

УДК 514.772

*Е. П. Сенькин***ИЗГИБАНИЕ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ****ОГЛАВЛЕНИЕ**

Введение	193
Глава I. Основные леммы	197
§ 1. Некоторые факты теории поверхностей «в целом»	197
§ 2. Основные леммы	198
Глава II. Теоремы об изгибании выпуклых поверхностей с границей	202
§ 1. Изгибание общих выпуклых поверхностей	202
§ 2. Случай регулярных поверхностей	207
§ 3. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей	208
§ 4. Случай регулярных поверхностей	210
§ 5. Об изгибании выпуклой поверхности сданной граничной полосой	211
Глава III. Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей	215
§ 1. Неизгибаемость замкнутых выпуклых гиперповерхностей	215
§ 2. Локальная неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей	219
Библиография	221

**ВВЕДЕНИЕ**

В геометрии исследуются три вида изгибаний.

1) Изометрическое отображение одной поверхности на другую, т. е. такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие поверхностей, при котором соответствующие кривые на поверхностях имеют равные длины.

2) Непрерывные изгибания, при которых поверхность погружается в непрерывное семейство изометричных ей поверхностей.

3) Бесконечно малые изгибания, при которых поверхность деформируется в зависимости от некоторого параметра, причем длины кривых на поверхности стационарны, т. е. производные длин кривых в начальный момент равны нулю.

Изгибание называется тривиальным, если оно сводится к движению или к движению и отражению. Если речь идет о бес-

конечно малых изгибаниях, то оно называется тривиальным в том случае, когда в начальный момент оно сводится к бесконечно малому движению. Если поверхность не допускает иных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных, то она называется жесткой.

Проблема изгибания поверхностей была предметом многочисленных исследований геометров 19—20 вв. Большинство этих исследований посвящено вопросу изгибания поверхностей «в малом», или исследованию изгибаний частных видов поверхностей. При сохранении регулярности поверхности изгибание есть деформация поверхности, при которой линейный элемент поверхности сохраняется. Это приводит к дифференциальным уравнениям относительно координат точек преобразованной поверхности.

В случае бесконечно малых изгибаний эти уравнения линейны. Таким образом, в случае регулярных поверхностей вопрос сводится к теоремам существования и единственности решения соответствующего дифференциального уравнения.

Один из наиболее общих результатов, касающихся изгибания поверхностей «в малом», был получен Дарбу.

Дарбу доказал, что достаточно малая окрестность произвольной точки аналитической поверхности допускает изгибания. Леви усилил этот результат доказав, что два достаточно малых изометрических куска аналитических поверхностей с неравной нулю гауссовой кривизной могут быть непрерывным изгибанием переведены один в другой (с добавлением отражения, если гауссова кривизна больше нуля). Если снять требование равенства нулю гауссовой кривизны, то такой результат не имеет места.

Н. В. Ефимов показал, что существуют аналитические поверхности, содержащие изолированные точки, где все кривизны нормальных сечений обращаются в нуль, и не допускающие непрерывных изгибаний даже для сколь угодно малой окрестности этой точки [11], [12], [13].

Иначе обстоит дело при изгибании поверхностей «в целом». Первая теорема об изгибании поверхностей «в целом» принадлежит Коши [2]. В 1813 г. Коши доказал, что два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленные из равных граней, равны. Этот классический результат был долгое время в стороне от дифференциально-геометрической теории поверхностей. В настоящее время, когда вопрос ставится шире, т. е. рассматриваются изгибания общих выпуклых поверхностей, он естественно включается в общий комплекс теорем об изгибании поверхностей «в целом».

В 1941 г. С. П. Оловянишников дал окончательное обобщение теоремы Коши, доказав, что всякая замкнутая выпуклая поверхность, изометричная замкнутому выпуклому многограннику, сама есть равный ему многогранник [17].

В 1838 г. Миндинг высказал гипотезу, что сфера неизгибаема. Но только в 1899 г. Либман и Минковский разными методами показали, что сфера не допускает нетривиальных изометрических отображений. После этого вопросом неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей занимались Гильберт, Бляшке, Либман, Вейль, Кон-Фоссен. Результатом их работы явилось доказательство того, что замкнутая регулярная выпуклая поверхность положительной гауссовой кривизны не допускает непрерывных изгибаний и жесткая.

В 1927 г. Кон-Фоссен доказал, что изометричные трижды непрерывно дифференцируемые замкнутые выпуклые поверхности положительной гауссовой кривизны равны [14], [15]. В 1943 г. Герглотц снизил требование регулярности до двукратной дифференцируемости и снял требование положительности гауссовой кривизны [11]. Кон-Фоссену принадлежит также первый пример нежесткой замкнутой поверхности [14], [15].

Существенно новые возможности в теории изгибания открылись в связи с исследованиями А. Д. Александрова. В 1941 г. А. Д. Александров доказал существование замкнутого выпуклого многогранника, реализующего заданную на сфере многогранную метрику, и этой работой положил основу новой синтетической теории выпуклых поверхностей [2].

Новые методы, предложенные А. Д. Александровым, позволили С. П. Оловянишникову в 1941 г. доказать изгибаемость бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной, меньшей  $2\pi$ , и найти все их изгибания [18].

А. Д. Александровым впервые (1936 г.) исследованы бесконечно малые изгибания нерегулярных поверхностей [3]. Написав уравнение для скорости этого изгибания в очень общих предположениях и проведя анализ для произвольных выпуклых поверхностей, А. Д. Александров доказал следующую теорему: выпуклая поверхность вращения жесткая тогда и только тогда, когда она не содержит плоских кусков и ее сферическое изображение или его замыкание покрывает всю сферу.

В 1938 г. А. Д. Александров рассмотрел замкнутые поверхности, которые назвал  $T$ -поверхностями (типа тора) [4]. Эти поверхности определяются следующим внутренним свойством.

На  $T$ -поверхности есть области положительной и отрицательной кривизны, разделенные кусочно-гладкими кривыми, и полная кривизна областей положительной кривизны равна  $4\pi$ . Несмотря на внутренне-геометрический характер этих требований, А. Д. Александрову удается сделать сильные заключения о поверхностях типа  $T$ :

1) На всякой  $T$ -поверхности области положительной кривизны образуют одну связную область, являющуюся частью замкнутой выпуклой поверхности; граница этой области состоит из плоских кривых.  $T$ -поверхности могут быть любого рода  $p > 0$  (гомеоморфны сфере с  $p$  ручками).

2) Аналитическая  $T$ -поверхность не допускает нетривиальных изометрических отображений (в классе аналитических поверхностей).

3) Аналитическая  $T$ -поверхность — жесткая.

Одним из самых сильных средств исследования изгибаний выпуклых поверхностей является метод склеивания А. Д. Александрова. Им даны общие условия, при которых из кусков выпуклых поверхностей можно склеить (замкнутую или бесконечную) выпуклую поверхность [1]. Эта «теорема о склеивании» приводит к многочисленным теоремам изгибаемости выпуклых поверхностей, которые другими методами доказать не удавалось.

Во всех предыдущих теоремах об изгибании выпуклых поверхностей существенную роль играют дополнительные требования регулярности поверхности.

В 1949 г. А. В. Погорелов доказал однозначную определенность замкнутых выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны, выпуклых шапочек в классе шапочек, широкого класса бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной  $2\pi$  и бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной, меньшей  $2\pi$ , при некоторых дополнительных условиях, естественно вытекающих из соответствующей теоремы С. П. Оловянишникова [20].

В публикации 1952 г. А. В. Погорелов дал полное решение проблемы однозначной определенности общих замкнутых выпуклых поверхностей; доказана также однозначная определенность бесконечных общих выпуклых поверхностей при сформулированных выше условиях [21], [25].

В 1959 г. А. В. Погореловым получены окончательные результаты и в теории бесконечно малых изгибаний общих выпуклых поверхностей [22], [25]. В частности, доказано, что общая замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, — жесткая.

Если же поверхность содержит плоские области, то она жесткая вне этих областей. Доказана весьма общая теорема существования бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей с краем и установлен произвол, с которым эти бесконечно малые изгибания строятся. Доказано, что регулярная поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает иных бесконечно малых изгибаний, кроме регулярных. В частности, аналитическая поверхность допускает только аналитические бесконечно малые изгибания.

А. В. Погореловым рассмотрены также изгибания выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны и римановых пространствах [23], [24], [25].

В 1968 г. Ю. А. Волковым получены оценки изменения пространственной формы общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее метрики [10]. Из этого резуль-

тата следует однозначная определенность общих замкнутых выпуклых поверхностей. Вопрос об изгибании регулярных поверхностей хорошо освещен в [8], [11], [19], [14], [7], [9].

В настоящей статье речь пойдет только об изгибании нерегулярных выпуклых поверхностей. Исключение составляют §§2, 4 главы II, которые являются замечаниями об упрощении доказательств для случая регулярных поверхностей.

## Глава I

### ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

#### § 1. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ «В ЦЕЛОМ»

В настоящем параграфе формулируются некоторые результаты теории поверхностей «в целом» и теории дифференциальных уравнений, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Пусть даны две регулярные выпуклые поверхности  $F_1$  и  $F_2$ . Пусть между ними установлено изометрическое соответствие. Точки  $x_1 \in F_1$  и  $x_2 \in F_2$ , соответствующие по изометрии, называются точками конгруэнтности, если кривизны всех нормальных сечений в направлениях, соответствующих по изометрии, равны. Имеет место следующее утверждение.

На изометричных регулярных (трижды дифференцируемых) выпуклых поверхностях строго положительной гауссовой кривизны точки конгруэнтности лежат изолированно [14], [15].

Аналогичное утверждение имеет место и для бесконечно малых изгибаний. Именно, будем говорить, что точка регулярной выпуклой поверхности стационарна, если кривизны всех нормальных сечений в этой точке — стационарны.

На регулярных (трижды дифференцируемых) выпуклых поверхностях строго положительной гауссовой кривизны стационарные точки лежат изолированно.

