А. П. Раевская, А. Ю. Крылатов, Методы оценки матрицы корреспонденций в загруженных транспортных сетях,
Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2016, выпуск 1, 31–40

DOI: 10.5862/JCSTCS.236.4
УДК 51-74

А.П. Раевская, А.Ю. Крылатов

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ МАТРИЦЫ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ В ЗАГРУЖЕННЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ

A.P. Raevskaya, A.Yu. Krylatov

OD-MATRIX ESTIMATION FOR URBAN TRAFFIC AREA CONTROL

Статья посвящена вопросам оценки и восстановления матрицы корреспонденций (МК) в загруженных транспортных сетях. Проведен анализ зарубежной и отечественной литературы, выделены наиболее эффективные методы оптимального расположения датчиков регистрации номерных знаков транспортных средств на сети для получения наиболее полной информации, необходимой при восстановлении МК. С целью повышения эффективности метода, базирующегося на двухуровневой модели оценки МК, разработана оригинальная процедура оптимального расположения датчиков фиксации номерных знаков транспортных потоков на сети произвольной топологии, основанная на решении некоторой оптимизационной задачи. Разработанная процедура позволяет максимизировать вероятность фиксации наиболее значимых транспортных потоков на протяжении всего маршрута следования. Проведено имитационное моделирование с экспериментальными данными на транспортной сети Санкт-Петербурга.

МАТРИЦА КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ; ТРАНСПОРТНЫЕ ПОТОКИ; ДАТЧИКИ, СКАНИРУЮЩИЕ НОМЕРНЫЕ ЗНАКИ.

The paper is dedicated to the problem of OD-matrix estimation and reconstruction. The authors carried out a review of the literature of foreign and Russian authors on the subject of the estimation and reconstruction of a trip matrix. The most effective method of optimal plate scanning sensors location on the road network is noted. To improve this method, the new optimizational model is developed for the road network of general topology. The developed model allows to maximize the probability of fixation of the most significant traffic flows throughout the whole route. Simulation with experimental data is carried out on the transportation network of St. Petersburg.

TRIP MATRIX; OD-MATRIX; TRAFFIC FLOW; PLATE-SCANNING SENSORS.

Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций – крайне сложная и актуальная проблема в области транспортных исследований. Работа над ней ведется с 1960-х гг. Задача оценки и задача восстановления матрицы корреспонденций – это две совершенно разные задачи, и их решения могут сильно различаться [1]. Когда речь идет о восстановлении матрицы корреспонденций, предполагается наличие возможности однозначного определения межрайонных корреспонденций и их распределение по имеющимся маршрутам. Однако такая возможность существует не всегда, т. к. требует наблюдаемости всех элементов транспортной сети. На самом деле не все дуги и узлы являются наблюдаемыми; на ненаблюдаемых элементах потоки также необходимо оценивать. В таком случае встает задача оценки матрицы корреспонденций. В этом смысле наиболее наглядной моделью оценки матриц корреспонденций является гравитационная модель [2]. Авторами [3] предложен мощный метод Байеса решения задачи предсказания, оценки и восстановления матрицы корреспонденций.

Одна из первых моделей оценки матриц корреспонденций сформулирована как двухуровневая модель и разработана в конце XX в. [4]. Задача верхнего уровня заключается в нахождении целевой OD-матрицы по заданному набору наблюдаемых на дугах потоков, которая минимизировала бы функцию расстояния между априорными и наблюдаемыми потоками и априорной и наблюдаемой матрицей корреспонденций. При этом требованием нижнего уровня является такое распределение потоков по сети, которое удовлетворяет условию равновесия Вардропа.

В настоящее время в России широко внедряются различные системы мониторинга дорожного движения. Данные таких систем в принципе могут применяться для построения матриц корреспонденций между узлами улично-дорожной сети, использование которых в процессе математического моделирования транспортных потоков поможет повысить эффективность инфраструктурных преобразований транспортных систем [5, 6]. Несмотря на многочисленные публикации, проблема оценки и восстановления матрицы корреспонденций остается актуальной и требует дальнейшего научного исследования.

