Е. В. Ерофеева, Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения,
Матем. моделирование и краев. задачи, 2008, часть 3, 93–97

https://www.mathnet.ru/mmkz1122

УДК 517.95

И. Е. Егоров

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Известно, что теория сингулярных и вырождающихся уравнений породила общирную литературу [1, 3]. Рассматривается общая краевая задача на полуоси для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка с оператором Бесселя. Постановка краевой задачи включает весовые граничные условия. Отметим, что А. В. Бицадзе в монографии [1] сформулировал проблему постановки общих весовых граничных условий для вырождающихся дифференциальных уравнений. Доказываются теоремы единственности и существования решений краевой задачи в классе функций быстроубывающих на бесконечности.

1. *Бицадзе, А. В.* Уравнения смешанного типа [Текст] / А. В. Бицадзе. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 400 с.
2. *Катрахов, В. В.* Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнеений [Текст] / В. В. Катрахов // Математический сборник. — 1980. — Т. 112, № 3. — С. 354–379.
3. *Егоров, И. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка [Текст] / И. Е. Егоров, В. Е. Фёдоров. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. — 133 с.

ФГНУ НИИ математики при ЯГУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск

niipmi@sitc.ru

УДК 517.95

Е. В. Ерофеева

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ рассмотрим линейное гиперболическое уравнение:

$$Lu = u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = f(x, y), \qquad (1)$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $f(x, y)$ — заданные функции в области D.

Поставим следующую задачу.

Задача. Найти в D решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим интегральным условиям:

$$u(x, 0) = \int_0^b K(y)u(x, y)dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{2}$$

$$u(0, y) = \int_0^a H(x)u(x, y)dx, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{3}$$

где функции $H(x)$, $K(y)$ заданы в $\overline{D}$.

В работе [1] рассматривалась нелокальная задача для уравнения (1) с интегральными условиями в виде:

$$\int_0^\alpha u(x, y)dx = \psi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

$$\int_0^\beta u(x, y)dy = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — заданные функции, $0 < \alpha \leqslant a$, $0 < \beta \leqslant b$.

Теорема. *Если функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $f(x, y) \in \in C(\overline{D})$, $H(x) \in C[0, a]$, $K(y) \in C[0, b]$,*

$$\int_0^b K(y)R(x, 0; x, y)dy \neq 1 \quad \forall x \in [0, a],$$

$$\int_0^a H(x)R(0, y; x, y)dx \neq 1 \quad \forall y \in [0, b],$$

где $R(x, y; x, y)$ — функция Римана для уравнения (1), то существует решение задачи (1)–(3), принадлежащее $C(D)$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим сначала вспомогательную задачу Гурса. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{4}$$

$$u(0,\,y) = \psi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{5}$$

Решение задачи Гурса [3] определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} u(x,\,y) = \varphi(x)R(x,\,0;\;x,\,y)&+ \\ +\,\psi(y)R(0,\,y;\,x,\,y) &- \varphi(0)R(0,\,0;\;x,\,y)+ \\ +\int\limits_0^x \varphi(\xi)\big[B(\xi,\,0)R(\xi,\,0;\;x,\,y) &- R_\xi(\xi,\,0;\;x,\,y)\big]d\xi+ \\ +\int\limits_0^y \psi(\eta)\big[A(0,\,\eta)R(0,\,\eta;\;x,\,y) &- R_\eta(0,\,\eta;\;x,\,y)\big]d\eta+ \\ &+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(x,\,y)R(\xi,\,\eta;\;x,\,y)d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ нам неизвестны, выясним, можно ли найти их так, чтобы решение задачи Гурса удовлетворяло интегральным условиям (2) и (3). Для этого к (6) применим (2) и (3). Будем считать, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Проделав ряд преобразований, получим систему двух интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $\varphi(x)$, $\psi(y)$:

$$\begin{cases} \varphi(x) - \displaystyle\int\limits_0^x M(\xi,\,x)\varphi(\xi)d\xi - \int\limits_0^b N(\eta,\,x)\psi(\eta)d\eta = \sigma(x), \\ \psi(y) - \displaystyle\int\limits_0^y P(\eta,\,y)\psi(\eta)d\eta - \int\limits_0^a S(\xi,\,y)\varphi(\xi)d\xi = \omega(y), \end{cases} \tag{7}$$

