В. А. Быковский, А. И. Виноградов, Неоднородные свертки, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 160, 16–30

В.А.Быковский,А.И.Виноградов

# НЕОДНОРОДНЫЕ СВЕРТКИ

## Введение

В этой работе мы получим асимптотическую формулу

$$\sum_{n\leq x} \tau_3(n)\cdot\tau_2(n+N) = x\cdot f_3(\log x) + O(x^{1-\delta}), \tag{0.1}$$

где $f_3$ – кубический полином, коэффициенты которого зависят от $N$.

Начиная с работы [1], эта сумма изучалась довольно интенсивно на протяжении последних 30 лет (см. [2], [4]), но только в последнее время в работах [5], [10] было получено степенное понижение в остатке (0.1)

$$\delta\approx\frac{1}{200}, [5]; \quad \frac{1}{102}, [10]. \tag{0.2}$$

Отметим,что гипотеза Сельберга [3] об отсутствии малых собственных значений для конгруэнц-подгрупп $\Gamma_0(q)$ позволяет получить в (0.1)

$$\delta = \frac{1}{9} - \varepsilon, \tag{0.3}$$

где $\varepsilon>0$ – сколь угодно мало,но фиксировано. Наша главная задача в этой работе – показать, как можно получить результат (0.3) безусловно с помощью плотностной теоремы Иванца [6].

Отметим также, что константа в символе $O$-большое в (0.1) зависит от параметра $N\geq 1$. Причем если верна гипотеза Петерсона для нулевого веса, тогда эта зависимость весьма слабая и параметр $N$ входит в $O$-символ в (0.1) как функция числа делителей (см.[8]):

$$\tau(N). \tag{0.4}$$

Без гипотезы Петерсона эта зависимость степенная:

$$N^{\frac{1}{5}} \tag{0.5}$$

и определяется оценкой Серра[11].

Отметим также, что степенное понижение в остатке можно получить в известной неоднородной свертке Линника [2]:

$$\sum_{n\leq x} \tau_k(n)\cdot\tau_2(n+N) = x\cdot f_k(\log x) + O(x^{1-\delta}), \tag{0.6}$$

где константа $\delta$ при $k \geq 6$ имеет вид:

$$\delta = \frac{1}{2k} - \varepsilon \; ; \tag{0.7}$$

при $k = 4.5$

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k}\right) \; ; \tag{0.8}$$

$f_k$ – полином степени $k$, коэффициенты которого зависят от $N$. Константа в символе $O$–большое в (0.6) зависит от $N$ как корень квадратный от величины (0.4) при гипотезе Петерсона и (0.5) без нее.

Более подробно на равенстве (0.6) мы остановимся в конце работы.

## § I. Конгруэнц-подгруппы

Прежде чем свести сумму (0.I) к свертке для конгруэнц-подгрупп, напомним, что для обычной функции числа делителей $\tau_2(n) = \tau(n)$ существует принцип повторного переворота делителей через точку $\sqrt{n}$, с помощью которого получаем известную формулу

$$\tau_2(n) = 2 \cdot \sum_{q|n,\, q<\sqrt{n}} 1 + \delta_2(n),$$

которая сводит полную сумму к сумме по делителям до $\sqrt{n}$; $\delta_2(n) = 1, 0$ в зависимости от того, является $n$ точным квадратом или нет.

Для функции $\tau_3(n)$ также существует аналогичный принцип тройного переворота делителей через точку $\sqrt[3]{n}$, но в "загрязненном" виде, который приводит к формуле типа

$$\tau_3(n) \cong 3 \cdot \sum_{n=q\cdot m,\, q<\sqrt[3]{n}} \tau_2(m) \; . \tag{I.I}$$

Ее точная запись более сложна:

$$\tau_3(n) = \sum_{n=q\cdot m,\, q<\sqrt[3]{n}} \left[\tau_2(m) + 2 \cdot \tau_2(m, \sqrt[3]{n})\right] + \delta_3(n), \tag{I.2}$$

