ . Пусть  $F$  — результат разрезания  $G$  вдоль  $C$ . Покажем, что  $F$  изотопен диффеоморфизму, переводящему  $h_0$  в  $h_0$ . Пусть  $y \in \gamma U_2 \cap U_2$ . Представим точку  $y$  сингулярной структурой  $s' = (C', h')$  такой, что  $C' \subset C$ , и компоненты разности  $C \setminus C'$  являются геодезическими. Точку  $\gamma^{-1}y$  можно представить образом  $G_*^{-1}s'$  структуры  $s'$  при диффеоморфизме  $G^{-1}$ . Пусть  $R$  — результат разрезания разности  $S \setminus C'$  вдоль  $C \setminus C'$ . Ясно, что  $s'$  и  $G_*^{-1}s'$  определяют на  $R$  две гиперболические структуры, причем  $F^{-1}$  переводит одну из них в другую. Принимая во внимание то, что  $y, \gamma^{-1}y \in U_2$  и окрестность  $U_2$  выбрана в соответствии с леммой 6.4, мы можем заключить, что  $F^{-1}$  изотопен диффеоморфизму, пере-

водящему  $h_0$  в  $h_0$ . Значит, и  $F$  изотопен такому диффеоморфизму, что и требовалось.

Наконец, пусть  $G : S \rightarrow S$  — диффеоморфизм, сохраняющий все компоненты многообразия  $C$ , и пусть  $F$  — результат разрезания  $G$  вдоль  $C$ . Пусть  $\gamma$  — изотопический класс диффеоморфизма  $G$ . Покажем, что если  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma U_3 \cap U_3 \neq \emptyset$  и  $F$  изотопен диффеоморфизму, переводящему  $h_0$  в  $h_0$ , то  $\gamma = 1$ . Действительно, если  $\gamma \in \Gamma$ , то  $G$  тривиально действует в  $H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ , и потому  $F$  тривиально действует в  $H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ . В силу теоремы Серра (п. 6.1)  $F$  изотопен  $\text{id}_R$ . Отсюда вытекает, что  $\gamma$  — произведение нескольких скручиваний Дена вдоль компонент многообразия  $C$ . Так что в обозначениях п. 4.7  $\gamma = t(n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}^T$ . В силу п. 4.7 под действием  $\gamma$  к параметрам скручивания добавляется  $2\pi n$ . Отсюда вытекает, что  $\gamma U_3 \cap U_3 = \emptyset$  при  $n \neq 0$ . Следовательно,  $n = 0$  и  $\gamma = 1$ .

Соединяя результаты трех последних абзацев, мы видим, что  $\gamma U \cap U = \emptyset$  при  $\gamma \neq 1$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . Это завершает доказательство теоремы.

**6.6. Лемма.** Для любой сингулярной структуры  $s = (C, h)$  на поверхности  $S$  существует такой симплекс  $\sigma$  максимальной размерности комплекса  $C(S)$ , что  $l_\nu(s) \leq L$  для всех вершин  $\nu$  симплекса  $\sigma$ , где  $L$  — константа, зависящая только от  $S$ . При этом  $\sigma(s) \subset \sigma$ .

**Доказательство.** Достаточно применить известную лемму Берса (см. [11], п. II.3.3, лемма 3) к гиперболической структуре  $h$  на  $S \setminus C$ , заметив при этом, что для топологического типа поверхности  $S \setminus C$  имеется только конечное число возможностей. (Так как объем  $S \setminus C$  в метрике  $h$  конечен, то мы имеем дело с конформно конечными римановыми поверхностями и никаких граничных кривых нет).

**6.7. Теорема.**  $X_S/\text{Mod}_S$  компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ ,  $x_i \in X_S$ , — некоторая последовательность. Нам достаточно доказать, что для подходящих  $f_i \in \text{Mod}_S$  некоторая подпоследовательность последовательности  $\{f_i(x_i)\}$  сходится в  $X_S$ . Пусть  $s_i$  — некоторая сингулярная структура из класса  $x_i$ . В силу леммы 6.6 каждой  $s_i$  отвечает симплекс максимальной размерности  $\sigma_i$ . Симплексу максимальной размерности отвечает разбиение поверхности  $S$  на диски с двумя дырами, определенное с точностью до изотопии. Ясно, что с точностью до диффеоморфизма таких разбиений имеется только конечное число. Поэтому с точностью до действия  $\text{Mod}_S$  максимальных симплексов имеется только конечное число. Следовательно, переходя к подпоследовательности и заменяя  $x_i$  на  $f_i(x_i)$  для подходящих  $f_i \in \text{Mod}_S$ , мы можем считать, что все симплексы  $\sigma_i$  совпадают. Пусть  $\sigma = \sigma_i$  для всех  $i$ . Так как  $\sigma(s_i) \subset \sigma_i = \sigma$ , то все  $x$  лежат в  $X(\sigma)$ . Кроме того,  $l_\nu(x_i) = l_\nu(s_i) \leq L$  для всех  $\nu \in \sigma$  и всех  $i$ , где  $L$  — константа из леммы 6.6. Следовательно,  $L_\sigma^2(x_i) \in [0, L^2]^\sigma$ . Теперь мы воспользуемся скручиваниями Дена. Применяя обозначения и результаты п. 4.7 с  $\tau = \sigma$ , мы получаем  $\Theta_\sigma(t(n_i)x_i) = \Theta_\sigma(x_i) + 2\pi n_i$  для любых  $n_i \in \mathbb{Z}^\sigma$ . Ясно, что  $n_i$  можно выбрать так, что  $\Theta_\sigma(t(n_i)x_i) \in [0, 2\pi]^\sigma$ . При этом, очевидно,  $L_\sigma^2(t(n_i)x_i) = L_\sigma^2(x_i)$ . Таким образом, заменив  $x_i$  на  $t(n_i)x_i$ , мы можем считать, что

$$\Phi_\sigma(x_i) = (L_\sigma^2(x_i), \Theta_\sigma(x_i)) \in [0, L^2]^\sigma \times [0, 2\pi]^\sigma.$$

