Н.А.Широков

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КОНТИНУУМА

I. Существо вопроса. Пусть D – некоторый плоский континуум, $H_\alpha(D)$, $0<\alpha<1$, – пространство функций, аналитичных в D° и удовлетворяющих в D условию Гельдера порядка α. Сколько требуется полиномов для описания $H_\alpha(D)$ в каких-нибудь аппроксимативных терминах? Доказательства теорем Н.А.Лебедева – П.М.Тамразова [I] и В.И.Белого [2] дают следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть D – жорданова область с квазиконформной границей [3], $0<\alpha<1$, $q>1$. Тогда функция принадлежит классу $H_\alpha(D)$ в том и только в том случае, когда найдется последовательность полиномов P_n, $\deg P_n=[q^n]$, для которых

$$|f(z)-P_n(z)|\leq C_f\gamma_n(z),\quad z\in\partial D, \tag{I}$$

где $\gamma_n(z)=\rho^\alpha_{q^{-n}(z)}$, $\rho_h(z)$ – расстояние от z до линии уровня $(\partial D)_{1+h}$ [4],[5], постоянная C_f не зависит от n и z.

Таким образом, при выборе скорости приближения функций полиномами, как в (I), идущем от В.К.Дзядыка [4],[5], для описания пространства $H_\alpha(D)$ в области D с квазиконформной границей, достаточно взять линейные пространства полиномов, размерности которых образуют геометрическую прогрессию. Однако, существуют жордановы области D с радоновскими границами [6], в которых старое описание (I) пространства $H_\alpha(D)$ в терминах $\rho^\alpha_h(z)$ невозможно.

С другой стороны, переформулировка определения приводит к описанию $H_\alpha(D)$ при любом континууме D в терминах приближения функций из $H_\alpha(D)$, как в (I), полиномами нулевой степени с некоторым набором $\gamma_n(z)$ [7]. Поэтому естественен вопрос о выборе γ_n, при котором требовалось бы в нетавтологическом смысле возможно минимальное количество линейных пространств полиномов при описании $H_\alpha(D)$, построенному по типу (I). Точной формулировке этого вопроса и изучению его для одного специального континуума, аппроксимативные свойства гельдеровских пространств для которого отличаются от таковых для областей с квазиконформной границей, посвящена данная работа.

2. Определение изучаемых объектов. Введем употребляемые далее обозначения и те объекты, которые будем изучать. Континуум S образован отрезками $[-1,0]$ и $[0,e^{-i\beta\pi}]$, $0<\beta<1$;

16 871

$m=\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность чисел, $m_n \geq 0$, $\gamma_n(x)>0$ – непрерывные функции, определенные при $x \in S$, $\gamma=\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. С парой (γ, m) свяжем банахово пространство $\Pi(\gamma, m)$ функций f, определенных на S, следующим образом:

$\Pi(\gamma,m)=\{f: \forall n \in \mathbb{N} \ \exists$ полином P_n, $\deg P_n \leq m_n$, для которого $|f(x)-P_n(x)| \leq C_f \gamma_n(x), \ x \in S\}$.

Норма в $\Pi(\gamma, m)$ задается так:

$$\|f\|_{(\gamma,m)} \overset{def}{=} \|f\|_{L^\infty(S)} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{P_n:\deg P_n \leq m_n} \sup_{x \in S} \frac{|f(x)-P_n(x)|}{\gamma_n(x)}.$$

Функция φ конформно отображает $\mathbb{C} \setminus S$ на $\mathbb{C} \setminus U$, U – единичный круг, $\varphi(\infty)=\infty$, $\varphi(e^{-i\frac{\beta+1}{2}\pi}0)=1$, ψ – обратное к φ отображение, $S_h=\psi(\{t: |t|=1+h\})$, $h>0$, $\rho_h(z) \overset{def}{=} \operatorname{dist}(z, S_h)$.