где

$$\tau_2(m,\sqrt[3]{n}) = \sum_{m=d_1\cdot d_2,\ d_2>\sqrt[3]{n}} 1 \quad , \tag{I.3}$$

$$\delta_3(n) = \begin{cases} 2\cdot\tau_2(n^{\frac{2}{3}})-1, & \text{если } n \text{ – точный куб,} \\ 0 & \text{в другом случае.} \end{cases} \tag{I.4}$$

Представление (I.2) сводит полную сумму к сумме по делителям $<\sqrt[3]{n}$. Формула (I.2) будет играть роль главной исходной точки в нашей работе и в ней заключено основное отличие в подходе к этой задаче здесь и в работах [5], [10]. Подставим первую сумму из (I.2):

$$\sum_{n=q\cdot m,\ q<\sqrt[3]{n}} \tau_2(m) \tag{I.5}$$

в (0.1) на место $\tau_3(n)$. В результате получаем двойную сумму:

$$\sum_{q<\sqrt[3]{x}} \quad \sum_{q^2<n<\frac{x}{q}} \tau(n)\cdot\tau(nq+N)\,. \tag{I.6}$$

Внутренняя сумма в (I.6) является сверткой для конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(q)$.

Сумма числа делителей (I.3) обладает ограничением

$$d_2 > \sqrt[3]{n}\ . \tag{I.7}$$

От него мы избавимся с помощью разрывного интегрального оператора

$$\frac{1}{\pi i}\int_{Re\,\nu>\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{d_2}{\sqrt[3]{n}}\right)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)}\,d\nu = \begin{cases} 1\,, & \text{если } d_2>\sqrt[3]{n}\,, \\ \frac{1}{2}\,, & \text{если } d_2=\sqrt[3]{n}\,, \\ 0\,, & \text{если } d_2<\sqrt[3]{n}\,. \end{cases} \tag{I.8}$$

Отметим,что в приложениях обычно выгоднее использовать конечный аналог интеграла (I.8), который здесь понимается в смысле главного значения.

С помощью оператора (I.8) часть свертки (0.I), которая определяется суммой

$$\sum_{n=q\cdot m,\ q<\sqrt[3]{n}} \tau_2(m, \sqrt[3]{n}) \tag{I.9}$$

из представления (I.2), приводится к исследованию двойной суммы

$$\sum_{q<\sqrt[3]{x}} q^{\frac{1}{2}-\nu} \sum_{q^2<n<\frac{x}{q}} (\sqrt[3]{n\cdot q})^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot \tau_\nu(n)\cdot \tau(nq+N), \tag{I.10}$$

где

$$\tau_\nu(n) = n^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_{d|n} d^{1-2\nu} .$$

Внутренняя сумма в (I.10) также является сверткой для группы $\Gamma_0(q)$. Такие общие свертки для $\Gamma_0(1) = SL(2,\mathbb{Z})$ подробно изучены Н.В.Кузнецовым в работе [8]. Его метод почти дословно переносится на конгруэнц-подгруппу $\Gamma_0(q)$ с очевидными изменениями в непрерывной компоненте из-за многовершинности фундаментальной области $F_q$ группы $\Gamma_0(q)$, слагаемое $\delta_3(n)$ из (I.2) и (I.4) вносит в свертку (0.I) величину порядка

$$\sqrt[3]{x}\cdot \log x .$$

Аналогичную поправку дает значение $\frac{1}{2}$ оператора (I.8).

Свертка (I.6) является частным случаем свертки (I.10) при $\nu=\frac{1}{2}$. Чтобы не усложнять техническую сторону работы, мы подробно рассмотрим этот частный случай

$$\sum_{q^2<n<\frac{x}{q}} \tau(n)\cdot \tau(qn+N) \tag{I.II}$$

и затем в конце отметим, какие изменения надо внести в схему счета в случае общего значения параметра $\nu$.

## § 2. <u>Метод Кузнецова для</u> $\Gamma_0(q)$.

Методом работы [8] изучается общая свертка типа (I.II) с произвольной весовой функций $\omega_0$ :

$$W_N(q,\omega_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_0\left(\sqrt{\frac{nq}{N}}\right)\cdot\tau(n)\cdot\tau(qn+N). \qquad (2.I)$$

Мы специально придерживаемся обозначений работы [8] для того, чтобы читателю было легче ориентироваться при сравнении этой работы с работой [8]. В частности, если в качестве $\omega_0$ выбрать всплеск, сглаженный на концах интервала

$$(0,x)$$

оптимальным образом, тогда сумма

$$\sum_{q<\sqrt[3]{x}} W_N(q,\omega_0) \qquad (2.2)$$

будет отличаться от аналогичного среднего для свертки (I.II) не более, чем на величину (0.3).

