В. С. Серов, О восстановлении потенциала в трехмерной задаче теории рассеяния,
Докл. АН СССР, 1991, том 317, номер 3, 579–583

ростом на бесконечности) для соответствующего l, зависящего от s. Условия существования, регулярности и устойчивости решений таких уравнений достаточно хорошо изучены.

При подходящих предположениях на решения уравнений эволюции и исходные данные асимптотику решения системы (5) можно построить в следующих случаях:

1) невозмущенное уравнение (4) имеет вид $\mathrm{y}' = A(\omega t)\,\mathrm{y} + \mathbf{F}(\omega t)$ (условия типа (1) для постоянных A см. в [5]);

2) для вектор-функции $\mathbf{F}(\varphi)$ нарушено условие $\{\mathbf{F}\}_{\mathrm{m}} = 0$ при $\mathrm{m} \in \Gamma$, $\mathbf{X}(\varphi, \mathrm{x}, \epsilon, \tau)$ является многочленом (определенного вида) от x. Тогда можно построить асимптотику вида $\mathrm{x}_\epsilon(t) = \epsilon^{-\gamma}(\mathbf{u}(t, \epsilon t) + \ldots)$, $\gamma > 0$, и нарушение условия нерезонансности $\mathbf{F}(\varphi)$ приводит к особым решениям;

3) возмущения (определенной структуры) частот.

Приведенные факты могут быть использованы при исследовании устойчивости решений системы (5). Используемые здесь методы могут быть полезны также и для некоторых задач приведения (к нормальной форме см. [6]), резонансные коэффициенты в которых также могут "эволюционировать".

Институт сверхтвердых материалов
Академии наук УССР
Киев

Поступило
3 X 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с. 2. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высш. шк., 1988. 184 с. 3. *Сандраков Г.В.* – Мат. сб., 1989, т. 180, № 12, с. 1634–1679. 4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 304 с. 5. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. 256 с. 6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

УДК 517.95

МАТЕМАТИКА

© В.С. СЕРОВ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 10 X 1990)

Многомерным задачам теории рассеяния, связанным с восстановлением потенциала в операторе Шредингера, посвящено значительное количество работ. Не претендуя на полноту библиографических ссылок, отметим здесь работы [1–10].

В данной работе мы рассмотрим некоторые известные методы восстановления потенциала в трехмерном пространстве (см. [4, 5, 8]) для случая, когда потенциал имеет фиксированную особенность в некоторой наперед заданной точке. В отличие от работе [4, 5, 8] мы рассмотрим особенности, при которых потенциал может не принадлежать пространству L^2_{loc}. Кроме того, поскольку нас интересует восстановление фиксированной особенности, мы предположим, что потенциал имеет компактный носитель в $\mathbf{R}^3$. Более точно, мы предположим, что потенциал q в операторе $-\Delta + q$ в $\mathbf{R}^3$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\operatorname{supp} q = \{x \in \mathbf{R}^3 : \ |x| \leqslant 1\}$;

2) $q(x)$ есть действительнозначная функция, которая непрерывна всюду при $0 < |x| \leqslant 1$;

3) справедлива оценка при $0 < |x| \leqslant 1$

(1) $\quad |q(x)| \leqslant c|x|^{-2+\epsilon}$,

где произвольное $\epsilon > 0$ и фиксировано, а константа $c > 0$;

4) предположим также, что $q(x) = 0$ при $|x| = 1$.

При предположениях 1)–3) нетрудно показать (см., например, [11, 12]), что оператор $-\Delta + q$ является самосопряженным оператором, если его определить в смысле квадратичных форм в $L^2(\mathbf{R}^3)$. Спектр этого оператора состоит из абсолютно непрерывного спектра, заполняющего положительную часть действительной прямой, и отрицательного дискретного спектра конечной кратности, не имеющего предельных точек, кроме, быть может, точки $\{0\}$. В этой работе мы предположим, что спектр этого оператора состоит только из абсолютно непрерывного спектра $[0, +\infty)$. В этом случае для любого $k \in \mathbf{R}$ ограниченные решения однородного уравнения Шредингера

(2) $\quad (-\Delta + q - k^2)u = 0, \quad k \in \mathbf{R}$,

являются единственными решениями уравнения Липпмана–Швингера

(3) $\quad u(x, k, \theta) = \exp\{ik(x, \theta)\} - \int\limits_{|y| \leqslant 1} G_k^+(|x-y|)\, q(y)\, u(y, k, \theta)\, dy$,