Стоит отметить статью [7], авторы которой предлагают минимизировать затраты на сбор данных при помощи комбинации информации, полученной со счетчиков автомобилей и с датчиков, сканирующих номерные знаки. В этом, в принципе, и состоит основная идея – использовать всевозможные данные для оценки потоков и матрицы корреспонденций. Но, к сожалению, не каждая модель может использовать все типы данных. Поэтому столь важным становится вопрос адекватной дезагрегации потоков. В статье [8] рассмотрен вопрос надежности установки датчиков на транспортной сети для фиксации транспортных потоков. Эвристический подход выбора местоположения для датчиков, фиксирующих транспортные потоки, предложен в [9].

В [10] произведен детальный сравнительный анализ трех методов оценки матрицы корреспонденций: метода линейного программирования, Байесовского подхода, метода изменяющейся во времени томографии сети. В связи с тем, что реальные размеры транспортных сетей очень велики, формулируются задачи минимизации количества датчиков, обеспечивающих достаточную наблюдаемость потоков на них [11, 12].

Следует еще раз особо отметить работу [7], в которой используется информация о номерных знаках, полученная с датчиков сканирования. Авторами предложен эффективный метод оценки матрицы корреспонденций. Однако вопрос оптимального расположения датчиков с точки зрения максимального покрытия основных транспортных потоков ими не рассматривается [13]. В то же время для эффективной работы предлагаемого метода требуется высококачественный сбор данных. В настоящей работе ставится задача устранить данный пробел и предложить модель расположения датчиков фиксации номерных знаков, обеспечивающую эффективное применение метода Кастилло [7].

Двухуровневая модель оценки матрицы корреспонденций

Будем рассматривать транспортную сеть, представленную графом $G = < N, A >$, где N – множество вершин, A – множество дуг, $\bar{A} \subset A$ – подмножество наблюдаемых дуг, на которых установлены датчики.

Будем считать, что $R \subset N$ – множество районов отправления, $r \in R$, а $S \subset N$ – множество районов прибытия, $s \in S; R \cap S = \varnothing$.

Введем следующие обозначения: K^{rs} – множество маршрутов из r в s; A_k – множество дуг, из которых состоит маршрут $k \in K^{rs}$, $A_k \subset A$; F^{rs} – транспортный спрос между районами отправления и прибытия r-s; $F = \{F^{rs}\}^{r,s}$; $\bar{F}^{rs}$ – априорный транспортный спрос (ранее оцененный) между районами отправления и прибытия *r-s*; $\overline{F} = \{\overline{F}^{rs}\}^{r,s}; f_k$ – поток по *k*-му маршруту, $k \in K^{rs}$, $f = \{f_k\}_{k \in K^{rs}}$; $\overline{f}_k$ – априорный поток по *k*-му маршруту, $k \in K^{rs}$, $\overline{f} = \{\overline{f}_k\}_{k \in K^{rs}}$; x_a – поток по дуге $a \in A, x = (..., x_a, ...)$; $\overline{x}_a$ – априорный поток по дуге $a \in A, \overline{x} = (..., \overline{x}_a, ...)$; $t_a(x_a)$ – время движения потока x_a по дуге $a \in A$; *U*, *V* – весовые матрицы; $\delta^{rs}_{a,k}$ – индикатор: единица, если дуга *a* содержится в пути $k \in K^{rs}$, ноль в противном случае.

Двухуровневая модель оценки матрицы корреспонденций получается из комбинации условия минимизации суммы квадратов между наблюдаемыми и оцениваемыми значениями транспортного спроса и потоками на дугах и условия конкурентного равновесия Вардропа [14, 15]:

$$\min_F Z(F, x) = \min_F (\overline{F} - F)^T V^{-1} (\overline{F} - F) + \\ + (\overline{x} - x)^T U^{-1} (\overline{x} - x),$$

где $x \geq 0$ и удовлетворяет условию конкурентного равновесия

$$\min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(x) dx$$

при

$$\sum_{k \in K^{rs}} f_k = F^{rs}, \; f_k \geq 0, \quad \forall k \in K^{rs},$$

где

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K^{rs}} f_k \delta^{rs}_{a,k}.$$

Целевой функционал верхнего уровня может быть интерпретирован как мера расстояния от оцениваемой матрицы корреспонденций *F* до ранее полученной $\overline{F}$ и от оцениваемого потока *x* до полученного со счетчиков $\overline{x}$. Следует отметить, что после того как датчики расставлены на сети, мы точно фиксируем потоки на соответствующих дугах, а на дугах без датчиков данные о потоках необходимо аппроксимировать. Второе слагаемое в целевой функции верхнего уровня имеет именно такой смысл.