К свертке (2.I) уже применим метод работы [8]. Отметим, что в [8] присутствует и вторая весовая функция $\omega_1$ которую мы положим тождественно равной нулю:

$$\omega_1 \equiv 0. \qquad (2.3)$$

Разлагая сумму (2.I) по спектру группы $\Gamma_0(q)$, мы получим аналог формулы (86) теоремы 3.5 из [8] с очевидными изменениями полюсного члена из-за многовершинности, который надо регуляризовать в точке

$$s=\nu=\frac{1}{2}. \qquad (2.4)$$

После чего это слагаемое мы обозначим через

$$\zeta_N(q,\omega_0). \qquad (2.5)$$

Аналог слагаемого $Z_{-N}^{(d)}$ исчезнет, т.к. функция $\omega_1$, а вместе с нею и $h_1$, которая определяется интегральным преобразованием от $\omega_1$, тождественно равны нулю. Аналоги слагаемых:

$$Z_N^{(d)},\quad Z_N^{(c)},\quad Z_N^{(p)}$$

в точке (2.4) остаются и формула (86) из [8] для свертки (2.I) на языке $\Gamma_0(q)$ примет вид:

$$W_N(q,\omega_0)=\zeta_N(q,\omega_0)+Z_N^{(d)}(q,h_0)+$$

$$+Z_N^{(c)}(q,h_0)+Z_N^{(p)}(q,h^*)\,. \tag{2.6}$$

В равенстве (2.6) на месте параметров $s$ и $\nu$ из (86) [8] поставлен параметр $q$ и убраны функции $\omega_1$ и $h_1$, т.к. они тождественные нули.

Существенное отличие равенства (2.6) для $\Gamma_0(q)$ от равенства (86) из [8] для $\Gamma_0(1) = SL(2,\mathbb{Z})$ содержится в слагаемом

$$Z_N^{(d)}, \tag{2.7}$$

которое при $q>1$, возможно, содержит малые собственные значения

$$\lambda_j < \frac{1}{4}\,. \tag{2.8}$$

Поэтому запишем (2.7) в виде суммы двух слагаемых:

$$Z_N^{(d)}(q,h_0) = Z_N^{(d)}(q,-\tfrac{1}{4}) + Z_N^{(d)}(q,+\tfrac{1}{4}), \tag{2.9}$$

где $Z_N^{(d)}$ со знаком $(-\frac{1}{4})$ содержит все слагаемые с малыми собственными значениями (2.8), а $Z_N^{(d)}$ со знаком $(+\frac{1}{4})$ – все большие собственные значения

$$\lambda_j \geqslant \frac{1}{4}\,. \tag{2.10}$$

Отметим,что не тривиальной частью по сравнению с работой [8] здесь является слагаемое

$$Z_N^{(d)}(q,-\tfrac{1}{4})\,. \tag{2.11}$$

## § 3. Малые собственные значения

Явный вид (2.II) задается суммой

$$\sum_{\frac{3}{16}\leqslant\lambda_j<\frac{1}{4}} \alpha_j\,\frac{|\rho_j(1)|^2}{ch\,\pi\varkappa_j}\cdot x^{\theta_j}\cdot\left|L_j(\tfrac{1}{2})\right|^2\cdot t_j(N)\,, \tag{3.1}$$

где

$$\theta_j = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_j}\,, \tag{3.2}$$

$$\alpha_j = x^{-\theta_j} \cdot h_0(\varkappa_j) . \tag{3.3}$$

Все обозначения взяты из [8].

