



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Kozlov, N. G. Moshchevitin, On diffusion in Hamiltonian systems,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1997, Number 5, 49–52

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 15, 2025, 19:09:13



УДК 517.9+531.01

О ДИФФУЗИИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

В. В. Козлов, Н. Г. Мощевитин

1. Согласно Пуанкаре основной задачей динамики является исследование уравнений Гамильтона

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad k = 1, \dots, n,$$

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y). \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \bmod 2\pi$ — угловые канонические координаты, $y = (y_1, \dots, y_n)$ — канонические импульсы, ε — малый параметр. Гамильтониан H 2π -периодичен по каждой угловой координате x_1, \dots, x_n . При $\varepsilon = 0$ имеем вполне интегрируемую систему, причем переменные y , x являются переменными действие—угол этой системы.

В соответствии с КАМ-теорией при возмущении системы с невырожденным гамильтонианом

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} \right\| \neq 0 \quad (2)$$

большинство (в смысле меры Лебега) инвариантных торов

$$x \bmod 2\pi, \quad y = y_0$$

не исчезает, а лишь слегка деформируется. Такие сохраняющиеся торы называются *колмогоровскими*. При $n = 2$ колмогоровские торы *разделяют* трехмерную поверхность уровня интеграла энергии $H = \text{const}$ на инвариантные области и поэтому переменные действие y при малых значениях ε не эволюционируют. Как показал на модельном примере В.И. Арнольд [1], при $n > 2$ система может *дрейфовать* в связанной щели между колмогоровскими торами. При этом переменные действие y могут изменяться на конечную величину. Такое явление называется *диффузией Арнольда*. Механизмы диффузии в многомерных гамильтоновых системах пока еще до конца не ясны.

Н.Н. Нехорошев [2] нашел оценку скорости диффузии Арнольда для аналитических систем с *крутым* гамильтонианом (условие крутизны является требованием более сильным, чем неравенство (2)): найдутся такие положительные постоянные ε_0 , a , b , что при всех

$$0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon} \exp \frac{1}{\varepsilon^a}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (3)$$

справедливо неравенство

$$|y(t) - y(0)| < \varepsilon^b. \quad (4)$$

Постоянные a и b зависят лишь от невозмущенного гамильтониана H_0 .

В настоящей работе мы приведем примеры гамильтоновых систем, для которых скорость диффузии существенно больше, чем экспоненциально малая. Однако системы будут сильно *вырождены* (т.е. не будет выполнено условие (2)).

Чтобы лучше понять оценки (3), (4), рассмотрим случай (который фактически нам встретится ниже), когда приращение переменных действие $y(t) - y(0)$ равно $\varepsilon \log t$. Если, например, в формуле (4) оказывается, что $b = 1/2$, то получаем неравенство

$$|y(t) - y(0)| < \sqrt{\varepsilon},$$

справедливое на интервале экспоненциально большой длины

$$0 \leq t < \exp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Если же оказывается, что $b = 0$, то приращение переменных действие становится равным 1 на несколько большем интервале времени

$$0 \leq t < \exp \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отметим еще, что оценки вида (3), (4) впервые были получены Дж. Литлвудом [3, 4] в ограниченной круговой задаче трех тел. Правда, в этом случае $n = 2$ и КАМ-теорема дает более сильный результат о вечной устойчивости переменных действие.

2. Рассмотрим модельную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x), \quad H_0 = \sum_{k=1}^n \omega_k y_k, \quad (5)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — рационально несоизмеримые вещественные числа, а H_1 — аналитическая функция на n -мерном торе $T^n = \{x \bmod 2\pi\}$. Фазовым пространством служит прямое произведение тора $T^n = \{x \bmod 2\pi\}$ и $R^n = \{y\}$. Эта система допускает полный набор коммутирующих *многозначных* интегралов

$$\omega_n x_1 - \omega_1 x_n, \omega_{n-1} x_1 - \omega_1 x_{n-1}, \dots, \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2, H$$

и поэтому явно интегрируется. Однако, как мы увидим ниже, вопрос об эволюции переменных действие упирается в достаточно сложную проблему, связанную с малыми знаменателями.

Канонические уравнения с гамильтонианом (5) имеют следующий явный вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = \omega_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = \varepsilon f_k(x), \quad k = 1, \dots, n, \quad f_k = -\frac{\partial H_1}{\partial x_k}. \quad (6)$$

Первая группа уравнений определяет условно-периодическое движение по n -мерному тору

$$x_k = \omega_k t + x_k(0), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ — несоизмеримые частоты условно-периодического движения, а $x_1(0), \dots, x_n(0)$ — начальные фазы. Переменные действие являются интегралами от условно-периодических функций:

$$y_k(t) = y_k(0) + \varepsilon \int_0^t f_k(\omega\tau + x(0)) d\tau.$$

Поскольку фазовые средние f_k по тору T^n равны нулю, то (по теореме Г. Вейля) $y_k(t) - y_k(0) = o(t)$, $t \rightarrow \infty$. Однако эта оценка скорости диффузии является слабым результатом ввиду его большой общности (теорема Вейля справедлива для непрерывных и даже интегрируемых по Риману функций). Отметим, что в случае гладких функций f_k оценка теоремы Вейля равномерна по начальным фазам $x(0)$.