Модель Кастилло оценки матрицы корреспонденций

Кастилло [7] модернизировал двухуровневую модель при помощи использования датчиков, сканирующих номерные знаки. Одно из введенных в его модели ограничений отменяет необходимость во втором слагаемом в целевом функционале верхнего уровня двухуровневой модели. Дополнительно им вводятся ограничения, связанные с датчиками сканирования номерных знаков. Рассмотрим модель, которая опирается на квадратичную целевую функцию с взвешенной суммой разницы между априорными и оцениваемыми потоками. Введем дополнительные обозначения: $v_k \in V$ – вес маршрута *k*; $\nu \in W$ – номер последовательности дуг с датчиками, сканирующими номерные знаки; $\eta^{rs}_{\nu k}$ – индикатор: единица, если путь *k* между районами отправления-прибытия *r-s* содержит все дуги из последовательности с номером ν, ноль – в противном случае; $\overline{w}_\nu$ – количество пользователей, зафиксированных на ν-й последовательности дуг. Таким образом, имеем

$$\min_f Z = \min_f \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k_1, k_2 \in K^{rs}} (f_{k_1} - \overline{f}_{k_1}) \times \\ \times v_k (f_{k_2} - \overline{f}_{k_2})$$

при условии

$$\overline{w}_\nu = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K^{rs}} f_k \eta^{rs}_{\nu k}, \forall \nu \in W, \qquad (1)$$

$$\overline{x}_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K^{rs}} f_k \delta^{rs}_{a,k}, \forall a \in \overline{A},$$

$$f_k \geq 0 \quad \forall k \in K^{rs}, \forall r, s.$$

Эффективность работы модели напрямую зависит от расположения датчиков, сканирующих номерные знаки транспортных средств, о чем свидетельствует ограничение (1). Значит, имеет смысл ставить вопрос об эффективном расположении датчиков для восстановления матрицы корреспонденций методом Кастилло.

Математическая модель расположения датчиков на транспортной сети с учетом многополосности для оценки матрицы корреспонденций

Рассмотрим вопрос оптимального расположения датчиков регистрации номерных знаков транспортных средств на многополосных транспортных сетях для эффективной реализации метода Кастилло.

Будем считать, что датчик может фиксировать данные об автомобилях, движущихся по той полосе, на которой он установлен. Введем дополнительные обозначения: q_a и c_a – количество датчиков и полос на дуге $a \in A$ соответственно; $q = (..., q_a, ...)$.

Поскольку датчик однозначно идентифицирует автомобиль лишь на одной из полос, а автомобили могут перестраиваться с одной полосы на другую (рис. 1), то вероятность того, что автомобиль будет зафиксирован на c_a-полосной дороге с q_a датчиками равна $\frac{q_a}{c_a}, \forall a \in A$. Задача состоит в том, чтобы максимизировать вероятность охвата максимального транспортного потока на всей сети.

Будем считать, что произвольные события фиксации номерного знака автомобиля на последовательности дуг независимы. В таком случае оптимизационный функционал представляет собой сумму произведений вероятностей фиксации автомобилей датчиками, сканирующими номерные знаки, на протяжении всего пути следования, которая домножена на априорные транспортные потоки по соответствующим маршрутам:

$$\max_q z(q) = \max_q \sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K^{rs}}\left(\prod_{a\in A_k}\frac{q_a}{c_a}\right)\bar{f}_k. \quad (2)$$

Таким образом мы максимизируем вероятность фиксации транспортных потоков на протяжении всего маршрута следования. При этом условие того, что хотя бы одна дуга на каждом пути является сканируемой, задается неравенством

$$\sum_{a\in A_k} q_a \geq 1, \ \forall k \in K^{rs}. \quad (3)$$

Существование как минимум одной сканируемой дуги, которая находится на пути k_1 и при этом не принадлежит пути k_2, гарантируется следующим ограничением:

$$\sum_{a\in A} q_a \delta_a^{k_1k_2} \geq 1, \ \forall k_1, k_2 \in K^{rs} : k_1 \neq k_2 \quad (4)$$

$$\delta_a^{k_1k_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in k_1, a \notin k_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Введем бюджетное ограничение, где Q – доступное количество детекторов:

$$\sum_{a\in A} q_a \leq Q. \quad (6)$$

Количество датчиков на дуге не должно

Рис. 1. Маршрут, состоящий из многополосных дуг

превышать количества полос:

$$0 \le q_a \le c_a, \ \forall a \in A. \tag{7}$$

Таким образом, мы сформулировали задачу целочисленного программирования на ограниченном множестве решений. Следовательно, решение у данной задачи существует, когда множество допустимых решений не пусто. Множество допустимых решений сформулированной оптимизационной программы может оказаться пустым при слишком сильных бюджетных ограничениях, когда количество датчиков недостаточно для охвата сети. Для решения этой проблемы необходимо либо увеличить бюджет, либо сократить количество второстепенных маршрутов, потоки по которым незначительны.