Если задать малое $\varepsilon > 0$ и считать, что

$$x \geqslant x_0 = x_0(\varepsilon) , \tag{3.4}$$

где $x_0 > 1$ – достаточно большое число, зависящее от $\varepsilon$, тогда для всех $\lambda_j$ с условием (3.4) и для всех $\lambda_j$, удовлетворяющих условию

$$\frac{3}{16} \leqslant \lambda_j < \frac{1}{4} - \varepsilon^2 , \tag{3.5}$$

величины (3.3) лежат в интервале

$$a_0 \leqslant \alpha_j \leqslant a_1 , \tag{3.6}$$

где $0 < a_0 < a_1$ – положительные абсолютные константы.

Пусть

$$Z_N^{(d)}(q, -\tfrac{1}{4} + \varepsilon^2) \tag{3.7}$$

означает часть суммы (3.I), распространенную по интервалу (3.5), и пусть $\omega_0$ – достаточно гладкая функция, обеспечивающая оценку

$$Z_1^{(d)}(q, +\tfrac{1}{4}) << x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} , \quad N = 1 . \tag{3.8}$$

В левой части (3.8) и дальше мы будем считать, что

$$N = 1 ;$$

тогда равенство (2.6)можно записать в форме:

$$W_1(q, \omega_0) = \frac{x}{q} f_2\left(\log \frac{x}{q}\right) +$$
$$+ Z_1^{(d)}(q, -\tfrac{1}{4} + \varepsilon^2) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) , \tag{3.9}$$

где $f_2$ – квадратичный полином с постоянными коэффициентами.

Для оценки $Z_1^{(d)}$ из (3.7) мы воспользуемся остроумным приемом Линника: положим в равенстве (3.9)

$$x = q^2 \geqslant x_0 = x_0(\varepsilon) \tag{3.I0}$$

и запишем его в перевернутом виде:

$$Z_1^{(d)}(q,-\frac{1}{4}+\varepsilon^2) = w_1(q,\omega_0) -$$

$$-q\cdot f_2(\log q) + O(q^{1+2\cdot\varepsilon}). \qquad (3.11)$$

Используя в равенстве (3.II) тривиальную оценку

$$w_1(q,\omega_0) \ll q\cdot \log^2 q,$$

получаем из (3.II) оценку сверху:

$$Z_1^{(d)}(q,-\frac{1}{4}+\varepsilon^2) \ll q^{1+2\cdot\varepsilon}, \qquad (3.12)$$

которая справедлива при условии (3.I0).

Для того, чтобы оценить $Z_1^{(d)}$ с любым $x$ :

$$x \geqslant q^2 \geqslant x_0,$$

запишем сумму (3.7) в виде:

$$\sum_{\frac{3}{16}\leqslant\lambda_j<\frac{1}{4}-\varepsilon^2} \alpha_j\cdot\frac{|\rho_j(1)|^2}{ch\,\pi\varkappa_j}\cdot q^{2\cdot\theta_j}\left(\frac{x}{q^2}\right)^{\theta_j}\cdot\left|L_j\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2. \qquad (3.13)$$

По условию (3.6) величины $\alpha_j$ положительны, поэтому каждое слагаемое в сумме (3.I3) также положительно. Следовательно, вынося из-под знака суммы (3.I3) величину

$$\left(\frac{x}{q^2}\right)^{\theta_j}$$

в максимальной точке

$$\theta_j = \frac{3}{4},$$

получаем, что сумма (3.I3) не больше величины

$$\left(\frac{x}{q^2}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\sum_{\frac{3}{16}\leqslant\lambda_j<\frac{1}{4}-\varepsilon^2} \alpha_j\cdot\frac{|\rho_j(1)|^2}{ch\,\pi\varkappa_j}\cdot q^{2\theta_j}\cdot\left|L_j\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2. \qquad (3.14)$$

Оставшаяся сумма в (3.I4) отличается от величины $Z_1^{(d)}$ из (3.7) с условием (3.I0) другим набором параметров $\alpha_j$ ,которые зависят от $x$ . Но все они ограничены сверху и снизу абсолютными константами в (3.6), поэтому (3.I4) по своему порядку не больше величины

$$\left(\frac{x}{q^2}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot Z_1^{(d)}(q, -\tfrac{1}{4}+\varepsilon^2), \tag{3.I5}$$