2. Теорема А. Д. Александрова. Дифференциальное уравнение  $\Phi=0$  типа Монжа — Ампера эллиптического типа не может иметь двух различных решений, разность которых в некоторой области не меняет знака, но хоть где-нибудь внутри нее обращается в нуль [5].

3. Основная лемма А. В. Погорелова.

Пусть  $F: z=z(x, y)$  — общая выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, однозначно проектирующаяся на плоскость  $x, y$ .

Пусть  $\varphi(x, y)$  — составляющая по оси  $Z$  ее изгибающего поля. Тогда поверхность  $Z=\varphi(x, y)$  имеет отрицательную кривизну в том смысле, что ни через какую точку  $P$  этой поверхно-

сти нельзя провести плоскость  $\alpha$  так, чтобы все точки поверхности, близкие к  $P$ , кроме самой  $P$ , были бы вне плоскости  $\alpha$ , т. е. лежали бы по одну сторону от плоскости  $\alpha$  [22], [25].

## § 2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть  $F$  — выпуклая поверхность. Будем говорить, что поверхность  $F$  видна из точки  $O$  с одной стороны, если каждый луч, идущий из точки  $O$  в любую точку поверхности, пересекает  $F$  лишь в одной точке (лучи, идущие в точки границы поверхности, могут скользить по поверхности).

Если при этом поверхность  $F$  обращена выпуклостью от точки  $O$ , то будем говорить, что она видна из точки  $O$  изнутри. В частности, замкнутая выпуклая поверхность видна изнутри из каждой своей точки, лежащей на ней.

Лемма 1 (о вложении) [29]. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — общие изометричные выпуклые поверхности, видимые из точек  $O_1$  и  $O_2$  с одной стороны и обращенные выпуклостью в одну сторону относительно точек  $O_1$  и  $O_2$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — границы поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  (если поверхности замкнутые, то будем считать, что границы сводятся к соответствующим по изометрии точкам  $O_1$  и  $O_2$ ). Пусть существуют плоскости  $P_1$  и  $P_2$ , проходящие через точки  $O_1$  и  $O_2$ , такие, что поверхности  $F_1$  и  $F_2$  лежат относительно  $P_1$  и  $P_2$  в одном полупространстве. Тогда, если расстояния от точек  $O_1$  и  $O_2$  до соответствующих по изометрии точек границ  $L_1$  и  $L_2$  равны, то поверхности  $F_1$  и  $F_2$  либо равны, либо могут быть приведены в такое расположение, что будут выполнены следующие условия:

а) Некоторые соответствующие по изометрии точки  $x_1 \in F_1$  и  $x_2 \in F_2$  совпадут.

б) Расстояния от некоторой точки  $O$  пространства до точек  $x_1$  и  $x_2$  будут равны.

в) Окрестности точек  $x_1$  и  $x_2$  из точки  $O$  будут видны с одной стороны и одновременно будут обращены выпуклостью или от точки  $O$ , или к ней.

г) В окрестностях точек  $x_1$  и  $x_2$  для любых соответствующих по изометрии точек  $x \in F_1$ ,  $x \in F_2$  будет иметь место неравенство  $r_1(x) < r_2(x)$ , где  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$ , соответственно, расстояния от точки  $O$  до точек  $x \in F_1$ ,  $x \in F_2$  и соответствующих по изометрии.

Грубо говоря, в окрестностях точек  $x_1$  и  $x_2$  поверхности как бы вложены друг в друга.

Эта идея высказана еще Кон-Фоссеном [14]. Именно, Кон-Фоссен предполагал, что однозначная определенность общих оваловидов может быть доказана в следующие два этапа.

1. Доказать, что если изометричные оваловиды не равны, то на них найдутся соответствующие по изометрии точки такие, что при их совмещении малые окрестности этих точек могут быть вложены друг в друга.

2. Доказать, что такое вложение для изометричных овалов невозможно.

В нашем случае, в условиях леммы 1, такое вложение осуществляется в смысле расстояний от некоторой точки. Невозможность такого вложения будет показана дальше.

Для регулярных поверхностей доказательство невозможности вложения может быть осуществлено несколькими способами (в зависимости от степени регулярности поверхностей). Для общих выпуклых поверхностей доказательство основано на Основной лемме А. В. Погорелова (п. 3, § 1).

Докажем лемму 1. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — поверхности, удовлетворяющие условиям леммы 1, а  $L_1$  и  $L_2$  — множества их граничных точек. Будем считать, что  $F_1$  и  $F_2$  обращены выпуклостью от  $O_1$  и  $O_2$ . Доказательство в случае, когда  $F_1$  и  $F_2$  обращены выпуклостью к  $O_1$  и  $O_2$ , проще и проводится аналогично.

Рассмотрим расстояние  $r_2(x)$  от точки  $O_2$  до точки  $x \in F_2$ . Расстояние от точки  $O_1$  до точки, соответствующей точке  $x$  по изометрии, обозначим через  $r_1(x)$ . Возможны следующие два случая:

- 1)  $r_1(x) = r_2(x)$  для всех  $x \in F_2$ ;
- 2) на  $F_2$  найдется множество  $G$ , на котором  $r_1(x) > r_2(x)$  или  $r_1(x) < r_2(x)$ .

Если имеет место первый случай, то, как известно, поверхности равны. Рассмотрим второй случай. Для определенности будем считать, что на  $G$  имеет место неравенство  $r_1(x) > r_2(x)$ , на границе множества  $G$  будет  $r_1(x) = r_2(x)$ . По условию леммы, через точку  $O_2$  проходит плоскость  $P_2$ , перпендикулярно которой  $F_2$  лежит по одну сторону. Пусть  $L$  — луч, перпендикулярный плоскости  $P_2$  и направленный в сторону от поверхности. Будем двигать точку  $O_2$  по лучу  $L$ . Тогда все расстояния  $r_2(x)$  будут возрастать, и потому область  $G$  будет сжиматься. В начальный момент область  $G$  видна изнутри из точки  $O_2$ . Пусть  $M_2$  — замкнутое множество, содержащее  $G$ , на котором  $r_1(x) \geq r_2(x)$ . Покажем, что как только точка  $O_2$  сдвигается по лучу  $L$ , так ни в какой точке  $x_2$  множества  $M_2$  луч  $O_2x_2$  не будет касаться поверхности  $F_2$ , и потому множество  $M_2$  будет постоянно видно изнутри из точки  $O_2$ .

Для доказательства представим себе, что точка  $O_2$  сдвинута по лучу  $L$  из положения  $O_2'$  в положение  $O_2''$ . Так как при этом расстояния  $r_2(x)$  возрастают, то множество  $M_2$  сжимается. Множество  $M_2''$ , отвечающее положению точки  $O_2''$ , содержится внутри множества  $M_2'$ , отвечающего положению точки  $O_2'$ . Предполагая, что  $M_2'$  видно всюду изнутри, кроме, может быть, точек, для которых лучи из  $O_2'$  пересекают его границу, покажем, что  $M_2''$  видно из  $O_2''$  всюду изнутри. Пусть  $x_2$  — произвольная точка множества  $M_2''$ , так что

$$O_1x_1 \geq O_2''x_2. \quad (1)$$

Рассмотрим в точке  $x_2$  касательный конус. Нужно доказать, что он не пересекает отрезок  $O_2'O_2''$ . Для этого достаточно доказать, что если он пересекает луч  $L$  за точкой  $O_2'$  в некоторой точке  $B$ , то точка  $B$  лежит также за точкой  $O_2''$ . Проведем через точки  $O_2''$ ,  $O_2'$ ,  $x_2$  плоскость. В пересечении ее с поверхностью  $F_2$  получим дугу  $x_2A_2$ , касающуюся отрезка  $x_2B$  и идущую до ближайшей к  $x_2$  точки  $A_2$ , которая лежит на границе множества  $M_2'$ . Так как  $A_2$  лежит на границе множества  $M_2'$ , то

$$O_2'A_2 = O_1A_1. \quad (2)$$

Так как поверхность  $F_2$  выпуклая и, по предположению,  $M_2'$  видно изнутри из точки  $O_2'$ , кроме, может быть, точек, лучи в которых пересекают границу, то дуга  $x_2A_2$  будет выпуклой, обращенной выпуклостью от точки  $O_2'$ . Вместе с отрезком  $O_2'A_2$  она образует выпуклую кривую  $O_2'A_2x_2$ . Если сама точка  $O_2'$  лежит на границе поверхности, то возможно, что  $O_2' = A_2$  и отрезок  $O_2'A_2$  сводится к точке. Пусть  $A_1x_1$  — линия на поверхности  $F_1$ , отвечающая по изометрии дуге  $A_2x_2$ , так что

$$\text{дл.}(A_1x_1) = \text{дл.}(A_2x_2). \quad (3)$$

Поскольку  $O_2'A_2 = O_1A_1$ , то

$$\text{дл.}(O_2'A_2x_2) = \text{дл.}(O_1A_1x_1). \quad (4)$$

Покажем, что точка  $O_2'$  не может лежать на касательной  $x_2B$ . Предположим противное. Тогда точка  $A_2$  также должна лежать на  $x_2B$  и  $\text{дл.}(O_2'A_2x_2) = O_2'x_2$ . Так как  $x_2 \in M_2''$ , то  $O_1x_1 \geq O_2'x_2$ . Но

$$\text{дл.}(O_1A_1x_1) \geq O_1x_1 \geq O_2'x_2 = \text{дл.}(O_2'A_2x_2).$$

В силу (4), заключаем, что  $O_1x_1 = O_2'x_2$ . Но тогда  $O_2''x_2 \leq O_1x_1 = O_2'x_2$ , чего не может быть, так как в треугольнике  $O_2''x_2O_2'$  угол при вершине  $O_2'$  — тупой. Проведем через  $O_2'$  прямую, перпендикулярную лучу  $L$ ; пусть  $C$  — точка пересечения этой прямой с касательной  $x_2B$ . Очевидно,

$$O_2'C < BC, \quad (5)$$

причем  $\text{дл.}(O_2'C) \neq 0$ , так как по доказанному точка  $O_2'$  не лежит на касательной  $x_2B$ . Поскольку линия  $O_2'A_2x_2$  выпукла, то

$$\text{дл.}(O_2'C + Cx_2) \geq \text{дл.}(O_2'A_2x_2). \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$Bx_2 = \text{дл.}(BC) + \text{дл.}(Cx_2) > \text{дл.}(O_2'A_2x_2),$$

а отсюда, в силу (4), имеем

$$Bx_2 > \text{дл.}(O_1A_1x_1) \geq O_1x_1 \geq O_2''x_2.$$

Неравенство  $Bx_2 > O_2''x_2$  как раз и означает, что точка  $B$  лежит на луче  $L$  за точкой  $O_2''$ .