Поскольку  $\Phi_\sigma$  — карта и  $[0, L^2]^\sigma \times [0, 2\pi]^\sigma$  компактно, из последовательности  $\{x_i\}$  теперь можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Это завершает доказательство.

6.8. Теорема. Край  $\partial X_S$  гомотопически эквивалентен геометрической реализации  $|C(S)|$  комплекса кривых  $C(S)$ .

Доказательство. Для каждой вершины  $v$  комплекса  $C(S)$  обозначим через  $B_v$  множество изотопических классов таких сингулярных структур  $s$  на  $S$ , что  $v \in \sigma(s)$ . Множества  $B_v$  замкнуты в  $\partial X_S$ , поскольку замкнуты их пересечения с множествами  $X(\sigma)$  из п. 5.1 (топология на последних задана картами  $\Phi_\sigma$ ). Ясно, что  $\partial X_S = \bigcup_v B_v$ . При этом если пересечение  $\bigcap_{v \in \sigma} B_v \neq \emptyset$ , то  $\sigma$  — симплекс. Так что  $C(S)$  — это нерв покрытия края  $\partial X_S$  замкнутыми множествами  $B_v$ . Поэтому нам достаточно доказать, что как множества  $B_v$ , так и их непустые пересечения  $B_\sigma = \bigcap_{v \in \sigma} B_v$  стягиваемы. (Отметим, что все они, очевидно, являются многообразиями с углами.)

Пусть  $\sigma$  — некоторый симплекс комплекса  $C(S)$ . Представим его вершины попарно не пересекающимися окружностями и обозначим через  $S$  их объединение. Положим  $R = S \setminus C$ . Каждую точку  $x \in B_\sigma$ , очевидно, можно представить такой сингулярной структурой  $s$ , что ее многообразие особенностей содержит  $C$ . Такая структура  $s$  очевидным образом определяет сингулярную структуру на  $R$ . Изотопический класс последней, очевидно, зависит только от  $x$ . В результате мы получаем отображение  $B_\sigma \rightarrow X_R$ , которое мы обозначим через  $r_\sigma$ . Далее, скручивания определяют действие аддитивной группы  $\mathbf{R}^\sigma$  на  $B_\sigma$  (см. п. 4.3). Используя карты  $\Phi$  и поведение инвариантов  $\Theta$  при скручиваниях, легко проверить, что это действие свободно, непрерывно и, более того, превращает  $r_\sigma$  в главное  $\mathbf{R}^\sigma$ -расслоение. В частности,  $X_R = B_\sigma / \mathbf{R}^\sigma$ . Мы видим, что  $B_\sigma$  гомотопически эквивалентно  $X_R$ . Так как  $X_R$  — многообразие с углами, внутренностью которого является пространство Тайхмюллера  $T_R$ , то  $X_R$  стягиваемо вместе с  $T_R$ . Следовательно, стягиваемо и  $B_\sigma$ . Это завершает доказательство.

#### Список литературы

- [1] Borel A., Serre J.-P. Corners and arithmetic groups // Comment. Math. Helv. 1973. Vol. 48. P. 436–491.
- [2] Harvey W. J. Boundary structure of the modular group // Annals of Mathematics Studies, N 97. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981. P. 245–251.
- [3] Harvey W. J. Modular groups and representation spaces // Contemporary Math., N 74. Providence: Amer. Math. Soc. 1988. P. 205–214.
- [4] Иванов Н. В. Комплексы кривых и модулярные группы Тайхмюллера // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, вып. 3. С. 49–91.
- [5] Ivanov N. V. On the virtual cohomology dimension of the Teichmüller modular group // Lecture Notes in Math. 1060. Berlin: Springer, 1984. S. 306–318.
- [6] Harer J. L. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface // Invent. Math. 1986. Vol. 84, N 1. P. 157–176.
- [7] Fathi A., Laudenbach F., Poenaru V. Travaux de Thurston sur les surfaces. Séminaire Orsay // Asterisque. 1979. Vol. 66–67. 284 p.
- [8] Bers L., Gardiner F. P. Fricke spaces // Adv. in Math. 1986. Vol. 62, N 3. P. 249–284.
- [9] Иванов Н. В. Приклеивание углов к пространству Тайхмюллера // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, вып. 4. С. 191.

- [10] *Beardon A. F.* The geometry of discrete groups. Berlin: Springer, 1983. (Рус. пер.: Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986. 304 с.).
- [11] *Abikoff W.* The real analytic theory of Teichmüller space // Lecture Notes in Math. 820. Berlin: Springer, 1980. (Рус. пер.: Абикоф У. Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера. М.: Мир, 1985. 119 с.).
- [12] *Ivanov N. V.* Algebraic properties of mapping class groups of surfaces // Banach Center Publ. 1986. Vol. 18. P. 15–35.

Ленинградское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова АН СССР  
191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 12 апреля 1989 г.