где $Z_1^{(d)}$ из (3.7) в точке $x = q^2 \geq x_0$ и поэтому для нее можно воспользоваться оценкой (3.I2). В результате получаем, что общая величина $Z_1^{(d)}$ из (3.7) для любого $x \geq q^2 \geq x_0$ имеет оценку

$$Z_1^{(d)}(q, -\tfrac{1}{4}+\varepsilon^2) \ll \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{q}} \cdot q^{2\cdot\varepsilon} . \tag{3.I6}$$

Напомним, что эта оценка была получена для специализированной $\omega_0$, обеспечивающей оценку (3.8). Но после того, как оценка (3.I6) получена, мы можем убрать условие специализации $\omega_0$ и вернуться к первоначальному значению $\omega_0$ , т.к. ее значения параметров $a_j$ из (3.3) также удовлетворяют условию (3.6). При этом оценка (3.8) ухудшается:

$$Z_1^{(d)}(q, +\tfrac{1}{4}) \ll q^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}+\varepsilon} . \tag{3.I7}$$

Суммирование оценки (3.I7) по всем $q \leq \sqrt[3]{x}$ приводит к величине

$$x^{1-\frac{1}{9}+\varepsilon} . \tag{3.I8}$$

Суммирование величины (3.I6) по всем $q \leq \sqrt[3]{x}$ приводит к величине

$$x^{1-\frac{1}{12}+\varepsilon} . \tag{3.I9}$$

Величина (3.I9) больше (3.I8), поэтому метод этого параграфа приводит к асимптотике (0I) с величиной

$$\delta = \frac{1}{12} - \varepsilon . \tag{3.20}$$

Отметим, что замена свертки (I.II) на общую свертку из (I.I0) с комплексным параметром

$$\nu = \frac{1}{2} + it , \tag{3.2I}$$

не отражается на существе рассуждений этого параграфа, т.к. в этом случае квадрат модуля ряда Гекке $L_j(\frac{1}{2})$ будет заменен квадратом модуля $L_j(\nu)$, т.е. останется положительной величиной. Кроме того, все параметры $\alpha_j$ будут домножены на одну и ту же функцию $f(\nu)$, не зависящую от $j$. Оценка (3.17) также сохранится, но для этого надо воспользоваться большим решетом [7] и укороченным уравнением для $L_j(\nu)$ из [9].

## § 4. Плотностная теорема Иванца

Оценка (3.16), а вместе с нею и величина $\delta$ из (3.20), существенно зависят от левого конца интервала (3.5), где величина $\theta_j$ принимает свое максимальное значение, но в то же время в окрестности левого конца,

$$\lambda_j = \frac{3}{16}$$

очень мало конгруэнц-подгрупп имеют собственные значения. Это следует из плотностной теоремы Иванца [6]. Поэтому если разбить интервал (3.5) на два подинтервала

$$\frac{3}{16} + \gamma \leqslant \lambda_j < \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \tag{4.1}$$

$$\frac{3}{16} \leqslant \lambda_j < \frac{3}{16} + \gamma \tag{4.2}$$

и часть суммы $Z_1^{(d)}$ из (3.7) по интервалу (4.1) оценить тем же методом, который был применен выше в § 3 для получения оценки (3.16), тогда вместо правой части (3.16) появится величина

$$\left(\frac{x}{q^2}\right)^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{16} - \gamma}} \cdot q^{1+2\cdot\varepsilon} . \tag{4.3}$$

Оставшийся интервал (4.2) надо оценить в среднем по $q$ с помощью плотностной теоремы [6] и затем оптимизировать вектор $\gamma$, приравняв две оценки, от интервалов (4.1) и (4.2). В результате получается величина

$$x^{1-\frac{1}{7}} ; \tag{4.4}$$

сравнивая величину (4.4) с величиной (3.18) получаем в (0.1) величину $\delta$ из (0.3).

Единственная тонкость в применении теоремы Иванца [6] состоит в том, как обойти гипотезу Линделефа по $q$ для величины

$$\frac{|\rho_j(1)|^2}{ch\, \pi \varkappa_j} \left| L_j\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2 . \tag{4.5}$$

Здесь нам помогает оценка (3.12). Из нее сразу следует, что величина (4.5) по своему порядку не больше величины

$$q^{1-2\theta_j+2\cdot\varepsilon}. \tag{4.6}$$

На интервале (4.2) показатель степени в (4.6) отрицателен. Это позволяет с особым эффектом использовать **плотностную** теорему [6]. В результате чего величина (4.4) получается с запасом.