Так как при смещении точки  $O_2$  по  $L$  расстояния  $r_2(x)$  растут, то в некоторый момент окажется, что область, где  $r_1(x) >$

$> r_2(x)$ , исчезнет. Это положение точки  $O_2$  обозначим через  $O_2^0$ . В этот момент на некотором множестве  $M$  будет  $r_1(x) = r_2(x)$  и всюду вне  $r_1(x) < r_2(x)$ . Так как замкнутое множество  $M$  видно изнутри из  $O_2^0$ , то и некоторая содержащая его окрестность видна изнутри из  $O_2^0$ . Точки множества  $M$  будем называть точками вложения, а точку  $O_2^0$  будем называть полюсом.

Сдвинем точку  $O_2$  из начального положения по лучу  $L$  достаточно мало в положение  $O_2'$ . Через точку  $O_2'$  будет проходить бесконечно много плоскостей, относительно которых поверхность  $F_2$  расположена по одну сторону. Теперь мы можем двигать точку  $O_2$  из положения  $O_2'$  по целому конусу  $K$  направлений. Для каждого направления существует единственный полюс и некоторое множество точек вложения, соответствующих этому полюсу. Множество полюсов, соответствующих конусу  $K$ , составляет некоторую поверхность  $\sigma$ . Докажем, что поверхность  $\sigma$  обладает тем свойством, что каждой ее точки можно с одной стороны коснуться шаром конечного радиуса, т. е. через каждую точку поверхности  $\sigma$  проходит шар конечного радиуса так, что все остальные точки этой поверхности лежат вне или на границе этого шара.

Действительно, пусть  $O_2$  — некоторый полюс, а  $x_2$  — одна из точек вложения, соответствующих этому полюсу. Тогда  $O_2x_2 = O_1x_1$ , где  $x_1$  — точка на  $F_1$ , соответствующая по изометрии точке  $x_2$ . Пусть  $O_2'$  — произвольный полюс, отличный от  $O_2$ . Тогда  $O_2'x_2 \geq O_1x_1$ ; значит,  $O_2'x_2 \geq O_2x_2$ . Отсюда следует, что все полюса лежат вне или на поверхности шара радиуса  $O_2x_2$  с центром в точке  $x_2$ . Из этого свойства поверхности  $\sigma$  вытекает, что на ней есть гладкие точки (см., например, [28]).

Пусть  $O_2$  — гладкая точка поверхности  $\sigma$ . Покажем, что тогда полюсу  $O_2$  соответствует лишь одна точка вложения  $x_2$ , т. е. множество  $M$  состоит в этом случае из одной единственной точки.

Действительно, предположим противное: пусть полюсу  $O_2$  соответствуют, по крайней мере, две точки вложения  $x_2$  и  $x_2'$ . Но тогда  $\sigma$  должна лежать вне шара радиуса  $O_2x_2$  с центром в  $x_2$  и вне шара радиуса  $O_2x_2'$  с центром в  $x_2'$ . Следовательно, точка  $O_2$  должна быть «угловой», чего не может быть, так как  $O_2$  — гладкая точка  $\sigma$ .

Пусть  $x_1$  — точка на  $F_1$ , соответствующая по изометрии точке  $x_2$ . Тогда для точек  $x_1$  и  $x_2$  имеет место равенство  $O_1x_1 = O_2x_2$ , а для всех точек  $x$ , близких к  $x_1$  и  $x_2$  и соответствующих по изометрии, будет  $O_1x < O_2x$ .

Движением совместим поверхности  $F_1$  и  $F_2$  так, чтобы совпали отрезки  $O_1x_1$  и  $O_2x_2$ . Совмещенное положение точек  $O_1$  и  $O_2$  обозначим через  $O$ . Тогда точка  $O$  и точки  $x_1$  и  $x_2$  и есть те точки, о которых идет речь в лемме 1.

#### Леммы о деформации кривых.

Лемма 2. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — замкнутые выпуклые изомет-

ричные кривые на полусфере. Пусть точки  $S_1$  и  $S_2$  лежат, соответственно, внутри областей, ограниченных кривыми  $Q_1$  и  $Q_2$ . Пусть, далее,  $x_1$  и  $x_2$  — соответствующие по изометрии точки на  $Q_1$  и  $Q_2$ , а  $S_1x_1$  и  $S_2x_2$  — расстояния до них от точек  $S_1$  и  $S_2$  по поверхности сферы. Тогда если для всех точек кривых имеет место неравенство  $S_1x_1 \leq S_2x_2$ , то кривые конгруэнтны и точки  $S_1$  и  $S_2$  в них одинаково расположены.

**Лемма 3.** Пусть  $Q_2$  — плоская замкнутая выпуклая кривая и  $Q_1$  — изометричная ей замкнутая кривая в пространстве. Пусть, далее,  $x_1, y_1 \in Q_1$  и  $x_2, y_2 \in Q_2$  — соответствующие по изометрии точки кривых, а  $r(x_1, y_1)$ ,  $r(x_2, y_2)$  — расстояния между ними в пространстве. Тогда если для любых пар точек кривых имеет место неравенство  $r(x_1, y_1) \geq r(x_2, y_2)$ , то кривые  $Q_1$  и  $Q_2$  конгруэнтны.

Доказательства этих лемм даны в работах [29], [30].

## Глава II

### ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗГИБАНИИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ГРАНИЦЕЙ

#### § 1. ИЗГИБАНИЕ ОБЩИХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом параграфе будут доказаны следующие две теоремы о деформации общих выпуклых поверхностей [28], [29], [30].

**Теорема 1.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные общие выпуклые поверхности, видимые с одной стороны из точек  $O_1$  и  $O_2$  и обращенные выпуклостью в одну сторону относительно точек  $O_1$  и  $O_2$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — их границы. Пусть через точки  $O_1$  и  $O_2$  проходят такие плоскости, относительно которых, соответственно,  $F_1$  и  $F_2$  расположены в одном полупространстве. Тогда если расстояния от точек  $O_1$  и  $O_2$  до соответствующих по изометрии точек границ  $L_1$  и  $L_2$  равны, то поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны.

**Теорема 2.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные общие выпуклые поверхности с произвольными границами  $L_1$  и  $L_2$ , каждая из которых не содержит прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе (отрезки, целиком состоящие из граничных точек, допускаются). Тогда если  $F_1$  не равна  $F_2$ , то на границе  $L_1$  найдутся пары точек  $A_1, B_1$  и  $C_1, D_1$  такие, что

$$r(A_1, B_1) > r(A_2, B_2), \quad r(C_1, D_1) < r(C_2, D_2),$$

где  $A_2, B_2, C_2, D_2$  — точки на границе  $L_2$ , соответствующие по изометрии точкам  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , а  $r$  — расстояние в пространстве.

Иными словами, при изгибании общей выпуклой поверхности, не содержащей прямолинейных отрезков, оба конца которых лежат на границе, на границе найдется пара точек, расстояние

между которыми увеличивается, и найдется пара точек, расстояние между которыми уменьшается.

Из обеих этих теорем следует теорема об однозначной определенности общих замкнутых выпуклых поверхностей. Однако заметим, что при их доказательстве используется Основная лемма А. В. Погорелова (см. § 1, п. 3).

Действительно, пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные общие замкнутые выпуклые поверхности. Требуется доказать, что они равны. Возьмем на них две соответствующие по изометрии точки  $O_1$  и  $O_2$  и будем считать, что границы стянулись в точки  $O_1$  и  $O_2$ . Тогда поверхности  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют всем условиям теоремы 1: за плоскости  $P_1$  и  $P_2$  можно взять опорные плоскости в точках  $O_1$  и  $O_2$ , расстояния до соответствующих по изометрии точек границ будут равны, так как все они равны нулю. Следовательно, поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны.

Чтобы свести теорему об однозначной определенности общих замкнутых выпуклых поверхностей к теореме 2, достаточно удалить из поверхностей по одной точке, которые соответствуют по изометрии, и считать, что границы стянулись в эти точки. Тогда по теореме 2, если поверхности не равны, на границах найдутся пары точек  $A_1, B_1$  и  $C_1, D_1, A_2, B_2$  и  $C_2, D_2$  такие, что

$$r(A_1, B_1) > r(A_2, B_2), \quad r(C_1, D_1) < r(C_2, D_2).$$

Но этого не может быть, так как все расстояния между точками границ равны нулю.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что поверхности  $F_1$  и  $F_2$  не равны. Тогда, согласно лемме 1, одна поверхность может быть «вложена» в другую, т. е. будут выполнены следующие условия:

а) некоторые соответствующие по изометрии точки  $x_1 \in F_1$  и  $x_2 \in F_2$  совпадают.

б) расстояния от некоторой точки  $O$  пространства до точек  $x_1$  и  $x_2$  равны.

в) окрестности точек  $x_1$  и  $x_2$  из точки  $O$  видны с одной стороны и одновременно обращены выпуклостью или от точки  $O$  или к ней.

г) в окрестностях точек  $x_1$  и  $x_2$  для любых соответствующих по изометрии точек  $x \in F_1$  и  $x \in F_2$  имеет место неравенство  $r_1(x) < r_2(x)$ , где  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$  — соответственно расстояния от точки  $O$  до точек  $x \in F_1$  и  $x \in F_2$ .