где $\theta \in S^2$ – единичная сфера в $\mathbf{R}^3$, а $G_k^+(|x-y|) = \exp\{ik|x-y|\}/4\pi|x-y|$ – функция Грина оператора $-\Delta - k^2$ в $\mathbf{R}^3$ с условиями Зоммерфельда на бесконечности.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть потенциал q удовлетворяет условиям* 1)–3). *Тогда для любого $k \in \mathbf{R}$ уравнение* (3) *имеет единственное решение из $L^\infty(\mathbf{R}^3)$ равномерно по $\theta \in S^2$. Кроме того, для этого решения справедлива оценка*

(4) $\quad \| u(x, k, \theta) - \exp\{ik(x, \theta)\} \|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leqslant \beta(k) \|q\|_{L^{3/2}(|x| \leqslant 1)}$,

где $\beta(k) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по $\theta \in S^2$.

Эта теорема позволяет получить асимптотическое при $|x| \to \infty$ поведение решения $u(x, k, \theta)$ уравнения (3):

(5) $\quad u(x, k, \theta) = \exp\{ik(x, \theta)\} + \dfrac{\{\exp\ ik|x|\}}{4\pi|x|} A(k, \theta', \theta) + O\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)$,

где $\theta \in S^2$, $\theta' = \dfrac{x}{|x|} \in S^2$, $k \in \mathbf{R}$. Функция $A(k, \theta', \theta)$ в (5) называется амплитудой рассеяния и определяется по формуле

(6) $\quad A(k, \theta', \theta) = -\int\limits_{|y| \leqslant 1} \exp\{-ik(\theta', y)\}\, q(y)\, u(y, k, \theta)\, dy$,

Из (4)–(6) следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Для каждого $\xi \in \mathbf{R}^3$ справедливо равенство*

(7) $\quad \hat{q}(\xi) = -(2\pi)^{-3/2} \lim\limits_{k \to \infty} A(k, \theta', \theta), \quad \xi = k(\theta' - \theta)$,

где символом $\hat{q}(\xi)$ обозначено преобразование Фурье потенциала $q(x)$ в $\mathbf{R}^3$.

Далее воспользуемся тем фактом, что спектр оператора $-\Delta + q$ в нашем случае является только непрерывным. Это позволяет распространить решения уравнения (3) для комплексных k. Более точно, справедлива

Теорема 3. *Для каждого комплексного* k, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} k \leqslant 0)$, *существует и единственно решение* $u^+(x, k, \theta)$ $(u^-(x, k, \theta))$ *уравнения* (3); *функции* $u^\pm(x, k, \theta)$ *непрерывны при* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} k \leqslant 0)$ *и аналитичны при* $\operatorname{Im} k > 0$ $(\operatorname{Im} k < 0)$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$(8) \qquad \| \exp\{-ik(x,\theta)\}\, u^\pm(x,k,\theta) - 1 \|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leqslant \beta_1(k)\, \|q\|_{L^{3/2}(|y|\leqslant 1)},$$

где $\beta_1(k) \to 0$ *при* $k \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} k \leqslant 0)$ *равномерно по* $\theta \in S^2$.

Следствие. *Функции* $\exp\{-ik(x,\theta)\}\, u^\pm(x,k,\theta) - 1$ *равномерно по* $x \in \mathbf{R}^3$ *и* $\theta \in S^2$ *принадлежат классу Харди* $H^p(\operatorname{Im} k > 0)$ $(H^p(\operatorname{Im} k < 0))$ *при* $p > 1/\epsilon$, *если* $0 < \epsilon \leqslant 1/2$, *и* $p > 2$, *если* $\epsilon > 1/2$.

Теорема 3 и следствие к ней позволяют получить точную формулу, восстанавливающую потенциал q.

Теорема 4. *Для каждого* $x \in \mathbf{R}^3$, $x \neq 0$, *справедлива формула*

$$(9) \qquad q(x) = \frac{1}{2\pi^2 i} (\theta, \nabla_x) \int_{-\infty}^{\infty} k\,dk \int_{S^2} A(k,\theta',\theta) \cdot \exp\{-ik(\theta,x)\}\, u^-(x,k,\theta')\, d\theta',$$

где любое $\theta \in S^2$ *и фиксировано, а* ∇_x – *градиент по переменным* $x \in \mathbf{R}^3$.