Эксперимент на транспортной сети Санкт-Петербурга

Рассмотрим многополосную транспортную сеть центральной части Санкт-Петербурга. Выберем девять районов отправления и прибытия (рис. 2), зададим девять маршрутов между районами отправления и прибытия и разделим все маршруты на дуги, которых всего на транспортной сети получится 21 (рис. 3).

Зададим количество полос c_a на каждой из дуг. Присвоим произвольным образом каждой из дуг значение от 1 до 3 – количество полос в одном из направлений дуги. Аналогичным образом зададим априорные потоки $\bar{f}_k$ по маршрутам. Затем рассчитаем оптимальное количество и местоположение датчиков для различных значений бюджетных ограничений от нуля до 50.

Реализацию данной модели произведем в программной среде MatLab. Перед нами стоит оптимизационная задача с нелинейным функционалом и линейными ограничениями. Такого рода задачи в программной среде MatLab решаются при помощи пакета Optimisation Toolbox. Используем функцию *fmincon* поиска минимума не-

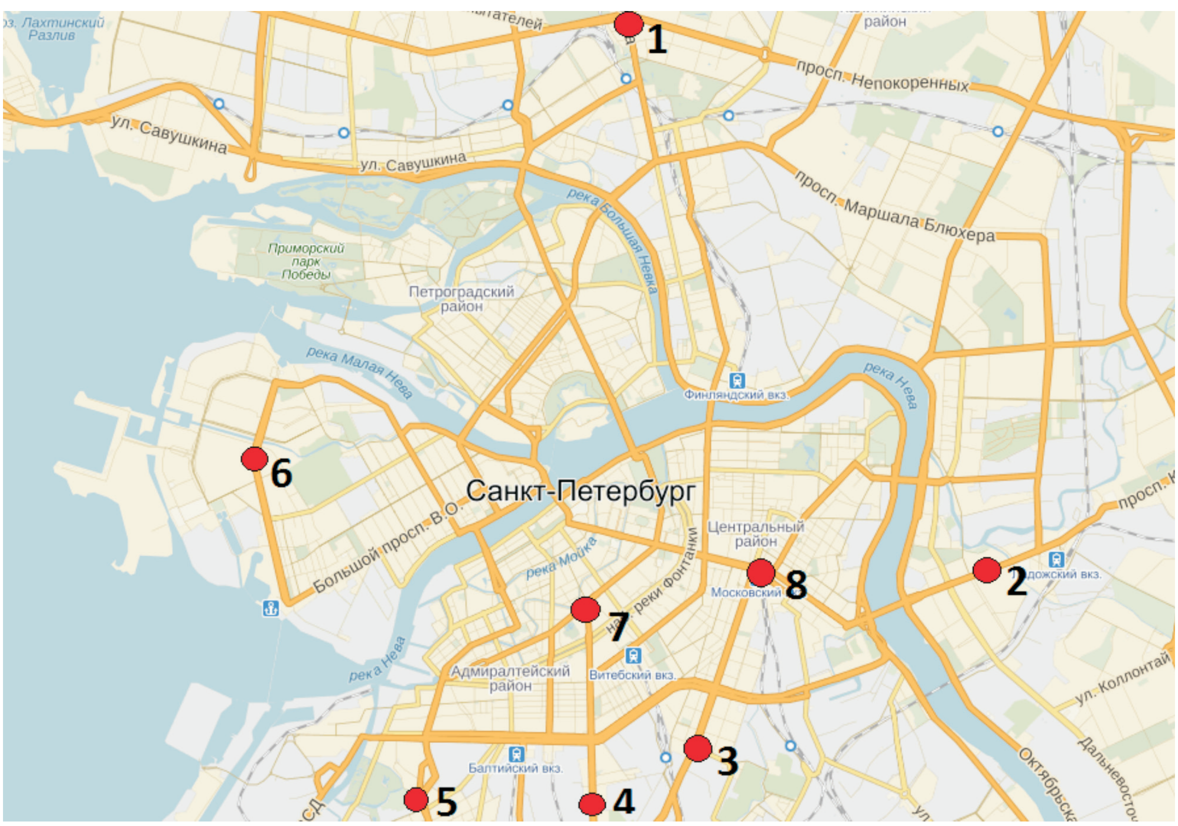

Рис. 2. Выбор районов отправления и прибытия

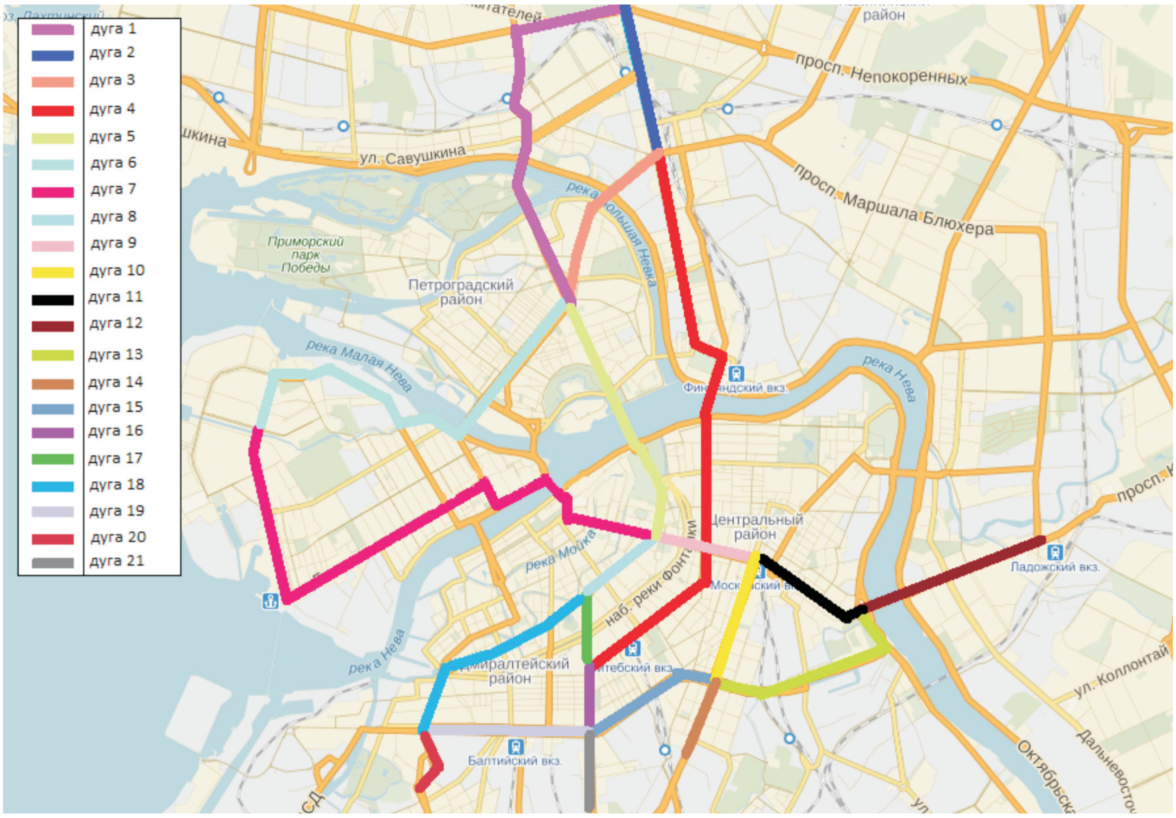

Рис. 3. Дуги, составляющие маршруты

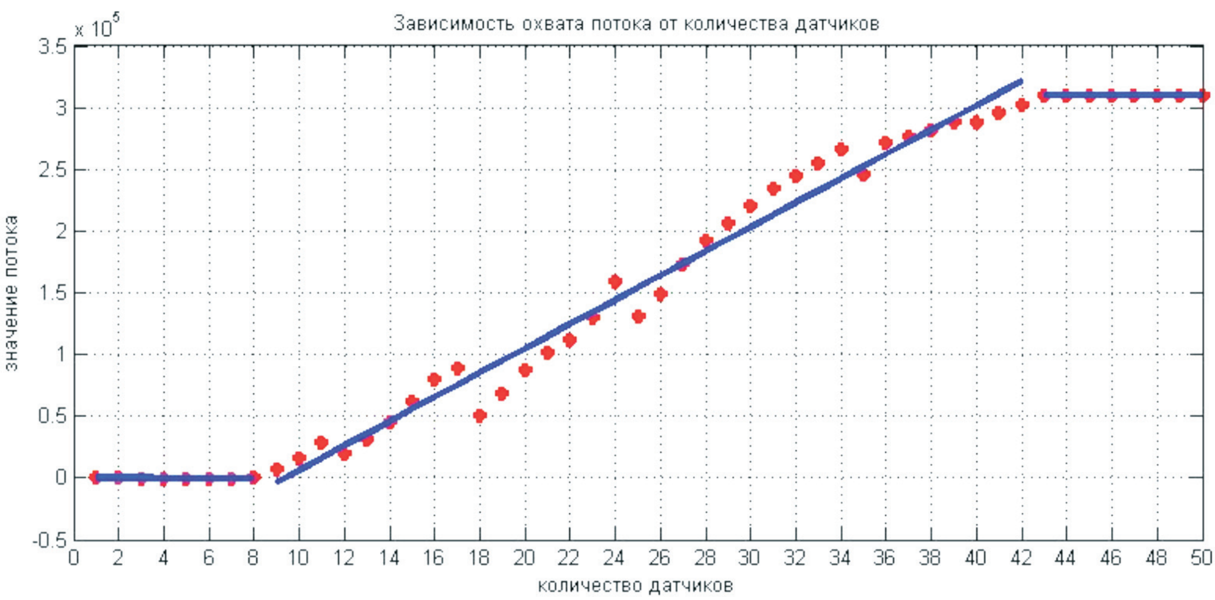

Рис. 4. Аппроксимирующая прямая зависимости значения потоков от количества датчиков на сети