Если точки  $x_1$  и  $x_2$  гладкие, то, в силу того, что разность  $r_1(x) - r_2(x)$  имеет в  $x_2$  экстремум, углы между отрезком  $Ox_1$  и направлениями на поверхности  $F_1$  в точке  $x_1$  должны быть равны углам между отрезком  $Ox_2$  и соответствующими по изометрии направлениями в точке  $x_2$ . Если точки  $x_1, x_2$  — конические, то касательные конусы в них должны быть равны.

Действительно, поместим в  $x_1$  и  $x_2$  единичные сферы. В пересечении с конусами получим две замкнутые выпуклые изо-

метричные кривые  $Q_1$  и  $Q_2$ . Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — точки пересечения сфер с отрезками  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . Тогда, в силу того, что разность  $r_1(x) - r_2(x)$  достигает в  $x_2$  максимума, углы, образованные отрезком  $Ox_1$ , с направлениями на поверхности в точке  $x_1$ , будут не больше углов, образованных отрезком  $Ox_2$  с соответствующими по изометрии направлениями. Но тогда расстояния от точки  $S_1$  до точек кривой  $Q_1$  по поверхности сферы будут не больше расстояний от  $S_2$  до соответствующих точек кривой  $Q_2$ . В силу леммы 2 заключаем, что  $Q_1$  и  $Q_2$  равны, а следовательно, равны и конусы.

Если хотя бы одна из точек  $x_1, x_2$  ребристая, то углы, образованные прямой, которая соответствует ребру, с отрезком  $Ox_1$  должны быть равны углом, образованным соответствующей прямой в точке  $x_2$  с отрезком  $Ox_2$ . Движением поверхности  $F_1$  совместим соответствующие по изометрии направления в точках  $x_1$  и  $x_2$  (если хотя бы одна из точек  $x_1, x_2$  ребристая, то совместим направления, соответствующие ребру). Совмещенные точки обозначим через  $x_0$ . Тогда будем иметь  $r_1(x_0) = r_2(x_0)$ , а для всех  $x$ , близких к  $x_0$  и соответствующих по изометрии,  $r_1(x) < r_2(x)$ .

Покажем, что такое вложение для выпуклых поверхностей невозможно. Рассмотрим поверхность  $F$  с радиусом-вектором

$$r(x) = \frac{1}{2} [r_1(x) + r_2(x)].$$

Для всех  $x$ , близких к  $x_0$ , она будет представлять собой выпуклую поверхность, обращенную выпуклостью в ту же сторону, что и поверхности  $F_1$  и  $F_2$ . Точка  $x_0$  на поверхности  $F$  не может, в силу неравенства  $r_1(x) < r_2(x)$ , принадлежать плоской окрестности. Следовательно, и на  $F$  она также не принадлежит плоской окрестности.

Векторное поле  $\tau = r_1 - r_2$  будет изгибающим для поверхности  $F$ , так как оно удовлетворяет условию Липшица и почти везде  $drd\tau = 0$ . А это, как показал А. Д. Александров, есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы  $\tau$  было изгибающим полем общей выпуклой поверхности [3].

Введем декартову систему координат. Осью  $z$  направим по отрезку  $Ox_0$ , за плоскость  $x, y$  возьмем плоскость, перпендикулярную отрезку  $Ox_0$  и проходящую через точку  $O$ . Подвергнем поверхность  $F$  проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Получим выпуклую поверхность  $F'$ , однозначно проектирующуюся на плоскость  $x, y$ . Векторное поле  $\tau(\xi, \eta, \zeta)$  подвергнем

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

Это векторное поле  $\tau'$ , по теореме Дарбу—Зауэра [36] будет изгибающим для поверхности  $F'$ . Так как  $x_0$  не принадлежала плоской окрестности на  $F$ , то соответствующая ей точка на  $F'$  также не будет принадлежать плоской окрестности.

Радиальная составляющая поля  $\tau$  по радиусу  $r$  будет равна

$$\frac{(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}{|r_1 + r_2|} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{|r_1 + r_2|}.$$

В точке  $x_0$ , в силу  $r_1^2 - r_2^2 = 0$ , она равна нулю, а во всех точках, близких к  $x_0$ , меньше нуля. Составляющая поля  $\tau'$  по оси  $z$  равна

$$\zeta' = \frac{r_1^2 - r_2^2}{z_1 + z_2}.$$

Следовательно, в точке  $x_0$  она равна нулю, а во всех точках, близких к  $x_0$ , больше нуля, чего не может быть в силу Основной леммы А. В. Погорелова (§ 1, п. 3). Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим противное. Допустим, например, что для любых точек  $x_1, y_1 \in L_1$  имеет место неравенство  $r(x_1, y_1) \leq r(x_2, y_2)$ . Возьмем на  $L_1$  произвольную точку  $O_1$ . Соответствующую ей точку на  $L_2$  обозначим через  $O_2$ . Рассмотрим расстояние  $r_2(x)$  от точки  $O_2$  до точки  $x \in F_2$ . Расстояние от точки  $O_1$  до точки, соответствующей точке  $x$  по изометрии, обозначим через  $r_1(x)$ . Возможны следующие три случая:

- 1)  $r_1(x) = r_2(x)$  для всех  $x \in F_2$ ;
- 2) на  $F_2$  найдется множество  $G$ , на котором  $r_1(x) > r_2(x)$ ;
- 3) для всех  $x \in F_2$  имеет место неравенство  $r_1(x) \leq r_2(x)$ .

Если имеет место первый случай, то, как известно, поверхности равны.

Рассмотрим второй случай. Так как для точек границ поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  выполняется неравенство  $r_1(x) \leq r_2(x)$ , а для точек  $G$  имеет место  $r_1(x) > r_2(x)$ , то на границе множества  $G$  будет  $r_1(x) = r_2(x)$ .

Но тогда части поверхностей, соответствующие множествам  $G$  с присоединенными граничными точками, удовлетворяют условиям леммы I и, следовательно, допускают «вложение». Но, как следует из доказательства теоремы 1, такое вложение невозможно, так как фактически доказательство теоремы I как раз и состоит в доказательстве невозможности такого вложения.

Рассмотрим третий случай. Пусть для всех точек поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  имеет место неравенство  $r_1(x) \leq r_2(x)$ . Будем перемещать точку  $O_1$  по границе  $L_1$  так, чтобы она пробегала все точки границы  $L_1$ . Точка  $O_2$  будет тогда перемещаться по  $L_2$ . Может случиться, что найдутся положения  $O_1'$  и  $O_2'$  точек  $O_1$

и  $O_2$ , при которых хотя бы для одной точки  $r_1(x) > r_2(x)$ , тогда приходим к случаю 2.

В противном случае неравенство  $r_1(x) \leq r_2(x)$  будет иметь место для всех точек поверхностей и любого положения точек  $O_1$  и  $O_2$  на границах  $L_1$  и  $L_2$ .

Возьмем тогда за точки  $O_1$  и  $O_2$  произвольные, соответствующие по изометрии точки на поверхностях  $F_1$  и  $F_2$ , не лежащие на границах. Снова рассмотрим расстояния  $r_1(x)$  и  $r(x)$  от  $O_1$  и  $O_2$  до соответствующих по изометрии точек. Для точек границ  $L_1$  и  $L_2$ , в силу сказанного выше, будет выполняться неравенство  $r_1(x) \leq r_2(x)$ . Если найдется на поверхности точка  $x_1$ , для которой  $r_1(x) > r_2(x)$ , то приходим снова к случаю 2.

В противном случае для всех пар точек  $x_1, y_1 \in F_1$  и соответствующих им пар  $x_2, y_2 \in F_2$  будет выполняться неравенство

$$r(x_1, y_1) \leq r(x_2, y_2). \quad (1)$$

Покажем, что в этом случае поверхности совпадают локально, а тогда будет следовать, что они равны и в целом.

Пусть  $A_1$  — точка на  $F_1$ ,  $A_2$  — соответствующая ей точка на  $F_2$ . Покажем, что у точек  $A_1$  и  $A_2$  есть конгруэнтные окрестности. Рассмотрим следующие случаи:

1. Точка  $A_1$  не имеет плоской окрестности и не лежит на прямолинейном отрезке.

2. Точка  $A_1$  имеет плоскую окрестность.

3. Точка  $A_1$  лежит на прямолинейном отрезке.

В первом случае от поверхности  $F_1$  можно отрезать шапочку  $\Phi_1$  с границей  $Q_1$ , содержащую точку  $A_1$ . Пусть  $Q_2$  — кривая на  $F_2$ , соответствующая по изометрии кривой  $Q_1$  и  $\Phi_2$  — область, ею ограниченная. Кривые  $Q_1$  и  $Q_2$ , в силу неравенства (1), удовлетворяют условиям леммы 3 и, следовательно, должны быть конгруэнтны.

То же самое будет иметь место для всех сечений, не содержащих точек границы  $Q_1$  шапочки  $\Phi_1$ . А отсюда уже следует, что шапочки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  конгруэнтны.

Рассмотрим второй случай. Пусть точка  $A_1$  — плоская. Возьмем плоскую окрестность  $\Phi_1$  точки  $A_1$ . Тогда, в силу неравенства (1), окрестность  $\Phi_2$  на  $F_2$ , соответствующая  $\Phi_1$ , должна быть также плоской и, следовательно, конгруэнтна  $\Phi_1$ .

Рассмотрим третий случай. Пусть точка  $A_1$  лежит на прямолинейном отрезке  $l_1$ . Оба конца отрезка  $l_1$  по условию теоремы не могут лежать на границе  $L_1$ . Сдвинем параллельно опорную плоскость, проходящую через отрезок  $l_1$ , незначительно внутрь поверхности  $F_1$  в положение  $P$ . В сечении получим выпуклую фигуру  $\Phi$ . Через точку  $A_1$  проведем плоскость, перпендикулярную  $P$  и отрезку  $l_1$ . Прямую пересечения ее с плоскостью обозначим через  $\alpha$ . Прямая  $\alpha$  разбивает фигуру  $\Phi$  на две части. Хотя бы одна из этих частей не содержит точек границы, так как, по предположению, хотя бы один конец отрезка  $l_1$  не лежит на границе. Поэтому плоскость  $P$  можно повернуть вокруг пря-

мой  $\alpha$  так, что она отсечет от поверхности  $F_1$  шапочку  $\Phi_1$ . Но тогда, как мы уже убедились, область  $\Phi_2$  на  $F_2$ , соответствующая  $\Phi_1$ , будет конгруэнтна  $\Phi_1$ . Теорема доказана.