Замечание 1. Формула (9), по-видимому впервые, получена R. Newton [4] для потенциалов, которые локально принадлежат L^2.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 4, кроме упомянутых теоремы 3 и следствия, используются следующие факты. Во-первых, решения $u^\pm(x, k, \theta)$ для $k \in \mathbf{R}$ связаны соотношением

$$(10) \qquad u^+(x,k,\theta) = u^-(x,k,\theta) - \frac{k}{2\pi i} \int_{S^2} A(k,\theta',\theta)\, u^-(x,k,\theta')\, d\theta',$$

которое доказано в работе [4]. Во-вторых, используется интегральная формула Коши для полуплоскости для функции из класса Харди H^p. (По этому поводу см. книгу П. Кусиса [14]). В-третьих, для получения формулы (9) необходима гладкость решений $u^\pm(x, k, \theta)$ по переменным x, поскольку эти функции почти всюду должны удовлетворять однородному уравнению Шредингера. Этот факт следует из свойств функции Грина–Фаддеева, которые доказаны в работе автора [13] с помощью техники, развитой в работе [7].

Далее, поскольку оператор $-\Delta + q$ не имеет положительных собственных значений (это доказывается так же, как и в работе [11]), то для любого $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, оператор $(-\Delta + q - k^2)^{-1}$ является интегральным с ядром $G_q(x, y)$, которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$(11) \qquad G_q(x,y) = G_k^+(|x-y|) - \int_{|u|\leqslant 1} G_k^+(|x-u|)\, q(u)\, G_q(u,y)\, du.$$

Для решения этого уравнения рассмотрим модифицированное уравнение

$$(12) \qquad \tilde G_q(x,y) = \tilde G_k(x,y) + \int_{|u|\leqslant 1} K(x,u)\, \tilde G_q(u,y)\, du,$$

где $K(x, u) = -|q(x)|^{1/4} G_k^+(|x-u|)\, q_{3/4}(u)$ $(q_\alpha = |q|^\alpha \operatorname{sgn} q)$, $\tilde G_q(x, y) = |q(x)|^{1/4} G_q(x, y)$ и $\tilde G_k(x, y) = |q(x)|^{1/4} G_k^+(|x - y|)$. Поскольку потенциал q удовлетворяет (1), то $\tilde G_k(x, y)$ принадлежит по переменной x пространству $L^2(|x| \leqslant 1)$ равномерно $y \in \mathbf{R}^3$. Кроме того, нетрудно показать, что ядро $K(x, u)$ – ядро Гильберта–Шмидта. А в силу осцилляции G_k^+ из теоремы Римана–Лебега вытекает, что при достаточно больших $|k|$ справедливо неравенство

$$(13)\quad \|\hat{K}\|_{L^2\to L^2} < 1,$$

где символом $\hat{K}$ обозначен интегральный оператор с ядром $K(x, u)$. Это позволяет решить уравнение (12) итерациями в $L^2(|x| \leqslant 1)$ равномерно по $y \in \mathbf{R}^3$ так, что

$$(14)\quad \tilde{G}_q(\cdot, y) = (I+\hat{K})^{-1}\tilde{G}_k(\cdot, y).$$

Если далее символом $K_q(x, y)$ обозначить ядро вида $|q(x)|^{1/4}G_q(x, y)q_{3/4}(y)$, то из (14) и (13) получим соотношение

$$(15)\quad \|\hat{K}_q\|_{L^2\to L^2} \to 0.$$

при $|k| \to \infty$.

Это соотношение (имеющее, впрочем, самостоятельный интерес) позволяет получить важные формулы, с помощью которых можно восстановить потенциал q. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Для любого* $\xi \in \mathbf{R}^3$ *справедлива формула*

$$(16)\quad \hat{q}(\xi) = \lim_{k\to\infty,\, |x|\to\infty,\, |y|\to\infty} \left\{\frac{2}{\pi}|x|\cdot|y|\exp\{-ik(|x|+|y|)\}\right\}[G_k^+(|x-y|) -$$

$$- G_q(x, y)],$$

где $\xi = k(x/|x| + y/|y|)$, а символом $\hat{q}(\xi)$ обозначено преобразование Фурье потенциала q.

Теорема 6. *Для любого* $x \in \mathbf{R}^3$, $x \neq 0$, *справедливо равенство*

$$(17)\quad \lim_{k\to\infty} k^2 \int_{S^2}\int_{S^2} d\theta\, d\theta'\, A(k, \theta', \theta)\exp\{-ik(\theta-\theta', x)\} = -2\pi \int_{|y|\leqslant 1} \frac{q(y)\,dy}{|x-y|^2}.$$

Замечание. Формула (17) является обобщением на случай сингулярных потенциалов формулы Y. Saito [5].