Введем ограничения на изучаемые пары (γ, m): $\mathcal{G}_d^*(c)$, $c>0$, есть совокупность пар (γ, m), удовлетворяющих условиям:

$$|\gamma_n(x)-\gamma_n(y)| \leq c|x-y|^d, \quad x, y \in S, \tag{2}$$

$$\gamma_n(x) \geq \rho^d_{\frac{1}{m_n+1}}(m), \quad x \in S. \tag{3}$$

Наконец, основная для нас совокупность $\tilde{\mathcal{G}}_d^*(c) \subset \mathcal{G}_d^*(c)$ удовлетворяет также условию

$$H_d(S)=\Pi(\gamma, m). \tag{4}$$

Для совокупности (γ_0, m_0), $\gamma_0=\left\{\rho^d_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $m_0=\{n\}_{n=1}^{\infty}$, рассматривавшейся ранее во всех работах о приближении функций $H_d(D)$ в комплексной области, соотношения (2) и (3), конечно, справедливы, а вместо (4) имеется включение $\Pi(\gamma_0, m_0) \subsetneqq H_d(S)$ [7].

Пусть теперь $(\gamma, m) \in \tilde{\mathcal{G}}_d^*(c)$ и

$$V_{(\gamma,m)}: H_d(S) \to \Pi(\gamma, m)$$

есть оператор вложения, непрерывный по теореме о замкнутом графике. Положим

$$\|(\gamma,m)\|_d \overset{def}{=} \|V_{(\gamma,m)}\|_{H_d(S) \to \Pi(\gamma,m)}$$

и определим некоторую аппроксимативную характеристику простран-

ства $H_\alpha(S)$. Именно,

$$\tau_m(k) \overset{def}{=} card(n : m_n \le k), \quad m = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$$

и, наконец,

$$\overset{*}{Э}_\alpha(C,T) = \overset{*}{Э}_\alpha(S;C,T) \overset{def}{=} \inf_{\substack{(\gamma,m)\in \tilde{\mathcal{G}}^*_\alpha(C) \\ \|(\gamma,m)\|_\alpha \le T}} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log \tau_m(k)}{\log k}. \tag{5}$$

Величина $\overset{*}{Э}_\alpha(S;C,T)$ показывает, "сколько нужно" полиномов для описания $H_\alpha(S)$, если термины, в которых ищется описание, довольно широко варьируются. Аналогично (5) можно ввести величину $\overset{*}{Э}_\alpha(D;C;T)$ для любого континуума D, и тогда из теоремы, цитированной в пункте I, будет следовать, что для жордановых областей D с квазиконформной границей при $T \geqslant T(D)$ и любом C $\overset{*}{Э}_\alpha(D;C,T)=0$. Для континуума S ситуация другая.

3. Формулировка результата.

ТЕОРЕМА. Пусть $0<\alpha<1$. Тогда $\overset{*}{Э}_\alpha(S;C;T)>0$ при любых $C>0$ и $T>0$.

Перед доказательством дополним список обозначений. ∂U^+ и ∂U^- есть части ∂U, на которые она разбивается точками $\varphi(1)$ и $\varphi(e^{-i\beta\pi})$, причем $1\in\partial U^+$. Для всякой точки $x\in S$, $x\ne 1, e^{-i\beta\pi}$, через $\varphi^+(x)$ обозначим точку $t^+\in\partial U^+$, $\psi(t^+)\le x$, а через $\varphi^-(x)$ точку $t^-\in\partial U^-$, $\psi(t^-)=x$. Для $h>0$ положим [6]

$$\overset{*}{\rho}_h(z) = \max\Big[dist(z,\psi(\{t:|t|=1+h, \tfrac{t}{|t|}\in\partial U^+\}),$$

$$dist(z,\psi(\{t:|t|=1+h, \tfrac{t}{|t|}\in\partial U^-\})\Big].$$

Для дуги $I\subset S$ через $\overset{*}{n}(I)$ обозначаем такое натуральное число, что

$$\frac{1}{\overset{*}{n}(I)+1} < |\varphi^+(I)| \le \frac{1}{\overset{*}{n}(I)},$$

$|\ell|$ – длина дуги ℓ, $\varphi^+(I)=\{x\in\partial U : x=\varphi^+(z),\ z\in I\}$. $\overset{*}{Z}(I)=\overset{*}{Z}(I,m)\subset\mathbb{N}$ есть множество тех чисел k, для которых $m_k\le \overset{*}{n}(I)$, $m=\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Если $J\subset I\subset S$, то $\overset{*}{n}(J)\ge n(I)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть дуга $I\subset S$, $(\gamma,m)\in\mathcal{G}^*_\alpha(C)$.