## § 2. СЛУЧАЙ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Для регулярных поверхностей теоремы 1 и 2 могут быть доказаны несколько иначе и проще [5], [28].

Именно невозможность вложения, утверждаемого леммой 1, доказывается с помощью Основной леммы А. В. Погорелова.

Доказательство этой леммы сложно и занимает большую часть монографии [22]. Остальная же часть доказательств довольно проста.

Поэтому мы приведем сейчас два варианта доказательства невозможности вложения для случая регулярных поверхностей в зависимости от степени их регулярности.

1. Пусть поверхности  $F_1$  и  $F_2$  дважды непрерывно дифференцируемы и имеют положительную гауссову кривизну. Прием, который будет применен, заслуживает некоторого внимания, так как при этом применяется уравнение Дарбу. Это уравнение известно очень давно и представляло, казалось бы, самый естественный аппарат для доказательства теорем неизгибаемости выпуклых поверхностей, но до сих пор такие доказательства не были получены.

Пусть поверхность  $F$  видна из точки  $O$  с одной стороны (изнутри, извне). Введем сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  с центром  $O$ . Пусть  $u, v$  — параметры на поверхности, так что поверхность задается функциями

$$r(u, v), \theta(u, v), \varphi(u, v).$$

Известно, что если поверхность дважды дифференцируема, то расстояние  $r(u, v)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению типа Монжа—Ампера с коэффициентами, зависящими только от линейного элемента поверхности. Это и есть уравнение Дарбу

для  $r(u, v)$ . Для функции  $\rho = \frac{1}{2} r^2$  оно имеет вид

$$\begin{aligned} &(\rho_{11} - E)(\rho_{22} - G) - (\rho_{12} - F)^2 + \\ &+ K[E\rho_v^2 - 2F\rho_u\rho_v + G\rho_u^2 - 2(EG - F^2)\rho] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  — ковариантные вторые производные функции  $\rho$ ,  $K$  — гауссова кривизна,  $E, F, G$  — коэффициенты первой формы.

Если поверхность имеет положительную гауссову кривизну, то уравнение будет эллиптического типа.

Пусть имеет место вложение, удовлетворяющее условиям леммы 1. Тогда уравнение Дарбу будет иметь два различных решения  $r_1$  и  $r_2$ , разность которых имеет максимум (минимум), равный нулю внутри области задания. А этого не может быть, в силу теоремы А. Д. Александрова (см. § 1, п. 2).

2. Пусть поверхности  $F_1$  и  $F_2$  трижды дифференцируемы и имеют положительную гауссову кривизну.

Пусть имеет место вложение в соответствующих по изометрии точках  $x_1$  и  $x_2$ .

При доказательстве леммы 1 показано, что различным полюсам соответствуют различные точки вложения, а полюсов бесконечно много, значит на поверхностях  $F_1$  и  $F_2$  будет бесконечно много точек вложения. Легко показать, что точка вложения соответствует точкам конгруэнтности поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ . Следовательно, на  $F_1$  и  $F_2$  будет бесконечно много точек конгруэнтности. А это противоречит тому, что они должны лежать изолированно (см. § 1, п. 1).

### § 3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ОБЩИХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом параграфе будут доказаны две теоремы о бесконечно малых изгибаниях общих выпуклых поверхностей, аналогичные теоремам 1 и 2.

**Теорема 3.** Пусть  $F$  — общая строго выпуклая поверхность с произвольной границей  $L$ . При нетривиальном бесконечно малом изгибании поверхности  $F$  на границе  $L$  найдутся пары точек  $A, B$  и  $C, D$  такие, что при  $t=0$

$$r(A, B) > 0, \dot{r}(C, D) < 0,$$

где  $r$  — расстояние в пространстве, а точка означает дифференцирование по времени. Из теоремы 3 следует

**Теорема 4.** Замкнутая строго выпуклая поверхность — жесткая. Действительно, достаточно из замкнутой поверхности удалить одну точку и применить теорему 3.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая

**Лемма 4.** Пусть  $Q$  — плоская замкнутая выпуклая кривая не содержащая прямолинейных отрезков. Пусть  $x, y$  — произвольные точки кривой  $Q$ . Тогда если длины всех дуг кривой  $Q$  стационарны, то при  $t=0$  из неравенства  $\dot{r}(x, y) \geq 0$  следует  $\dot{r}(x, y) = 0$ .

Для конечных изгибаний эта лемма доказана в [29]. Доказательство для бесконечно малых изгибаний аналогично, достаточно лишь конечные приращения заменить скоростями.

**Доказательство теоремы 3.** Пусть  $\tau$  — изгибающее поле поверхности  $F$ . Предположим противное. Пусть для всех  $x, y \in L$  при  $t=0$  имеет место либо  $r(x, y) \geq 0$ , либо  $\dot{r}(x, y) \leq \leq 0$ . Для определенности предположим, что на  $L$   $\dot{r}(x, y) \geq 0$ . Возьмем на  $L$  произвольную точку  $O$ . Пусть  $x$  — произвольная точка  $F$ , а  $r(x)$  — расстояние ее от точки  $O$ . Возможны следующие три случая (при  $t=0$ ).

1. Для всех  $x \in F$  будет  $r(x) = 0$ .

2. На  $F$  найдется множество  $G$ , на котором  $\dot{r}(x) < 0$ .

3. Для всех  $x \in F$  справедливо неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$ . Если имеет место первый случай, то поле  $\tau$  тривиально.

Рассмотрим второй случай. Так как для точек  $L$  имеет место неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$ , а для точек  $G$   $\dot{r}(x) < 0$ , то на границе  $G$  будет  $\dot{r}(x) = 0$ .

Пусть  $P$  — опорная плоскость к поверхности  $F$  в точке  $O$ . Присоединяя к полю  $\tau$  подходящий перенос в направлении, перпендикулярном плоскости  $P$ , легко добиться того, что радиальная составляющая  $\dot{r}_1$  будет всюду  $\geq 0$  и хотя бы в одной внутренней точке  $\dot{r}_1 = 0$ . Действительно, пусть  $a$  — вектор переноса, перпендикулярный  $P$  и направленный в полупространство, в котором расположена  $F$ . Радиальные его составляющие во всех точках положительны. Поэтому можно подобрать  $a$  так, что радиальные составляющие  $\dot{r}_1$  векторов  $\tau_1 = \tau + a$  будут всюду  $\geq 0$  и хотя бы где-нибудь внутри  $\dot{r}_1 = 0$ .

Введем декартову систему координат, взяв за плоскость  $x, y$  плоскость  $P$ .

Подвергнем поверхность  $F$  проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Поле  $\tau_1$  подвергнем преобразованию

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\xi}{z}.$$

Полученное поле  $\tau_2$  будет изгибающим для преобразований поверхности  $F_1$ . Радиальная составляющая поля  $\tau_2$  равна

$$\frac{\dot{r}r}{|r|}.$$

Составляющая поля  $\tau_2$  по оси  $z$  равна

$$\varphi' = \frac{\dot{r}r}{z}.$$

Поэтому для всех точек  $F_1$  будет  $\zeta' > 0$  и хотя бы для одной внутренней точки  $\zeta' = 0$ . Но тогда поверхность  $z = \xi'(x, y)$  будет иметь точки строгой выпуклости, что невозможно, в силу основной леммы А. В. Погорелова § 1, п. 3.

Рассмотрим третий случай. Пусть для всех точек поверхности  $F$  имеет место  $r(x) \geq 0$ . Будем перемещать точку  $O$  по границе  $L$  так, чтобы она пробегала все точки  $L$ . Может случиться, что найдется положение  $O$  точки  $O$ , для которого, хотя бы для одной точки  $x$ , будет  $r(x) < 0$ , тогда приходим к случаю 2. В противном случае неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$  будет

иметь место для любой точки  $x \in F$  и любого положения  $O$  на границе.

Пусть теперь точка  $O$  пробегает все точки  $F$ . Для точек границы  $\dot{r}(x) \geq 0$ . Поэтому, если найдется точка  $x \in F$ , для которой  $\dot{r}(x) < 0$ , снова приходим к случаю 2. В противном случае для всех пар точек  $x, y$  поверхности  $F$  будет справедливо неравенство  $\dot{r}(x) \geq 0$ .

Покажем, что поле  $\tau$  в этом случае локально тривиально. Отсюда уже будет следовать, что оно тривиально и на всей поверхности.

Пусть  $x$  — произвольная точка  $F$ . Отсечем некоторой плоскостью  $\alpha$  шапочку  $P$ , содержащую  $x$ . Край шапочки  $Q$  является плоской выпуклой кривой, удовлетворяющей условиям леммы 4. Следовательно, для любых  $x, y \in Q$  будет  $\dot{r}(x, y) = 0$ . То же имеет место для любого сечения шапочки  $P$ , не содержащего точек  $Q$ . А из этого уже следует, что поле  $\tau$  тривиально на шапочке  $P$ .

**Теорема 4.** Пусть  $F$  — общая выпуклая поверхность с границей  $L$ , не содержащая плоских областей и видная с одной стороны из точки  $O$ . Пусть существует проходящая через  $O$  плоскость, относительно которой поверхность  $F$  расположена в одном полупространстве. Тогда если все расстояния от точки  $O$  до точек границы  $L$  стационарны, то поверхность  $F$  — жесткая.

Для случая регулярных поверхностей эта теорема доказана в [5], для случая общих поверхностей А. В. Погореловым в [22] и является простым следствием Основной леммы.