Системы с гамильтонианом (5) рассматривались в [5] с точки зрения условий существования *однозначных* интегралов. Установлено, что при $n = 2$ можно указать такое иррациональное число ω_1/ω_2 и такую аналитическую функцию $H_1: T^2 \rightarrow R$, что уравнения (6) допускают независимый от H интеграл из класса C^d и при этом не существует никакого дополнительного интеграла класса C^{d+1} . Подробные доказательства даны в работе [6]. В [7] обсуждается аналогичный результат при произвольном $n \geq 2$.

Прежде чем формулировать результаты настоящей работы, отметим, что разность $y(t) - y(0)$ при фиксированном значении времени t зависит только от начальных фаз $x_k(0)$, $k = 1, \dots, n$. Определим

$$Y_k(T) = \max_{1 \leq t \leq T} \max_{x(0)} |y_k(t) - y_k(0)|,$$

$$Y(T) = \max_{k=1, \dots, n} Y_k(T).$$

Теорема 1. Пусть $n = 2$, ω_1/ω_2 иррационально и функция H_1 аналитическая. Тогда

(i) существует последовательность $t_\nu \uparrow \infty$, такая, что расстояния между точками $(x(t_\nu), y(t_\nu))$ и $(x(0), y(0))$ (в стандартной метрике на $T^2 \times R^2$) стремятся к нулю равномерно по начальным данным при $\nu \rightarrow \infty$;

(ii) существуют постоянная $c > 0$ и последовательность $T_\nu \uparrow \infty$, такие, что

$$Y(T_\nu) < \varepsilon c \log T_\nu, \quad \forall \nu.$$

Заключение (i) фактически доказано в [8]. Оно устанавливает равномерную возвращаемость фазовых траекторий системы (5). Заключение (ii) доказывается разбором двух случаев: А и Б. В силу аналитичности функции f имеем

$$f_k(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} f_k(m) \exp(i\langle m, x \rangle),$$

$$|f_k(m)| \leq \gamma_1 \exp(-\gamma_2 |m|), \quad |m| = |m_1| + |m_2|.$$

Случай А. Если для всех $m \neq 0$ выполнено $|\langle m, \omega \rangle| > \exp(-\gamma' |m|)$ с некоторым $\gamma' \in (0; \gamma_2)$, то $Y(T) = O(\varepsilon)$ при $T \rightarrow \infty$ и все доказано.

Случай Б. Если имеется бесконечно много целочисленных векторов $m_\nu = (p_\nu, q_\nu) \in \mathbb{Z}^2$, $q_\nu > 0$, таких, что

$$|\langle m_\nu, \omega \rangle| = |\omega_1 p_\nu + \omega_2 q_\nu| < \exp(-\gamma'(|p_\nu| + q_\nu)),$$

то с некоторым $\gamma'' > 0$ выполнено

$$y_1(q_\nu/\omega_2) - y_1(0) = \varepsilon \int_0^{q_\nu/\omega_2} f_1(\omega\tau + x(0)) d\tau = O(\varepsilon \exp(-\gamma'' q_\nu)),$$

и в силу того что

$$y_1(\lambda q_\nu/\omega_2) - y_1(0) = \varepsilon \sum_{l=0}^{\lambda-1} \int_0^{q_\nu/\omega_2} f_1(\omega\tau + \xi_l) d\tau = O(\varepsilon \lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon),$$

имеем

$$y_1(\lambda q_\nu) = O(\varepsilon \lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon), \quad \forall \lambda$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = O(\varepsilon \lambda \exp(-\gamma'' q_\nu)) + O(\varepsilon q_\nu), \quad \forall t \in (0; \lambda q_\nu).$$

Выбирая $\lambda_\nu = \exp(-\gamma'' q_\nu)$ и $T_\nu = \lambda_\nu q_\nu$, получаем

$$Y_1(T_\nu) = O(\varepsilon \log T_\nu).$$

Остается вспомнить, что имеет место интеграл энергии $H = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \varepsilon H_1(x) = \text{const}$, и заключение (ii) теоремы 1 можно считать доказанным.

Перед формулировкой теорем 2, 3 еще раз напомним, что разность $y_k(t) - y(0)$ зависит (при фиксированном t) только от начальных фаз $x(0)$.