Положим

$$\sigma(I,\gamma)=\inf_{k\in Z^*(I)}\ \sup_{x\in I}\frac{\gamma_k(x)}{|I|^{\alpha}},\quad \sigma(\gamma)=\inf_{I\subset S}\sigma(I,\gamma).$$

Для пары (γ_0,m_0) значение $\sigma(\gamma_0)=0$.

В следующем пункте приведено доказательство теоремы. Некоторые леммы будут доказаны конспективно, поскольку сходные рассуждения уже имеются в других работах, цитируемых после номера леммы. Знак ● говорит о конце соответствующего рассуждения; $C_k(\beta)$ означает постоянную, зависящую только от β , входящего в определение S .

4. Доказательство. Идейная основа доказательства состоит в выведении из предположения $\mathcal{E}^*_\alpha(C,T)=0$ некоторой количественной альтернативы, одно утверждение которой влечет $H_\alpha(S)\supsetneqq\Pi(\gamma,m)$, а другое $\Pi(\gamma,m)\supsetneqq H_\alpha(S)$.

ЛЕММА I ([8],[9]). Пусть $(\gamma,m)\in\tilde{\mathcal{G}}^*_\alpha(C)$, $\|(\gamma,m)\|_\alpha\leq T$. Тогда $\sigma(\gamma)\geq\sigma_1=\frac{1}{T}e^{-C_0(\beta)(C+1)^{\frac{2\alpha}{\beta}}}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторую функцию $f\in H_\alpha(S)$, $\|f\|_{H_\alpha(S)}=1$. Если мы предположим утверждение леммы не справедливым, то найдутся полином $Q(z)$ и точки $z_1,z_2\in S$, заключающие дугу I , для которых $\deg Q\leq n^*(I)$ и

$$|f(x)-Q(x)|\leq\sigma_1 T|I|^{\alpha},\ x\in I,$$

где $\sigma_1=\frac{1}{T}\exp(-C_0(\beta)(C+1)^{\frac{2\alpha}{\beta}})$ – некоторое явно указываемое число (мы его не приводим). Кроме того, найдутся полиномы P_n , $\deg P_n\leq n$, со свойствами [10]:

$$|f(x)-P_n(x)|\leq C_1(\beta)\rho^{*\alpha}_{\frac{1}{n}}(x),\ x\in S.$$

Область L является образом при отображении ψ части кругового кольца, заключенного между окружностями $\left\{t:|t|=1+\frac{1}{|\log\sigma_1|^{\frac{1}{2}}n^*(I)}\right\}$ и $\left\{t:|t|=1+\frac{1}{|\log\sigma_1|n^*(I)}\right\}$ и лучами

$$\left\{t:\arg t=\tfrac{1}{2}\arg\varphi^+(z_1)+\tfrac{1}{2}\arg\varphi^+(z_2)-\frac{\theta}{|\log\sigma_1|^{1/4}}\right\}$$

$$\left\{t:\arg t=\tfrac{1}{2}\arg\varphi^+(z_1)+\tfrac{1}{2}\arg\varphi^+(z_2)+\frac{\theta}{|\log\sigma_1|^{1/4}}\right\},$$

$$\theta = |\varphi^+(z_2) - \varphi^+(z_1)| .$$

Множество $S_n = \psi(\{t : 1 + 2^{-n-1} < |t| \le 1 + 2^{-n}\})$. Определим функции f_0 и f_1 :

$$f_0(z) = \begin{cases} P_{2^n}(z), & z \in S_n \setminus L, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ Q, & z \in L \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus S_1 \end{cases}$$

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi d^2(z)} \int\limits_{\{\zeta : |\zeta - z| < d(z)\}} f_0(\zeta)\, d\sigma_\zeta ,$$

$$d(z) = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z, S) .$$

Формула Грина дает

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial f_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta - z} , \tag{5}$$