где

$$M(\xi,\,x)=\frac{\int\limits_0^b K(y)\big[B(\xi,\,0)R(\xi,\,0;\;x,\,y)-R_\xi(\xi,\,0;\;x,\,y)\big]dy}{1-\int\limits_0^b K(y)R(x,\,0;\;x,\,y)dy},$$

$$N(\eta,\,x)=\Bigg(K(\eta)R(0,\,\eta;\;x,\,y)+\int\limits_\eta^b K(y)\big[A(0,\,\eta)R(0,\,\eta;\;x,\,y)-$$

$$-R_\eta(0,\,\eta;\;x,\,y)\big]dy\Bigg)\Bigg(1-\int\limits_0^b K(y)R(x,\,0;\;x,\,y)dy\Bigg)^{-1},$$

$$\sigma(x)=\frac{\int\limits_0^b K(y)\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(\xi,\,\eta)R(\xi,\,\eta;\;x,\,y)d\xi d\eta dy}{1-\int\limits_0^b K(y)R(x,\,0;\;x,\,y)dy},$$

$$P(\eta,\,y)=\frac{\int\limits_0^a H(x)\big[A(0,\,\eta)R(0,\,\eta;\;x,\,y)-R_\eta(0,\,\eta;\;x,\,y)\big]dx}{1-\int\limits_0^a H(x)R(0,\,y;\;x,\,y)dx},$$

$$S(\xi,\,y)=\Bigg(H(\xi)R(\xi,\,0;\;x,\,y)+\int\limits_\xi^a H(x)\big[B(\xi,\,0)R(\xi,\,0;\;x,\,y)-$$

$$-R_\xi(\xi,\,0;\;x,\,y)\big]dx\Bigg)\Bigg(1-\int\limits_0^a H(x)R(0,\,y;\;x,\,y)dx\Bigg)^{-1},$$

$$\omega(y) = \frac{\int\limits_0^a H(x) \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(\xi,\, \eta) R(\xi,\, \eta;\; x,\, y) d\xi d\eta dx}{1 - \int\limits_0^a H(x) R(0,\, y;\; x,\, y) dx}.$$

В силу условий теоремы ядра и свободные члены системы уравнений (7) непрерывны в $\overline{D}$ и следовательно ограничены в D. Если к тому же $H(x)$ и $K(y)$ таковы, что

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^a |M(\xi,\, x)|^2 \, d\xi dx < 1, \quad \int\limits_0^a \int\limits_0^b |N(\eta,\, x)|^2 \, d\eta dx < 1,$$

$$\int\limits_0^b \int\limits_0^b |P(\eta,\, y)|^2 \, d\eta dy < 1, \quad \int\limits_0^b \int\limits_0^a |S(\xi,\, y)|^2 \, d\xi dy < 1,$$

тогда [2] существует единственное решение системы (7). □

1. *Голубева, Н. Д.* Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями [Текст] / Н. Д. Голубева, Л. С. Пулькина // Мат. заметки. — Т. 59, № 3. — С. 456–458.
2. *Михлин, С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям [Текст] / С. Г. Михлин. — М.: Физматгиз, 1959. — 232 с.
3. *Соболев, С. Л.* Уравнения математической физики [Текст]: учеб. для мех.-мат. фак. ун-тов. / С. Л. Соболев; 4-е изд. — М.: Наука, 1966. — 443 с.

Самарский государственный педагогический университет, г. Самара

ekatusha@mail.ru