линейной функции с ограничениями, которая решает задачу на основе алгоритма SQP (последовательного квадратичного программирования). На графике (рис. 4) показано, как изменяются потоки на каждом из маршрутов в зависимости от количества датчиков. По горизонтали указано количество датчиков, по вертикали — значения потоков.

Рассмотрено решение задачи для разных комбинаций ограничений:

- отдельно для бюджетного (6);
- для бюджетного (6) и для ограничения (3);
- для всех ограничений (3)—(7).

Благодаря такому разбиению можно произвести анализ чувствительности разработанной модели. Из полученных данных видно, что значение общего наблюдаемого потока в зависимости от количества датчиков на рассматриваемой транспортной сети при разных видах ограничений практически не меняется. В связи с этим был проведен анализ изменения потоков по каждому из маршрутов в зависимости от количества датчиков на сети и различных комбинаций ограничений. Такой анализ показал, что в первую очередь начинают наблюдаться маршруты, по которым проходят значительные потоки и при этом составляющее их число дуг наименьшее. Как видим (рис. 5), при увеличении количества ограничений большие потоки на маршрутах с большим количеством датчиков начинают фиксироваться значительно позднее.

Практическое применение разработанной модели

Модель, описанная в статье, является статической. Как правило, в статических моделях рассматривается средний поток пользователей и усредненные характеристики движения. При реализации данной модели на практике следует учитывать, что величины потоков изменяются в зависимости от времени суток, времени года и других внешних факторов. Поэтому при расстановке датчиков следует ориентироваться именно на величины потоков в «часы пик», поскольку, удовлетворив спрос в самые загруженные часы для самых больших потоков, в остальные часы сеть точно будет удовлетворять спросу на перемещения. Ситуация на дорогах очень зависит от времени года и погодных условий, которые тяжело предсказать. Поэтому необходимо в течение первого апробационного периода длительностью год накопить статистические данные, позволяющие учитывать сезонные изменения

Количество датчиков на сети	Доля наблюдаемого потока f(1). Поток = 47516. Дуги = 7. Полосы = 15. Бюджетное ограничение.	Доля наблюдаемого потока f(1). Поток = 47516. Дуги = 7. Полосы = 15. Два ограничения.	Доля наблюдаемого потока f(1). Поток = 47516. Дуги = 7. Полосы = 15. Все ограничения.
5	0	0	0
10	0	0	0
15	1,00	0	0
20	1,00	1,00	0
25	1,00	1,00	1,00
30	1,00	1,00	1,00
35	1,00	1,00	1,00
40	1,00	1,00	1,00
45	1,00	1,00	1,00
50	1,00	1,00	1,00

Рис. 5. Фиксация потоков в зависимости от ограничений

в модели. Благодаря тому, что предполагается использование мобильных датчиков, которые можно легко перемещать, можно производить калибровку модели, меняя местоположения датчиков и анализируя полученные результаты.