а производную $\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}}$ можно оценить так:

$$\left| \frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} \right| \le C_2(\beta) \begin{cases} \operatorname{dist}^{\alpha - 1}(z, S), & -\pi < \arg z < \beta, \ z \notin L \\ \operatorname{dist}^{\alpha\beta - 1}(z, S), & \beta < \arg z < \pi, \ z \notin L . \end{cases} \tag{6}$$

Если же $\zeta \in L$, то

$$\left| \frac{\partial f_1(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \le C_3(\beta) \frac{c + 1}{|\log \sigma_1 T|^{\frac{\beta}{10}}} \operatorname{dist}^{\alpha - 1}(\zeta, S) . \tag{7}$$

Рассмотрим затем точки

$$\tilde{z}_1 = \psi\left(e^{i(\frac{1}{2} \arg \varphi^+(z_1) + \frac{1}{2} \arg \varphi^+(z_2)) - \frac{\theta}{|\log \sigma_1|^{1/2}}} \right) ,$$

$$\tilde{z}_2 = \psi\left(e^{i(\frac{1}{2}\arg\varphi^+(z_1)+\frac{1}{2}\varphi^+(z_2))+\frac{\theta}{|\log\sigma_1|^{1/2}}}\right)$$

и определим функцию f, которая пока не была фиксирована, так:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in S,\ x \text{ правее } -I, \text{ но левее } \tilde{z}_1, \\ |z_2-z_1|^{\alpha}, & x\in S,\ x \text{ правее } \tilde{z}_2, \text{ но левее } e^{-i\beta\pi}, \\ \text{линейно зависит от длины дуги } S & \text{между } \tilde{z}_1 \text{ и } \tilde{z}_2. \end{cases}$$

Функция $f\in H_\alpha(S)$, $\|f\|_{H_\alpha(S)}=1$, $|f(\tilde{z}_2)-f(\tilde{z}_1)|=|\tilde{z}_2-\tilde{z}_1|^{\alpha}$.

Однако если мы произведем оценки интегралов по $\mathbb{C}$, воспользовавшись неравенствами (5)-(7), то получим, что

$$|f(\tilde{z}_2)-f(\tilde{z}_1)|\leq C_4(\beta)\frac{C+1}{|\log\sigma_1 T|^{\frac{\beta}{20}}}|\tilde{z}_2-\tilde{z}_1|^{\alpha}$$

что приводит к противоречию при $\sigma_1<\frac{1}{T}\exp(-C_0(\beta))(C+1)^{\frac{20}{\beta}}$) ●

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях леммы I для всякой дуги $I\subset S$ и всякого $k\in Z^*(I)$ найдется дуга $\mathcal{J}_k\subset I$, для которой $|\mathcal{J}_k|\geq\Delta|I|$, $\Delta=\left(\frac{\sigma_1}{2C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ и $\gamma_k(x)\geq\frac{\sigma_1}{2}|I|^{\alpha}$ при $x\in\mathcal{J}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точку $x_k\in I$, для которой $\gamma_k(x_k)=\max\limits_{x\in I}\gamma_k(x)$; тогда по лемме I $\gamma_k(x_k)\geq\sigma_1|I|^{\alpha}$. Отложим вправо или влево от x_k дугу $\mathcal{J}_k$ длины ΔI, так, чтобы $\mathcal{J}_k\subset I$. При $x\in\mathcal{J}_k$

$$\gamma_k(x)\geq\gamma_k(x_k)-|\gamma_k(x_k)-\gamma_k(x)|\geq\sigma_1|I|^{\alpha}-\Delta^{\alpha}|I|^{\alpha}=\frac{\sigma_1}{2}|I|^{\alpha}$$ ●

Осуществим теперь на произвольном отрезке I построение пространства $\Lambda(I,h,\{\Delta_n\},\{\xi_n\})$, специальный случай которого будет использован в дальнейшем. Пусть задан отрезок I вещественной оси; число $h<|I|$ и последовательности чисел $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем $0<\Delta\leq\Delta_n\leq 1$, $\frac{1-\Delta_n}{2}\leq\xi_n\leq\frac{1+\Delta_n}{2}$. Если L – некоторый отрезок, $0\leq\xi\leq 1$ – число, то через $\xi)L($ обозначим точку на L, делящую L в отношении ξ, если считать от левого конца.