Действительно, пусть  $\tau$  — изгибающее поле поверхности  $F$ , а  $r(x)$  — расстояние от точки  $O$  до точки  $x \in F$ . Если все  $\dot{r}(x) = 0$ , то поверхность жесткая.

В противном случае найдется множество  $G$ , на котором или  $\dot{r}(x) < 0$ , или  $\dot{r}(x) > 0$ . Для определенности будем считать  $\dot{r}(x) < 0$ . На границе множества  $G$  будет  $\dot{r}(x) = 0$ . Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями пункта 2 доказательства теоремы 3.

В самом деле, присоединяя к полю  $\tau$  подходящий перенос в направлении, перпендикулярном плоскости  $P$ , добиваемся того, что радиальная составляющая  $\dot{r}(x)$  будет всюду больше нуля и хотя бы где-нибудь внутри  $\dot{r}(x) = 0$ . Прделав, как и в пункте 2, проективное преобразование, приходим к противоречию с Основной леммой А. В. Погорелова (§ 1, п. 3).

#### § 4. СЛУЧАЙ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Как и в случае конечных изгибаний для регулярных поверхностей, доказательство теорем 3 и 4 упрощается и конечные рассуждения могут быть проведены без Основной леммы и различ-

ными способами в зависимости от степени регулярности поверхности. Все сводится к тому, чтобы показать, что радиальная составляющая изгибающего поля не может иметь максимума (минимума), равного нулю.

1. Пусть поверхность  $F$  — дважды дифференцируема и имеет положительную гауссову кривизну. Скорость  $r$  изменения расстояния  $r$  при бесконечно малом изгибании поверхности удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, которое можно получить, если принять в уравнении Дарбу  $r$  за функцию времени и продифференцировать уравнение по  $t$ .

Для поверхности положительной кривизны, видной из начала с одной стороны, это уравнение будет эллиптического типа. Но как показал А. Д. Александров, линейное однородное уравнение эллиптического типа не может иметь отличного от нуля решения, которое в области, где оно определено, не меняет знака и обращается в нуль где-нибудь внутри области.

2. Пусть поверхности трижды дифференцируемы и имеют положительную гауссову кривизну. При доказательстве теоремы 4, присоединяя к изгибающему полю подходящий параллельный перенос, мы получили точку, для которой  $r=0$ , а вне  $r>0$ . Таких параллельных переносов можно присоединить бесконечно много. Каждому такому переносу будут соответствовать различные точки, для которых  $r=0$ , а вне  $r>0$ . Легко показать, что эти точки являются стационарными точками поверхности. Следовательно, на поверхности получим бесконечно много стационарных точек, что противоречит (п. 1, § 1).

## § 5. ОБ ИЗГИБАНИИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ДАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ПОЛОСОЙ

В работе [7] доказана теорема об изгибании регулярной выпуклой поверхности с краем  $L$  с заранее данной граничной полосой вдоль края. Граничной полосой вдоль края называется поверхностная полоса вдоль края  $L$ , нормальными которой являются нормали к поверхности.

Показано, что две изометричные поверхности  $F_1$  и  $F_2$  с границами  $L_1$  и  $L_2$  равны, если поверхностные полосы вдоль границ плоские; касаются некоторой сферы (причем границы  $L_1$  и  $L_2$  лежат на сфере), цилиндрические или конические.

Рембсом доказана жесткость регулярной выпуклой поверхности при условии, что в начальный момент изгиба коническая полоса остается конической [35].

Эти результаты имеют место и для случая общих выпуклых поверхностей.

Дадим точную формулировку результатов. Рассмотрим сначала случай, когда полоса коническая и цилиндрическая. Случай плоской и сферической полосы будут рассмотрены в конце.

Пусть  $F$  — выпуклая поверхность с границей  $L$ . Опорной плоскостью к  $F$  в точке  $x_0$  на границе  $L$  назовем плоскость  $P$ , проходящую через точку  $x_0$ , относительно которой  $F$  лежит в одном полупространстве, и плоскость  $P$  содержит хотя бы одну образующую касательного конуса к  $F$  в точке  $x_0$ .

**Теорема 5.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные выпуклые поверхности с границами  $L_1$  и  $L_2$  ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках границ  $L_1$  и  $L_2$  проходят через некоторые точки  $O_1$  и  $O_2$ , соответственно, причем  $F_1$  и  $F_2$  обращены выпуклостью в одну сторону относительно точек  $O_1$  и  $O_2$ . Тогда поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны.

**Теорема 6.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — выпуклые поверхности с границами  $L_1$  и  $L_2$  ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках границ  $L_1$  и  $L_2$  огибают цилиндры. Тогда поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны. Имеют место также аналогичные теоремы жесткости.

**Теорема 7.** Пусть  $F$  — выпуклая поверхность с границей  $L$  ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках границы  $L$  проходят через некоторую точку  $O$ . Возьмем на  $L$  произвольную точку  $x$ . Обозначим через  $\alpha$  угол между произвольной нормалью к опорной плоскости в точке  $x$  и отрезком  $Ox$ . В начальный момент он равен  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда если при бесконечно малом изгибании  $\dot{\alpha} = 0$ , то поверхность  $F$  жесткая вне плоских областей. Точка означает дифференцирование по времени при  $t = 0$ .

**Теорема 8.** Пусть  $F$  — выпуклая поверхность с границей  $L$  ограниченной вариации поворота. Пусть опорные плоскости в точках  $L$  огибают цилиндр. Обозначим через  $\alpha$  угол между произвольной нормалью к опорной плоскости в точке границы  $L$  и образующей цилиндра, проходящей через эту точку. В начальный момент  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Тогда если  $\dot{\alpha} = 0$ , то поверхность  $F$  жесткая вне плоских областей.

**Доказательство теоремы 5.** Будем, для определенности, считать, что поверхности  $F_1$  и  $F_2$  обращены выпуклостью от точек  $O_1$  и  $O_2$ . Обозначим через  $K_1$  и  $K_2$  конусы с вершинами в точках  $O_1$  и  $O_2$  и направляющими  $L_1$  и  $L_2$ . Площади сферических изображений кривых  $L_1$  и  $L_2$  равны нулю, так как сферические изображения кривых  $L_1$  и  $L_2$  представляют собой границы сферических изображений выпуклых конусов  $K_1$  и  $K_2$ . Повороты любых соответствующих дуг кривых  $L_1$  и  $L_2$  со стороны поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  равны по изометрии. А так как сумма правого и левого поворотов кривой на поверхности равна площади ее сферического изображения, то и повороты соответствующих дуг кривых  $L_1$  и  $L_2$  на конусах  $K_1$  и  $K_2$  также равны.

Развернем конусы  $K_1$  и  $K_2$  на плоскость, предварительно разрезав их по соответствующим образующим. Кривые  $L_1$  и  $L_2$

перейдут при этом в плоские кривые  $L_1'$  и  $L_2'$ , у которых соответствующие по изометрии дуги будут иметь одинаковые повороты.

Так как плоская кривая однозначно определяется поворотом, заданным как функция длины дуги, то кривые  $L_1'$  и  $L_2'$  будут конгруэнтны. Пусть  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$  — концы кривых  $L_1'$  и  $L_2'$ . Тогда расстояния между точками  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$  будут равны. Рассмотрим треугольники  $O_1A_1B_1$  и  $O_2A_2B_2$ . Они равнобедренные, так как  $O_1A_1 = O_1B_1$  и  $O_2A_2 = O_2B_2$ . Кроме того, их основания  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  равны. Углы при вершинах  $O_1$  и  $O_2$  также равны, в силу изометрии поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ . Следовательно, треугольники  $O_1A_1B_1$  и  $O_2A_2B_2$  равны. Но тогда равны все расстояния  $r_1(x)$  и  $r_2(x)$  от точек  $O_1$  и  $O_2$  до соответствующих по изометрии точек  $x$  на кривых  $L_1'$  и  $L_2'$ , а следовательно, и кривых  $L_1$  и  $L_2$ . Теперь равенство поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  следует из теоремы 1.

Доказательство теоремы 6. Обозначим через  $C_1$  и  $C_2$  цилиндры, которые огибают опорные плоскости в точках границ  $L_1$  и  $L_2$ . Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — соответствующие по изометрии образующие этих цилиндров, проходящие через соответствующие по изометрии точки  $x_1$  и  $x_2$  на границах  $L_1$  и  $L_2$ .

Возьмем на  $l_1$  и  $l_2$  точки  $a_1$  и  $a_2$  на одинаковом расстоянии от точек  $x_1$  и  $x_2$  так, чтобы из них поверхности  $F_1$  и  $F_2$  были видны с одной стороны, например, изнутри. Проведем через  $a_1$  и  $a_2$  плоскости  $P_1$  и  $P_2$ , перпендикулярные к образующим. Части цилиндров между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$  и границами  $L_1$  и  $L_2$  развернем на плоскость, разрезав предварительно их по отрезкам  $x_1a_1$  и  $x_2a_2$ . Границы  $L_1$  и  $L_2$  перейдут в некоторые плоские кривые  $L_1'$  и  $L_2'$ , у которых расстояния до концов от некоторой прямой  $\alpha$  будут равны.

Площади сферических изображений границ  $L_1$  и  $L_2$  равны нулю, повороты соответствующих дуг со стороны поверхностей равны, следовательно, повороты соответствующих дуг плоских кривых  $L_1'$  и  $L_2'$  также равны. Но тогда кривые  $L_1'$  и  $L_2'$  конгруэнтны. А так как расстояния до концов  $L_1'$  и  $L_2'$  от некоторой прямой  $\alpha$  равны, то расстояния от прямой  $\alpha$  до всех соответствующих по изометрии точек на  $L_1'$  и  $L_2'$  также равны.

Следовательно, у поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  расстояния до соответствующих по изометрии точек границ от некоторой плоскости равны. Но тогда, как известно, поверхности  $F_1$  и  $F_2$  конгруэнтны [21]. Доказательства соответствующих теорем жесткости 3 и 4 аналогичны, достаточно лишь конечные приращения заменить на скорости.