Статья посвящена проблеме оптимального расположения датчиков фиксации номерных знаков транспортных потоков на сети с целью сбора информации для восстановления матрицы корреспонденций. В качестве метода восстановления матриц корреспонденций выбран метод Кастилло, базирующийся на классическом двухуровневом методе. С целью повышения эффективности метода оценки матрицы корреспонденций при помощи фиксации номерных знаков, предложенного Кастилло, получены следующие теоретические и практические результаты:

разработана детерминированная модель оптимального расположения датчиков фиксации номерных знаков транспортных потоков на сети произвольной топологии;

разработан алгоритм решения детерминированной задачи расположения датчиков;

реализован алгоритм решения детерминированной задачи расположения датчиков на примере транспортной сети Санкт-Петербурга в программной среде MatLab.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hazelton M.** Inference for origin-destination matrices: estimation, prediction and reconstruction // Transportation Research. Part B. 2001. No. 35. Pp. 667–676.

2. **Швецов В.И.** Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3–46.

3. **Ehlert A., Bell M., Grosso S.** The optimisation of traffic count locations in road networks // Transportation Research. Part B. 2006. No. 40. Pp. 460–479.

4. **Yang H., Sasaki T., Iida Y., Asakura Y.** Estimation of origin-destination matrices from link traffic counts on congested networks // Transportation Research. Part B. 1992. No. 26(6). Pp. 417–434.

5. **Захаров В.В., Крылатов А.Ю.** Современные проблемы использования интеллектуальной базы математического моделирования при борьбе с заторами в крупных городах России // Транспорт Российской Федерации. 2014. № 4(53). С. 69–73.

6. **Захаров В.В., Крылатов А.Ю.** Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. № 4. С. 23–44.

7. **Castillo E., Menedez J.M., Jimenez P.** Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations // Transportation Research. Part B. 2008. No. 42. Pp. 455–481.

8. **Li X., Ouyang Y.** Reliable sensor deployment for network traffic surveillance // Transportation Research. Part B. 2011. No. 45. Pp. 218–231.

9. **Yim P., Lam W.** Evaluation of count location selection of OD matrices // J. of Transport Engineering. 1998. Pp. 376–383.

10. **Medina A., Taft N., Salamatian K., Bhattacharyya S., Diot C.** Traffic matrix estimation: existing techniques and new directions // Computer Communication Review. Proc. of the SIGCOMM Conf. 2002. No. 32. Pp. 161–174.

11. **Bianco L., Cerrone C., Cerulli R., Gentili M.** Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches // Computers and Operation Research. 2014. No. 46. Pp. 12–22.

12. **Minguez R., Sanchez-Cambronero S., Castillo E., Jimenez P.** Optimal traffic plate scanning location for OD trip matrix and route estimation in road networks // Transportation Research. Part B. 2010. No. 44. Pp. 282–298.

13. **Крылатов А.Ю., Раевская А.П.** Оптимальное расположение датчиков на транспортной сети для оценки матрицы корреспонденций // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 18. С. 629–634.

14. **Захаров В.В., Крылатов А.Ю.** Конкурентная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации // Управление большими системами: Сб. трудов. 2014. № 49. С. 129-147.

15. **Захаров В.В., Крылатов А.Ю.** Конкурентное равновесие Вардропа на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 17. С. 476–481.

REFERENCES

1. **Hazelton M.** Inference for origin-destination matrices: estimation, prediction and reconstruction. *Transportation Research, Part B*, 2001, No. 35, Pp. 667–676.

2. **Shvetsov V.I.** Matematicheskoye modelirovaniye transportnykh potokov [Mathematical Modeling of Traffic Flows]. *Avtomatika i telemekhanika* [*Automation and Remote Control*], 2003, Vol. 11, Pp. 3–46. (rus)

3. **Ehlert A., Bell M., Grosso S.** The optimisation of traffic count locations in road networks. *Transportation Research, Part B,* 2006, No. 40, Pp. 460–479.