Выбросим теперь из отрезка $I\overset{\text{def}}{=}I_1$ интервал $\mathcal{J}_1$ длины $\Delta_1|I|$ с серединой в точке $\xi_1)I_1($. Множество $I\setminus\mathcal{J}_1$ состоит из двух отрезков I_2 и I_3. Если $|I_2|\leq h$ или $|I_3|\leq h$, то построение для такого отрезка заканчивается. Если, например,

$|I_2| \geq h$, то из I_2 выбрасываем интервал $\mathcal{J}_2$ длины $\Delta_2|I_2|$ с серединой в $\xi_2 \,)I($.

Получающиеся после второго шага отрезки нумеруем слева направо следующими натуральными числами и для них проводим то же построение, выбрасывая из отрезка I_k интервал $\mathcal{J}_k$ длины $\Delta_k|I_k|$ с центром в $\xi_k \,)I_k($, если $|I_k| > h$, и ничего не выбрасывая, если $|I_k| \leq h$. Такое построение проводим, пока оно возможно, т.е. пока имеются отрезки I_n длины $> h$. В конечное число шагов построение закончится, в результате останется конечное число отрезков $\{I_\omega\}_\omega$, лежащих на I, длина каждого из которых не превосходит h.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\Lambda(I, h, \{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty})$ – это множество, состоящее из объединения отрезков длины h с серединами в серединах всех получившихся при построении отрезков I_ω.

Нам будет важно оценить меру $|\Lambda(I, h, \{\Delta_n\}, \{\xi_n\})|$.

ЛЕММА 2. Пусть I – произвольный отрезок, $h < |I|$, $0 < \Delta < 1$, а последовательности $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и множество $\Lambda(I, h, \{\Delta_n\}, \{\xi_n\})$ взяты из определения 2. Тогда

$$|\Lambda(I, h, \{\Delta_n\}, \{\xi_n\})| \leq C|I|^{1-\tau} h^{\tau},$$

где $\tau = \dfrac{\log \frac{1}{1-\Delta}}{\log \frac{2}{1-\Delta}}$, $\quad C = \dfrac{2}{1-(1-\Delta)^{1-\tau}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$\varphi_h(x) = \sup_{\substack{\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \Delta_n \geq \Delta, \, |I| = x}} |\Lambda(I, h, \{\Delta_n\}, \{\xi_n\})|.$$

Если $x \leq h$, то $\varphi_h(x) = x$. Пусть $b = \frac{1}{1-\Delta}$. Если $h \leq x \leq bx$, то $\varphi_h(x) \leq 2h \leq C x^{1-\tau} h^{\tau}$. Предположим, что утверждение леммы справедливо при $x \leq b^{n-1} h$, $n = 2, 3, \ldots$, и докажем его при $b^{n-1} h < x \leq b^n h$.

Построение начинается с выбрасывания из I отрезка $\mathcal{J}_1$ длины $|\mathcal{J}_1| \geq \Delta_1 |I| \geq \Delta |I|$ и затем на обоих (или одном) получающихся отрезках построение проводится независимо, причем максимальная длина любого отрезка, остающегося после первого выбрасывания, не превосходит $x - \Delta x = (1-\Delta) x \leq b^{n-1} h$, и поэтому к каждому из них приложимо предположение индукции, что дает

$$\varphi_h(x) \leq \sup_{0\leq y\leq(1-\Delta)x} (\varphi_h(y)+\varphi_h((1-\Delta)x-y)) \leq$$

$$\leq \max\left\{\max_{h\leq y\leq(1-\Delta)x} Ch^{\tau}\left[y^{1-\tau}+((1-\Delta)x-y)^{1-\tau}\right],\right.$$

$$\left. h+C(1-\Delta)^{1-\tau}x^{1-\tau}h^{\tau}\right\}=\max\left(C(1-\Delta)x\left(\frac{2h}{(1-\Delta)x}\right)^{\tau}, h+C(1-\Delta)^{1-\tau}x\left(\frac{h}{x}\right)^{\tau}\right).$$