Доказательство теоремы 7. Пусть  $F$  — выпуклая поверхность и  $L$  — ее граница. Обозначим через  $K$  конус, который огибают опорные плоскости к границе  $L$ . Пусть  $\omega$  — площадь сферического изображения дуги границы  $L$ . В начальный момент времени  $\omega = 0$ . Из условия  $\dot{\alpha} = 0$  следует  $\dot{\omega} = 0$ . Следовательно,  $\dot{\omega} = \dot{P}_1 + \dot{P}_2$ , где  $P_1$  — поворот дуги кривой  $L$

со стороны поверхности, а  $P_2$  — поворот той же дуги на конусе  $K$ . Но  $\dot{P}_1=0$ . Следовательно,  $\dot{P}_2=0$ . Таким образом, повороты всех дуг кривой  $L$  на конусе  $K$  стационарны. Разрежем конус  $K$  по произвольной образующей  $OA$  и развернем на плоскость. Кривая  $L$  перейдет в плоскую кривую  $L'$ , у которой при бесконечно малом изгибании повороты всех дуг стационарны. Следовательно,  $L'$  в начальный момент времени перемещается как твердое целое и расстояние между ее концами стационарно. Рассмотрим треугольник  $OAA$ . Скорость изменения длин его сторон  $OA$  и  $OA$  одна и та же и равна скорости изменения длины образующей  $OA$  конуса  $K$ . Длина же стороны  $AA$  стационарна. Кроме того, угол  $AOA$  стационарен, так как угол при вершине конуса  $K$  при бесконечно малом изгибании стационарен. Следовательно, скорость изменения сторон  $OA$  равна нулю. Тогда скорость изменения всех расстояний  $r(x)$  от точки  $O$  до точек кривой  $L'$ , а следовательно, и  $L$  равна нулю. Но при этих условиях, как известно, поверхность  $F$  жесткая вне плоских областей.

Доказательство теоремы 8. Пусть  $F$  — выпуклая поверхность с границей  $L$ . Обозначим через  $C$  цилиндр, который огибают опорные плоскости в точках границы  $L$ . Возьмем на произвольной образующей цилиндра  $C$  точку  $a$  и проведем через нее плоскость  $P$ , перпендикулярно к образующей. Будем, для определенности, считать, что поверхность  $F$  обращена выпуклостью от точки  $a$ .

Пусть  $\omega$  — площадь сферического изображения дуги границы  $L$ . В начальный момент времени  $\omega=0$ . Из условия  $\dot{\alpha}=0$  следует  $\dot{\omega}=0$ . Следовательно,  $\dot{P}=0$ , где  $P$  — поворот дуги границы  $L$  со стороны цилиндра  $C$ . Разрежем цилиндр  $C$  по образующей  $ax$ , где  $x$  — точка на границе  $L$ , через которую проходит образующая. Развернем часть цилиндра  $C$  между плоскостью  $P$  и границей  $L$  на плоскость. Кривая  $L$  перейдет в некоторую плоскую кривую  $L'$ , у которой каждая дуга имеет стационарный поворот. Следовательно, в начальный момент времени кривая  $L'$  двигается как твердое целое.

Присоединим к изгибающему полю поверхности  $F$  поле параллельного переноса вдоль образующих цилиндра  $C$  такое, чтобы длина отрезка  $ax$  была стационарна. Следовательно, высоты всех точек кривой от некоторой прямой  $a$  будут стационарны. Это значит, что высоты всех точек границы  $L$  от плоскости  $P$  стационарны. Но тогда поверхность  $F$  жесткая вне плоских областей [25].

Рассмотрим случаи, когда граничные полосы плоские и сферические. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные поверхности с границами  $L_1$  и  $L_2$ . Пусть опорные плоскости в точках границ  $L_1$  и  $L_2$  лежат соответственно в одной плоскости. Тогда сферические

изображения поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  равны  $4\pi$ . Но тогда, как известно, поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны.

Имеет место соответствующая теорема жесткости.

**Теорема 9.** Пусть  $F$  — выпуклая поверхность с границей  $L$ , у которой опорные плоскости в точках границы  $L$  лежат в одной плоскости  $P$ . Пусть  $\alpha$  — угол между нормалью к любой опорной плоскости в точке на  $L$  и плоскостью  $P$ . В начальный момент он равен нулю. Тогда если  $\dot{\alpha}=0$ , то поверхность  $F$  жесткая вне плоских областей.

Действительно, граница  $L$  является плоской кривой. В силу условия  $\dot{\alpha}=0$ , она обладает тем свойством, что поворот любой ее дуги стационарен. Следовательно, в начальный момент времени расстояние между любыми двумя точками кривой  $L$  стационарно. Если присоединить к  $F$  плоскую область, ограниченную кривой  $L$ , то получим замкнутую выпуклую поверхность со стационарной метрикой. Как доказано в [22], она жесткая вне плоских областей.

Пусть граничная полоса сферическая. Прежде всего заметим, что если поверхности  $F_1$  и  $F_2$  имеют границы  $L_1$  и  $L_2$ , лежащие в открытой полусфере, то условие касания опорных плоскостей на границе сферы лишнее. Действительно, пусть границы  $L_1$  и  $L_2$  лежат в открытой полусфере. Рассмотрим расстояния от центра сферы до соответствующих по изометрии точек границ  $L_1$  и  $L_2$ . Они все равны единице и, значит, равны. Но тогда поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны. Если границы  $L_1$  и  $L_2$  выходят за границы полусферы, то, в силу того, что опорные плоскости на границе касаются сферы, следует равенство соответствующих по изометрии поворотов любых дуг кривых  $L_1$  и  $L_2$  на сфере. В силу того, что на сфере кривая так же, как и на плоскости, однозначно определяется поворотом, заданным как функция длины дуги, следует, что  $L_1$  и  $L_2$  конгруэнтны. Следовательно, поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны. Соответствующие теоремы жесткости доказываются аналогично.

### Глава III

## НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

### § 1. НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Проблемы однозначной определенности и жесткости замкнутых выпуклых поверхностей трехмерного пространства решены А. В. Погореловым [21], [22].

В настоящей работе аналогичный результат устанавливается для гиперповерхностей  $n$ -мерного евклидова пространства.

Сначала вопрос об однозначной определенности и жесткости решается для замкнутых выпуклых гиперповерхностей, затем этот результат используется для доказательства локальной однозначной определенности и жесткости.

**Теорема 10.** Изометричные гладкие замкнутые выпуклые гиперповерхности равны.

**Теорема 11.** Замкнутая выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности  $n-1$ , — жесткая. Если она содержит плоские области, то жесткая вне плоских областей.

**Теорема 12.** Пусть  $F_1$  — гладкая выпуклая гиперповерхность и  $P_1$  — точка ее строгой выпуклости. Пусть  $F_2$  — гладкая выпуклая гиперповерхность, изометричная  $F_1$ , и  $P_2$  — точка, соответствующая по изометрии  $P_1$ . Тогда достаточно малые окрестности точек  $P_1$  и  $P_2$  конгруэнтны.

**Теорема 13.** Выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности  $n-1$ , жесткая в окрестности каждой точки строгой выпуклости. Если она содержит плоские области, то жесткая вне плоских областей.

**Доказательство теоремы 10.** Прежде всего, заметим, что лемма 1 (о вложении) (гл. 1) имеет место и для гиперповерхностей. Доказательство совершенно аналогично, достаточно лишь слово поверхность заменить на гиперповерхность.

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — выпуклые замкнутые изометричные гиперповерхности. Если они не равны, то, согласно лемме о вложении, они могут быть приведены в такое расположение, при котором будут выполнены условия: некоторые соответствующие по изометрии точки на  $F_1$  и  $F_2$  совпадут в некоторой точке  $x_0$ ; расстояние от некоторой точки пространства  $O$  до всех соответствующих по изометрии точек  $x_1 \in F_1$ ,  $x_2 \in F_2$  в окрестности точки  $x_0$  удовлетворяют неравенству

$$Ox_1 \leq Ox_2;$$

некоторые окрестности точки  $x_0$  на  $F_1$  и  $F_2$  видны изнутри из точки  $O$ . Поворотом гиперповерхности  $F_2$  вокруг отрезка  $Ox_0$  совместим соответствующие направления на  $F_1$  и  $F_2$ .

Рассмотрим гиперповерхность  $\Phi$  с радиусом-вектором

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы-векторы, идущие в соответствующие по изометрии точки гиперповерхностей  $F_1$  и  $F_2$ .

Поверхность  $\Phi$  в окрестности точки  $x_0$  будет выпуклой, что для случая двумерных поверхностей доказано в работе А. В. Порогелова [21].

Предположим, что в некоторой точке  $x^*$  на  $F_1$ , близкой к  $x_0$ , происходит нарушение локальной выпуклости поверхности  $\Phi$ .

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — касательные гиперплоскости в точках  $x^*$  на  $F_1$  и  $F_2$ . Обозначим через  $n$  внутреннюю нормаль к гиперплоскости  $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ .

Соединим точку  $y^*$ , близкую к  $x^*$ , кратчайшей  $\gamma$  на  $F_1$ . Пусть  $r_1(s)$  — радиус-вектор точки кратчайшей  $\gamma$ , а  $r_2(s)$  — радиус-вектор соответствующей точки на  $F_2$ . Применяя теорему Либермана о выпуклости геодезической к кратчайшей  $\gamma$  и соответствующей кратчайшей на  $F_2$ , получим

$$\frac{d}{ds}(r_1 + r_2)n \geq 0$$

для всех точек кратчайшей  $\gamma$ . Отсюда следует, что для всех точек  $y^*$ , близких к  $x^*$ , будем иметь

$$[r_1(y^*) - r_1(x^*) + r_2(y^*) - r_2(x^*)]n \geq 0.$$

А это значит, что в точке  $x^*$  имеет место локальная выпуклость, что противоречит предположению.