Далее, учитывая (1), для правой части (17) нетрудно получить оценки, из которых следует, что эта функция по x является локально суммируемой. Этот факт и тот факт, что правая часть (17) является сверткой, позволяют определить потенциал q по приводимой ниже формуле (подробнее см. [8]).

Следствие к теореме 6.

$$(18)\quad q(x) = -\frac{1}{4\pi^3}\lim_{k\to+\infty} k^3 \int_{S^2}\int_{S^2} d\theta\, d\theta'\, |\theta-\theta'|\, A(k, \theta', \theta)\exp\{-ik(\theta-\theta', x)\}.$$

Далее опять рассмотрим ядро интегрального оператора $(-\Delta + q - k^2)^{-1}$. Из (11) и (14) следует, что в смысле L^2 по переменным x и равномерно по $y \in \mathbf{R}^3$ функция $G_q(x, y)$ представима в виде

$$(19)\quad G_q(x, y) = G_k^+(|x-y|) - \int_{|u|\leqslant 1} G_k^+(|x-u|)\, q_{3/4}(u)\, \tilde{G}_q(u, y)\, du,$$

причем это представление служит одновременно определением функции $G_q(x, y)$ для любого $x \in \mathbf{R}^3$ и $y \in \mathbf{R}^3$. Однако более удобным для приложений является следующее представление.

Теорема 7. *Пусть* $n_0 = [1/\epsilon] + 1$. *Тогда*

$$(20)\quad G_q(x, y) = \sum_{n=0}^{n_0-1} A^{(n)}(x, y) + B(x, y),$$

где

$$A^{(0)}(x,y) = G_k^+(|x-y|),$$
$$A^{(n)}(x,y) = -\int\limits_{|u|\leqslant 1} G_k^+(|x-u|)\,q(u)\,A^{(n-1)}(u,y)\,du \quad \text{при } n \geqslant 1,$$

а функция $B(x,y)$ *является решением в классе ограниченных функций интегрального уравнения*

$$(21)\qquad B(x,y) = A^{(n_0)}(x,y) - \int\limits_{|u|\leqslant 1} G_k^+(|x-u|)\,q(u)\,B(u,y)\,du,$$

в котором $A^{(n_0)}(x,y) \in L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \cap C(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$. *Кроме того, для функций* $A^{(n)}(x,y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, *справедливы оценки*

$$(22)\qquad |A^{(n)}(x,y)| \leqslant c_n |x-y|^{-1+n\tau},$$

равномерные по $x, y \in \mathbf{R}^3$ *для любого* τ, $0 < \tau < \epsilon$.

Замечание 1. Для действительных k, $k \neq 0$, существование единственного решения уравнения (21) можно показать аналогично тому, как это сделано в работе T. Ikebe [11]. Этот факт можно показать и для комплексных k: $\operatorname{Im} k > 0$ и $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$. Если к тому же предположить, что $\operatorname{Im} k \geqslant 1$, то это решение можно получить итерациями.

Замечание 2. Для случая $N = 2$ результаты данной работы с полными доказательствами приведены в работах автора [15, 13].

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
15 X 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фаддеев Л.Д.* – УМН, 1959, т. 14, № 4, с. 57–119. 2. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 3. *Новиков Р.Г., Хенкин Г.М.* – УМН, 1987, т. 42, № 3, с. 93–152. 4. *Newton R.G.* – J. Math. Phys., 1980, vol. 21, p. 1698–1751; 1981, vol. 22, p. 2191–2200; 1982, vol. 23, p. 594–604. 5. *Saito Y.* – Osaka J. Math., 1983, vol. 19, p. 527–547. 6. *Sylvester J., Uhlmann G.* – Ann. Math., 1987, vol. 125, p. 153–169. 7. *Nachman A.I.* – Ibid., 1988, vol. 128, № 3, p. 531–576. 8. *Somersalo E., Beylkin G., Burridge R., Chenye M.* – IMA Preprint Series. Univ. Minnesota, 1988, № 449. 9. *Cheney M.* – J. Math. Phys., 1984, vol. 25, № 1, p. 94–107. 10. *Ramm A.G.* – Inverse Problems, 1987, vol. 3, p. L77–L82. 11. *Ikebe T.* – Arch. Ration. Mech. Anal., 1960, vol. 5, p. 1–34. 12. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978, т. 2. 13. *Серов В.С.* – ДАН, 1990, т. 312, № 6. с. 1324–1327. 14. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984. 15. *Серов В.С.* – Дифференц. уравнения, 1990, т. 26, № 5, с. 851–860.