Но при $\tau = \dfrac{\log b}{\log 2b}$ и $C = \dfrac{2}{1-(1-\Delta)^{1-\tau}}$ будет $(1-\Delta)^{1-\tau}2^{\tau}=1$,

$$h+C(1-\Delta)^{1-\tau}x^{1-\tau} \leq (1+C(1-\Delta)^{1-\tau})x^{1-\tau}h^{\tau} \leq Cx^{1-\tau}h^{\tau} \quad \bullet$$

В дальнейшем используется частный случай построения, предшествовавшего определению 2. Пусть $I\subset[-1,0]$, $k\in Z^*(I)$, $h<|I|$. В качестве интервала $\mathcal{J}_1$ возьмем тот интервал $\mathcal{J}_1$, о котором говорится в следствии из леммы I, $|\mathcal{J}_1|\geq\Delta|I|$, $\gamma_k(x)\geq\frac{\sigma_1}{2}|I|^{d}$, $x\in\mathcal{J}_1$. Для остающихся отрезков $I_1\subset I$ и $I_2\subset I$ справедливы неравенства $h^*(I_1)\geq h^*(I)$, $h^*(I_2)\geq h^*(I)$, поэтому $k\in Z^*(I_1)$, $k\in Z^*(I_2)$ и к отрезкам I_1, I_2 и номеру k опять можно применять следствия из леммы I. Следствие мы применяем только к тем отрезкам, длина которых h. Построение заканчивается, как в определении 2. Получающееся множество обозначаем через $\Lambda(I,k,h)$. Оно состоит из конечного числа отрезков, длина каждого из них $\geq h$, мера $|\Lambda(I,k,h)|\leq C|I|^{1-\tau}h^{\tau}$ и при $x\in I\setminus\Lambda(I,k,h)$ $\gamma_k(x)\geq\frac{\sigma_1}{2}h^{d}$.

В окончании доказательства теоремы мы будем (для краткости записи) использовать знаки $<\cdot,\cdot>$ и $\asymp$. Соотношение $a<\cdot b$, или, что то же, $b\geq a$, значит $a\leq C(\beta)b$; $a\asymp b$ означает $a<\cdot b$ и $b<\cdot a$. Следующая лемма есть результат элементарных вычислений.

ЛЕММА 3. Пусть $x\in S$, $|x|<\cdot\frac{1}{n^{\beta}}$. Тогда

$$\rho^*_{\frac{1}{n}}(x)\asymp\frac{1}{n^{\beta}}, \quad \rho_{\frac{1}{n}}(x)<\cdot\frac{1}{n^{\frac{2-\beta^2}{2-\beta}}} \quad \bullet$$

Закончим доказательство теоремы. Предположим, что $\mathcal{E}^*_d(C,T)<\varepsilon$, ε рекуррентно определено ниже в (7). Тогда найдется пара $(\gamma,m)\in\mathcal{S}^*(C)$, $\|(\gamma,m)\|_d\leq T$, для которой

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log \tau_m(k)}{\log k} < \frac{3}{2}\varepsilon$$

и, следовательно, $\log \tau_m(k) \leq 2\varepsilon \log k$ при $k \geq k_0(\gamma, m)$, что в дальнейшем о величине k и предполагается.

Возьмем затем $N > k_0(\gamma, m)$ и построим функцию $g_N(z)$ аналитичную и непрерывную в области $D = \{z : |z| < 2, -\beta\pi < \arg z < \pi\}$. Континуум S является частью границы ∂D. Другие свойства g_N выяснятся при построении. Положим $1+\beta_1 = \frac{2-\beta^2}{(2-\beta)\beta}$, $h = \frac{1}{N^{\xi}}$, $\xi > \beta$, и пусть

$$I_\ell = \Psi(T_\ell),\ T_\ell = \left\{e^{i\theta} : -\frac{\ell}{[N^{1+\varkappa}]} \leq \theta < -\frac{\ell-1}{[N^{1+\varkappa}]}\right\},\ 1 \leq \ell \leq [N^{\varkappa}],\ I = \bigcup_{\ell=1}^{[N^{\varkappa}]} .$$