4. **Yang H., Sasaki T., Iida Y., Asakura Y.** Estimation of origin-destination matrices from link traffic counts on congested networks. *Transportation Research, Part B*, 1992, No. 26(6), Pp. 417–434.

5. **Zakharov V.V., Krylatov A.Yu.** Sovremennyye problemy ispolzovaniya intellektualnoy bazy matematicheskogo modelirovaniya pri borbe s zatorami v krupnykh gorodakh Rossii [Current problems in using simulation-analysis intellectual database in the fight against traffic jams in Russia's major cities]. *Transport Rossiyskoy Federatsii* [*Transport of the Russian Federation*], 2014, No. 4(53), Pp. 69–73. (rus)

6. **Zakharov V.V., Krylatov A.Yu.** Sistemnoye ravnovesiye transportnykh potokov v megapolise i strategii navigatorov: teoretiko-igrovoy podkhod [Traffic flows' system equilibrium in megapolis and navigators' strategies: game theory approach]. *Matematicheskaya teoriya igr i yeye prilozheniya* [*Automation and Remote Control*], 2012, Vol. 4, No. 4, Pp. 23–44. (rus)

7. **Castillo E., Menedez J.M., Jimenez P.** Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations. *Transportation Research, Part B*, 2008, No. 42, Pp. 455–481.

8. **Li X., Ouyang Y.** Reliable sensor deployment for network traffic surveillance. *Transportation Research, Part B*, 2011, No. 45, Pp. 218–231.

9. **Yim P., Lam W.** Evaluation of count location selection of OD matrices. *Journal of transport engineering*, 1998, Pp. 376–383.

10. **Medina A., Taft N., Salamatian K., Bhattacharyya S., Diot C.** Traffic matrix estimation: existing techniques and new directions. *Computer Communication Review, Proceedings of the SIGCOMM Conference*, 2002, No. 32, Pp. 161–174.

11. **Bianco L., Cerrone C., Cerulli R., Gentili M.** Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches. *Computers and Operation Research*, 2014, No. 46, Pp. 12–22.

12. **Minguez R., Sanchez-Cambronero S., Castillo E., Jimenez P.** Optimal traffic plate scanning location for OD trip matrix and route estimation in road networks. *Transportation Research, Part B*, 2010, No. 44, Pp. 282–298.

13. **Krylatov A.Yu., Rayevskaya A.P.** Optimalnoye raspolozheniye datchikov na transportnoy seti dlya otsenki matritsy korrespondentsiy [Optimal traffic plate scanning location for trip matrix estimation on the road networks]. *Protsessy upravleniya i ustoychivost* [*Control Processes and Stability*], 2015, Vol. 2, No. 18, Pp. 629–634. (rus)

14. **Zakharov V.V., Krylatov A.Yu.** Konkurentnaya marshrutizatsiya transportnykh potokov postavshchikami uslug navigatsii [Competitive routing of traffic navigation systems]. *Upravleniye bolshimi sistemami* [*Control of large systems*], 2014, No. 49, Pp. 129–147. (rus)

15. **Zakharov V.V., Krylatov A.Yu.** Konkurentnoye ravnovesiye Vardropa na transportnoy seti iz parallelnykh neodnorodnykh marshrutov [Wardrop user equilibrium on the transportation network of parallel inhomogeneous]. *Protsessy upravleniya i ustoychivost* [*Control Processes and Stability*], 2014, Vol. 1, No. 17, Pp. 476–481. (rus)

РАЕВСКАЯ Анастасия Павловна – *студентка кафедры моделирования энергетических систем факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.*

199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9.

E-mail: a.p.raevskaya@yandex.ru

RAEVSKAYA Anastasiya P. *St. Petersburg State University.*

199034, Universitetskaya emb., 7-9, St. Petersburg, Russia.

E-mail: a.p.raevskaya@yandex.ru

КРЫЛАТОВ Александр Юрьевич – *ассистент кафедры моделирования энергетических систем факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета, кандидат физико-математических наук.*
199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9.
E-mail: aykrylatov@yandex.ru

KRYLATOV Alexander Yu. *St. Petersburg State University.*
199034, Universitetskaya emb., 7-9, St. Petersburg, Russia.
E-mail: aykrylatov@yandex.ru