Теорема 2. При $n = 2$ для любой заданной наперед, положительнозначной, монотонно возрастающей функции $g(t)$, такой, что $g(t) = o(t)$, $t \rightarrow \infty$, найдутся иррациональное число ω_1/ω_2 и аналитическая функция $H_1: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

- (i) при каждом значении h система (6) транзитивна на уровне энергии $H = h$;
- (ii) существуют постоянная $c > 0$ и последовательность $t_\nu \uparrow \infty$, такие, что выполнено

$$\left(\int_{T^2} |y_k(t_\nu) - y(0)|^2 dx(0) \right)^{1/2} \geq \varepsilon c g(t_\nu).$$

Свойство транзитивности означает наличие траектории, всюду плотно заполняющей трехмерную поверхность $H = h$. Этот результат установлен в работе [8]. Таким образом, здесь изменение переменных действие неограниченно и можно говорить о диффузии в гамильтоновой системе (6), однако свойство (ii) не обеспечивает быстрой диффузии. Ввиду свойства возвращаемости такую

диффузию можно назвать *мерцающей*. Оба заключения теоремы 2 доказываются стандартным образом с использованием простых свойств цилиндрических каскадов, порожденных рассматриваемой гамильтоновой системой (см. [11]).

Случай $n \geq 3$ существенно отличается от случая $n = 2$.

Теорема 3. Пусть $n = 3$ и $g(t)$ — произвольная положительная функция, возрастающая при $t \rightarrow \infty$ и такая, что $g(t) = o(t)$. Тогда найдутся такие несоизмеримые частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и аналитическая функция $H_1: T^3 \rightarrow R$, что при любом t выполнено

$$\left(\int_{T^3} |y_1(t) - y_1(0)|^2 dx(0) \right)^{1/2} > \varepsilon g(t). \quad (7)$$

Таким образом, при $k = 3$ уже нет свойства равномерной возвращаемости, хотя индивидуальная возвращаемость каждого $y_k(t)$ в отдельности, как доказано в [9], по-прежнему имеет место. Теорема 3 является следствием одного общего результата об интегралах условно-периодических функций [10]. По-видимому, можно указать примеры гамильтоновых систем с тремя степенями свободы, удовлетворяющих теореме 3 и транзитивных на энергетических уровнях $H = \text{const}$, однако это связано с тонкими конструкциями теории диофантовых приближений.

В качестве примера положим в теореме 3 $g(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Из неравенства (7) получаем оценку

$$\max_{x(0)} |y_1(t) - y_1(0)| > 1, \quad (8)$$

справедливую при любом

$$t \asymp \varepsilon^{-1/\alpha}. \quad (9)$$

Оценки (8), (9) показывают, что изменение переменных действие на конечную величину происходит на коротких интервалах времени порядка $\varepsilon^{-\beta}$, $\beta > 1$. Таким образом, скорость диффузии будет уже не экспоненциально малой, а нарастать по степенному закону. Примеры систем с крутым гамильтонианом H_0 и возрастанием переменной действие по степенному закону указаны в работе [2]. Однако там речь шла об отдельных траекториях, в то время как оценка (7) справедлива в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 96—01—00378 и № 96—01—00747), а также INTAS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. 1967. 156, № 1. 9—12.
2. Нехорошее Н.Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Успехи матем. наук. 1977. 32, вып. 6. 5—66.
3. Littlewood J.E. On the equilateral configuration in the restricted problem of three bodies // Proc. London Math. Soc. 1959. 3, N 9. 343—372.
4. Littlewood J.E. The Lagrange equilateral configuration in celestial mechanics // Proc. London Math. Soc. 1959. 3, N 9. 525—543.
5. Kozlov V.V. Phenomena of nonintegrability in Hamiltonian systems // Proc. Int. Congr. Math. Berkley, California, USA. 1986. 1161—1170.
6. Мощевитин Н.Г. О существовании и гладкости интеграла гамильтоновой системы определенного вида // Матем. заметки. 1991. 49, вып. 5. 80—85.
7. Мощевитин Н.Г. О существовании и гладкости интеграла одной многочастотной системы уравнений Гамильтона // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М., 1995. 45—52.
8. Козлов В.В. Об одной задаче Пуанкаре // Прикл. матем. и механ. 1976. 40, вып. 2. 352—355.
9. Мощевитин Н.Г. О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условно-периодической функции // Матем. заметки. 1995. 58, вып. 5. 723—735.
10. Мощевитин Н.Г. Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение траекторий некоторых динамических систем // Матем. заметки. 1995. 58, вып. 3. 394—410.
11. Gottschalk W., Hedlund G. Topological Dynamics // AMS Col. N 36. N.Y., 1955.

Поступила в редакцию
21.06.96