Тогда $h^*(I_\ell) = [N^{1+\varkappa}]$, $|I| \asymp \frac{1}{N^{\beta}}$. На каждом отрезке I_ℓ I_ℓ для тех k, при которых $N^{\upsilon} \leq m_k \leq [N^{1+\varkappa}]$, построим множество $\Lambda(I_\ell, k, h)$, число $0 < \upsilon < 1$ будет выбрано позже. По лемме 2

$$|\Lambda(I_\ell, k, h)| \leq C|I_\ell|^{1-\tau} h^{\tau} = C|I_\ell|^{1-\tau} \frac{1}{N^{\xi\tau}} .$$

Поскольку $\tau_m(N^{1+\varkappa}) \leq N^{2\varepsilon(1+\varkappa)}$, то

$$\left|\bigcup_{k:N^{\upsilon} \leq m_k \leq N^{1+\varkappa}} \Lambda(I_\ell, k, h)\right| \leq C|I_\ell|^{1-\tau} \frac{1}{N^{\xi\tau - 2\varepsilon(1+\varkappa)}}$$

и затем, суммируя по ℓ, получим

$$\left|\bigcup_{\ell=1}^{[N^{\varkappa}]} \bigcup_{k:N^{\upsilon} \leq m_k \leq N^{1+\varkappa}} \Lambda(I_\ell, k, h)\right| \leq C \frac{1}{N^{\beta(1+\varkappa)(1-\tau) - \varkappa + \xi\tau - 2\varepsilon(1+\varkappa)}} .$$

Положим теперь $\varkappa = \frac{1}{2} \frac{\beta\beta_1}{1+\frac{1-\beta}{\tau}}$, $\xi = \beta\left(1 + \frac{1}{2}(\beta_1 + \varkappa)\right)$,

$$\upsilon = \frac{1}{2} + \frac{1 + \frac{1}{2}(\beta_1 + \varkappa)}{2(1+\beta)},\ \omega = \beta(1+\varkappa)(1-\tau) - \varkappa + \xi\tau - 2\varepsilon(1+\varkappa) .$$

Поэтому, если

$$\varepsilon < \frac{\beta(1+\varkappa)(1-\tau) - \varkappa + \xi\tau - \beta}{4(1+\varkappa)} \overset{def}{=} \varepsilon(\beta, c, T), \qquad (7)$$

то $\omega>0$ и при $N>N_0$

$$\bigcup_{\ell=1}^{[N^{\varkappa}]} \bigcup_{k:N^{\nu}\le m_k\le N^{1+\varkappa}} \Lambda(I_\ell,k,h) < \frac{1}{2}|I|.$$

Следовательно, при $N>N_0$ найдется точка $x_N\in I\setminus \bigcup_{\ell=1}^{[N^{\varkappa}]}\bigcup_{k:N^{\nu}\le m_k\le N^{1+\varkappa}}\Lambda(I_\ell,k,h)$. По построению множеств $\Lambda(I_\ell,k,h)$, для всех k, при которых

$$\gamma_k(x_N)\geqslant\frac{\sigma_1}{2}h^{d}. \tag{8}$$

Учтем также, что, в силу леммы 3 и выбора h и ν, при $x\in I$ справедливо

$$\rho_{\frac{1}{N^{\nu}}}(x)<\frac{1}{N^{\beta\nu(\beta_1+1)}}<\frac{1}{N^{\xi}}. \tag{9}$$