Нам осталось обратить внимание на тот факт, что все предыдущие оценки были получены для частного случая параметра $N = 1$. Но общий параметр $N \geqslant 1$ входит в слагаемые суммы $Z_N^{(d)}$ мультипликативно как величина $t_j(N)$. Поэтому для общего случая суммы (3.7) справедлива оценка

$$Z_N^{(d)} \ll t(N)\cdot Z_1^{(d)}, \tag{4.7}$$

где

$$t(N) = \max_j(1, |t_j(N)|). \tag{4.8}$$

Поэтому для общего $N \geqslant 1$ сохраняются все предыдущие оценки с домножением их на величину $t(N)$ из (4.8).

Напомним, что сейчас известна оценка Серра [11]

$$t(N) \ll N^{\frac{1}{5}}.$$

Из гипотезы Петерсона следует оценка

$$t(N) \leqslant \tau(N) = \sum_{d|N} 1;$$

этим и объясняется присутствие величин (0.4) и (0.5) во введении.

Для общего параметра $\nu$ из (3.21) вместо квадрата модуля $L$-ряда в (4.5) в точке $\nu = \frac{1}{2}$ появится интегральное среднее от квадрата модуля $L_j(\nu)$ с ядром

$$\frac{f(\nu)}{2\nu-1}.$$

При соответствующей нормировке эта величина также положительна для всех $\lambda_j$ из интервала (3.5). Поэтому оценка ее величиной (4.6) сохраняется и в этом случае; функция $f(\nu)$ определена в конце § 3.

## § 5. Общая свертка Линника

Рассмотрим подробнее общую свертку [2]:

$$\sum_{n\le x} \tau_k(n)\cdot \tau_2(n+N) \;,\quad k\geqslant 4 . \tag{5.1}$$

Для нее спектральными методами также можно получить асимптотику со степенным понижением в остатке, как об этом говорилось во введении.

Чтобы понять, как это делается, заметим прежде всего, что для функции

$$\tau_k(n)$$

также существует аналог $k$-кратного переворота делителей через точку $\sqrt[k]{n}$, в результате которого получается формула типа

$$\tau_k(n) \cong k\cdot \sum_{n=m\cdot q,\ m<\sqrt[k]{n}} \tau_{k-1}(q) .$$

Ее строгая запись по типу формулы (1.2) для $\tau_3(n)$ довольно громоздка, поэтому приводить здесь ее явный вид мы не будем, ограничимся только первым слагаемым

$$\sum_{n=m\cdot q,\ m<\sqrt[k]{n}} \tau_{k-1}(q) .$$

Подставляя эту сумму в (5.1) на место $\tau_k(n)$, получали сумму

$$\sum_{q\le x^{1-\frac{1}{k}}} \tau_{k-1}(q)\cdot S_q(x) , \tag{5.2}$$

где

$$S_q(x) = \sum_{q^{\frac{1}{k-1}}<m<\frac{x}{q}} \tau(mq+N) . \tag{5.3}$$

Вычисление асимптотики суммы (5.2) сводится дисперсионным методом [2] к оценке квадратичного среднего:

$$\sum_{q\le x^{1-\frac{1}{k}}} \left[ S_q(x) - (\text{гл. член})\right]^2 , \tag{5.4}$$

что в свою очередь сводится к вычислению асимптотики усредненной свертки

$$\sum_{n_1 < n_2 \leqslant x^{1/k}} S(n_1, n_2), \tag{5.5}$$

где

$$S(n_1, n_2) = \sum_{n_2^{k-1} < q \leqslant \frac{x}{n_2}} \tau(q \cdot n_1 + N) \cdot \tau(q \cdot n_2 + N). \tag{5.6}$$