Определим, наконец, функцию g_N. Последовательно полагаем

$$\xi_1=\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\beta\nu(\beta_1+1), \tag{10}$$

$$y_N=x_N+\left(\frac{1}{2c}\right)^{\frac{1}{d}}\frac{1}{N^{\xi_1}},$$

$$R_N=[x_N,y_N]$$

$$f_N(x)=\begin{cases}0, & x\in S\setminus R_N\\ \dfrac{(x-x_N)^{d}\,(y_N-x)^{d}}{(y_N-x_N)^{d}}\log N, & x\in R_N\end{cases} \tag{11}$$

$$g_N(z)=\int_S\frac{f_N(x)}{x-z}\,dx. \tag{12}$$

На отрезке R_N те $\gamma_k(x)$, для которых $N^{\nu}\le m_k\le N^{1+\varkappa}$, как следует из (8)-(10), при $N>N_1$ больше, чем $\rho^{\alpha}_{1/N^{\nu}}$. Если приближать функцию g_N в области D полиномами P_n из работы [11] и проводить буквально те же рассуждения, что в указанной работе, для функции g_N, то получатся следующие оценки при $x\in S$:

$$|f_N(x)-P_n(x)| \le C_5(\beta) \begin{cases} \rho^{\alpha}(x) & x\in S,\ n\notin (N^{v}, N^{1+\varkappa}) \\ & x\in S\setminus R_N,\ n\in [N^{v}, N^{1+\varkappa}], \\ \frac{1}{N^{\xi\alpha}}, & x\in R_N,\ N^{v}\le n\le N^{1+\varkappa} \end{cases}$$

и $\rho_{\frac{1}{n}}(x)$ есть расстояние до линии уровня континуума S.

Из определения g_N легко получается, что

$$\|g_N\|_{H_\alpha(S)} \asymp \log N,$$

а из (3), (9) и (I3) следует

$$\|g_N\|_{\Pi(\gamma,m)} \le C_6(\beta). \tag{I5}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x)=\sum_{n=k_0+N_0+N_1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, g_{[e^{n^4}]}(x). \tag{I6}$$

Соотношение (I5) влечет $\|F\|_{\Pi(\gamma,m)} \le C_7(\beta)$, однако из (II), (I2) и (I6) нетрудно вывести, что $F\notin H_\alpha(S)$, поэтому $\Pi(\gamma,m)\ne H_\alpha(S)$, а это противоречит $(\gamma,m)\in \tilde{\mathcal{G}}^{*}_{\alpha}(i)$. ●

Литература

I. Л е б е д е в Н.А., Т а м р а з о в П.М. Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости. - Изв.АН СССР.Сер.мат.,I970,т.34,№6,с.I340-I390.

2. Б е л ы й В.И. Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей. - Мат.сб.,I977,т.I04, № 3,с.I63-I93.

3. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям.М., I963, I33 с.

4. Д з я д ы к В.К. О проблеме С.М,Никольского в комплексной области. - Изв.АН СССР.Сер.мат.,I959,т.23,№5,с.697-736.

5. Д з я д ы к В.К. К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях и о проблеме С.М.Никольского II.- Изв.АН СССР.Сер.мат.,I963,т.27,№5,с.II35-II6I.

6. Ш и р о к о в Н.А. Приближение непрерывных аналитических функций в областях с ограниченным граничным вращением. - Докл. АН СССР,1976,т.228,№4,с.809-812.
7. Ш и р о к о в Н.А. Аппроксимативная энтропия континуумов. - Докл.АН СССР,1977,т.235,№ 3,с.546-549.
8. Д ы н ь к и н Е.М. О равномерном приближении функций в жордановых областях. - Сиб.мат.журн.,1977,т.18,№ 4,с.775-786.
9. Д ы н ь к и н Е.М., Оценки аналитических функций в жордановых областях. - Зап.науч.семин.ЛОМИ,1977,т.73,с.70-90.
10. Ш и р о к о в Н.А. Равномерное приближение аналитических функций полиномами в областях ограниченного граничного вращения без нулевых внешних углов. - Зап.науч.семин.ЛОМИ,1976, т.65,199-201.
11. Л е б е д е в Н.А., Ш и р о к о в Н.А., О равномерном приближении функций на замкнутых множествах с ненулевыми внешними углами. - Изв.АН Арм.ССР. Математика,1976,т.6,№ 4, с.311-341.

N.A.Shirokov. Approximative properties of a continuum.

Summary

Properties of the continuum $S=[-1,0]\cup[0,e^{-i\beta u}]$ from the approximation theoretical point of view are discussed.