При $n_1 \neq n_2$ асимптотика свертки (5.6) вычисляется спектральными методами работы [8] так же, как это было в § 3.4 этой работы. Только в случае (5.6) мультипликативная структура $N$ играет в оценках более существенную роль. В простейшем случае, когда $N = 1$, свертку (5.6) можно переписать в виде

$$S(n_1, n_2) = \sum_{\substack{m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1 = (n_2 - n_1) \\ n_2^k < m_1 \leqslant x}} \tau(m_1) \cdot \tau(m_2). \tag{5.7}$$

Из такой записи сразу видно, что свертка (5.7) изучается спектральными методами группы

$$\Gamma_0\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{d^2}\right), \quad d = (n_1, n_2). \tag{5.8}$$

При $N > 1$ запись правой части (5.7) усложняется, т.к. начинают влиять общие наибольшие делители

$$d_1 = (N, n_1), \quad d_2 = (N, n_2)$$

и вместо группы (5.8) появляется

$$\Gamma_0\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{d^2} \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{\Delta^2}\right), \quad \Delta = (d_1, d_2). \tag{5.9}$$

Вторым существенным отличием свертки (5.6) от (I.II) на языке § 3 будет ухудшение оценки типа (3.I7). В ее правой части исчезнет понижающий множитель

$$q^{-\frac{1}{3}}$$

и останется только величина порядка

$$x^{\frac{2}{3}+\varepsilon} . \tag{5.10}$$

После суммирования этой оценки по всем

$$q = \frac{n_1 \cdot n_2}{d} \leqslant x^{\frac{2}{k}}$$

в дисперсии (5.4) появится остаток порядка

$$x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{k}+\varepsilon} . \tag{5.11}$$

Остаток от малых собственных значений не будет превосходить величину (5.II), т.к. и в случае свертки (5.6) действует плотностная теорема Иванца [6] по принципу § 3.

Еще один остаток в дисперсии (5.4) дает случай $n_1 = n_2$ , который приводит к величине порядка

$$x^{1+\varepsilon} . \tag{5.12}$$

Сравнивая величины (5.II) и (5.I2) мы видим, что при $k \geqslant 6$ величина (5.I2) имеет порядок, больший,либо равный (при $k = 6$ ) величине (5.II), что порождает асимптотику (0.6) с величиной $\delta$ из (0.7).

И наоборот, если $k = 4.5$ , тогда величина (5.II) превосходит (5.I2) по своему порядку, что порождает асимптотику (0.6) с величиной $\delta$ из (0.8).

Причем в техническом отношении случай $N = 1$ здесь существенно проще общего случая.

## Литература


1. Hooley C. An asymptotic formula in the theory of numbers. - Proc.London Math.Soc., 1957, vol.7, N 27,p.396-413.
2. Линник Ю.В. О некоторых аддитивных задачах. - Мат.сб., 1960, т.5I, № 2, с.I29-I54.
3. Selberg A. Discontinuous groups and harmonic analysis. - In: Proc.Intern.congr. of mathematicians, Stockholm, 1962. Djursholm, 1963, p.177-189.
4. Motohashi Y. On some additive divisor problems. - J.Math.Soc.Japan, 1976, vol.28, N 4, p.772-784.
5. Friedlander J.B., Iwaniec H. Incomplete

Kloosterman sums and divisor problem . - Ann.Math., 1985, vol.121, N 2, p.319-350.

6. I w a n i e c H. Character sums and small eigenvalues for $\Gamma_0(p)$ . - Glasgow Math.J., 1985, vol.27, p.99-166.
7. D e s h o u i l l e r s J.M., I w a n i e c H. Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. - Invent. math., 1982, vol.70, N 2, p.219-288.
8. К у з н е ц о в Н.В. Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна-Мааса. - В кн.: Автоморфные функции и теория чисел. I. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.129, с.43-84.
9. К у з н е ц о в Н.В. О среднем значении ряда Гекке параболической формы веса нуль. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 4. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1981, т.109, с.93-130.
10. H e a t h - B r o w n D.R. The divisor function in arithmetic progressions. - Acta arithm., 1986, vol.47, N 1, p.29-56.
11. M o r e n o C.J., S h a h i d i F. The L-functions $L(s, Sym^m(\tau), \pi)$ . - Can.Math.Bull., 1985, vol.28, N 4, p.405-410.