Рассмотрим на гиперповерхности  $\Phi$  векторное поле

$$\tau = r_1 - r_2.$$

Выберем в точке  $x_0$  на  $\Phi$  два независимых направления и проведем трехмерную плоскость  $P$  так, чтобы она содержала эти направления и отрезок  $Ox_0$ .

В сечении гиперповерхности  $\Phi$  получим двухмерную выпуклую поверхность  $\sigma$ . Разложим векторное поле  $\tau$  на составляющие, одна из которых  $\tau'$  лежит в трехмерной плоскости  $P$ , а остальные перпендикулярны к ней. Очевидно, поле  $\tau'$  будет изгибающим полем  $\sigma$  в трехмерной плоскости  $P$ .

Введем декартову систему координат в плоскости  $P$ , взяв за ось  $z$  отрезок  $Ox_0$ , а за плоскость  $x, y$  — плоскость, перпендикулярную к  $Ox_0$  в точке  $O$ .

Подвергнем  $\sigma$  проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

Поле  $\tau'$  подвергнем преобразованию

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\xi}{z}.$$

Полученное поле  $\tau'_1$  будет изгибающим преобразованной поверхности  $\sigma'$ .

Радиальная составляющая поля  $\tau'_1$  равна

$$\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{|r_1 + r_2|} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{|r_1 + r_2|}.$$

Составляющая поля  $\tau'_1$  по оси  $z$

$$\zeta' = \frac{r_1^2 - r_2^2}{z}.$$

Так как в точке  $x_0$  имеет место равенство  $r_1(x_0) = r_2(x_0)$ , а в окрестности точки  $x_0$  неравенство  $r_1(x) < r_2(x)$ , то  $\zeta' = 0$  в точке  $x_0$  и  $\zeta' < 0$  в окрестности точки  $x_0$ .

Следовательно, составляющая поля  $\tau_1'$  по оси  $z$  поверхности  $\sigma'$  имеет точку строгой выпуклости, что противоречит основной лемме А. В. Погорелова. Теорема 10 доказана.

Доказательство теоремы 11. Доказательство будем вести по индукции. Двумерная замкнутая выпуклая поверхность в трехмерном пространстве жесткая вне плоских областей по теореме А. В. Погорелова.

Предположим, что  $n-2$ -мерная замкнутая выпуклая поверхность  $n-1$ -мерного пространства жесткая вне  $n-2$ -мерных плоских областей, и покажем, что  $n-1$ -мерная поверхность  $n$ -мерного пространства жесткая вне  $n-1$ -мерных областей.

Пусть  $F$  — замкнутая выпуклая гиперповерхность с плоскими областями. Возьмем две точки  $x$  и  $y$ , не принадлежащие плоским областям. Проведем через них гиперплоскость  $P$  так, чтобы она пересекала  $n-2$ -мерные ребра в точках  $x$ ,  $y$ , если они существуют. В сечении получим  $n-2$ -мерную замкнутую выпуклую поверхность  $\sigma$ , причем точки  $x$  и  $y$  не будут лежать в  $n-2$ -мерных плоских областях. Разложим поле  $\tau$  на составляющую  $\tau'$ , лежащую в  $P$ , и  $\tau_0$  — перпендикулярную к ней, которая не влияет на изменение расстояния  $r(x, y)$ . В силу предположения,  $\sigma$  — жесткая в плоскости  $P$  вне  $n-2$ -мерных плоских областей. Следовательно, расстояния между любыми парами точек  $x$ ,  $y$  на  $F$ , не принадлежащими плоским областям, стационарны. А это значит, что  $F$  — жесткая вне плоских областей.

Доказательство теорем 12 и 13. Докажем теорему 13. Пусть  $F$  — выпуклая гиперповерхность и  $P$  — точка ее строгой выпуклости. Нужно показать, что  $F$  — жесткая вне плоских областей в окрестности точки  $P$ .

Отрежем плоскостью  $Q$ , параллельной опорной плоскости в точке  $P$ , от  $F$  достаточно малую шапочку  $\omega$ . В сечении получим  $n-2$ -мерную поверхность  $F'$ , которая в  $Q$  будет жесткой вне плоских областей.

Следовательно, расстояния  $r(x, y)$  между любыми парами точек на  $F'$ , не принадлежащими плоским областям, будут стационарны.

Пусть хотя бы одна из точек  $x, y$  лежит в плоской области на  $F'$ . Если она принадлежит также плоской области  $\alpha$  и на  $F$ , то изменением изгибающего поля на  $\alpha$  можем сделать расстояние  $r(x, y)$  стационарным.

В противном случае повернем плоскость  $Q$  достаточно мало так, чтобы она пересекла плоские области на  $F'$ , в которых лежат точки  $x$  и  $y$ , и содержала точки  $x$  и  $y$ .

В сечении получим поверхность  $F''$ , на которой точки  $x$  и  $y$  уже не будут принадлежать  $n-2$ -мерным плоским областям.

Так как  $F''$  — жесткая вне плоских областей, то расстояние  $\tau(x, y)$  будет стационарным.

Шапочка  $\omega$  вместе с плоскостью основания образуют замкнутую выпуклую гиперповерхность, которая будет жесткой вне плоских областей. Следовательно, и шапочка  $\omega$  — жесткая вне плоских областей.

Докажем теорему 12. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — выпуклые гладкие изометричные гиперповерхности;  $P_1$  — точка строгой выпуклости гиперповерхности  $F_1$ , а  $P_2$  — соответствующая ей по изометрии точка на  $F_2$ .

Совместим точки  $P_1$  и  $P_2$  и соответствующие по изометрии направления в касательных гиперплоскостях в точках  $P_1$  и  $P_2$ .

Рассмотрим гиперповерхность, задаваемую радиусом-вектором

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Она, как доказано ранее, будет выпуклой и поле

$$\tau = r_1 - r_2$$

будет ее изгибающим полем. Обозначим совмещенное положение точек  $P_1$  и  $P_2$  через  $P$ . Сместим опорную гиперплоскость в точке  $P$  параллельно так, чтобы она отрезала от поверхности  $F$  шапочку  $\omega$ . Шапочка  $\omega$  будет жесткой вне плоских областей, т. е. поле тривиально вне плоских областей. Плоские области на  $\omega$  могут получаться лишь как линейная комбинация плоских областей на  $F_1$  и  $F_2$ .

Следовательно, так как области на  $F_1$  и  $F_2$ , соответствующие  $\omega$ , совпадают вне плоских областей, то они должны полностью совпадать.

## § 2. ЛОКАЛЬНАЯ НЕИЗГИБАЕМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом параграфе будут усилены теоремы локальной неизгибаемости.

Теорема 14. Выпуклая гиперповерхность, не содержащая плоских областей размерности  $n-1$ , жесткая в окрестности каждой точки, не лежащей в плоской области размерности  $n-2$  и  $n-3$ . Если же гиперповерхность содержит  $n-1$ -мерные плоские области, то она жесткая в окрестности указанных точек вне  $n-1$ -мерных плоских областей.

Теорема 15. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные гладкие выпуклые гиперповерхности. Пусть  $P_1$  — точка на  $F_1$ , не принадлежащая плоским областям размерности  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$ , а  $P_2$  — точка на  $F_2$ , соответствующая по изометрии  $P_1$ . Тогда достаточно малые окрестности точек  $P_1$  и  $P_2$  конгруэнтны.

Доказательство теоремы 14. Пусть  $x_0$  — точка гиперповерхности  $F$ , не принадлежащая плоским областям размерности  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$ . Если  $x_0$  — точка строгой выпуклости,

то, как показано в § 1, гиперповерхность в окрестности точки  $x_0$  — жесткая вне  $n-1$ -мерных плоских областей.

Покажем, что она жесткая вне  $n-1$ -мерных плоских областей в окрестности точки  $x_0$ , если  $x_0$  принадлежит плоской области размерности не выше  $n-4$ .

Доказательство будем вести по индукции. Трехмерная гиперповерхность четырехмерного пространства жесткая в окрестности точки строгой выпуклости (нуль-мерная плоская область) вне трехмерных плоских областей.

Предположим, что  $n-2$ -мерная гиперповерхность  $n-1$ -мерного пространства жесткая в окрестности точки плоской области размерности  $(n-1)-k$ , ( $k \geq 4$ ) вне  $n-2$ -мерных плоских областей и покажем, что  $n-1$ -мерная гиперповерхность  $n$ -мерного пространства жесткая в окрестности точки плоской области размерности  $n-k$ , ( $k \geq 4$ ) вне  $n-1$ -мерных плоских областей.

Пусть точка  $x_0$  гиперповерхности  $F$  принадлежит плоской области  $L$  размерности  $n-k$ , ( $k \geq 4$ ). Проведем через точку  $x_0$  гиперплоскость  $P$ , пересекающую плоскую область  $L$ . Она пересечет гиперповерхность  $F$  по некоторой  $n-2$ -мерной выпуклой поверхности  $F_1$ , причем на  $F_1$  точка  $x_0$  будет принадлежать плоской области размерности  $(n-1)-k$ , ( $k \geq 4$ ). По предположению индукции  $F_1$  будет жесткой в гиперплоскости  $P$  вне  $n-2$ -мерных плоских областей.

Покажем, что  $F_1$  будет жесткой в  $P$  и на  $n-2$ -мерных плоских областях. Пусть точки  $x$  и  $y$  на  $F_1$  не принадлежат  $n-1$ -мерной плоской области на  $F$  и хотя бы одна из них принадлежит  $n-2$ -мерной плоской области на  $F_1$ .

Повернем гиперплоскость  $P$  вокруг отрезка  $xy$  в положение  $P_1$ . Если поворот достаточно мал, то  $P_1$  пересечет плоскую область  $L$  по плоской области размерности  $(n-1)-k$ , ( $k \geq 4$ ), а гиперповерхность  $F$  по некоторой  $n-2$ -мерной поверхности  $F_2$ . На  $F_2$  точки  $x$  и  $y$  уже не будут принадлежать  $n-2$ -мерным плоскостям, так как в противном случае они должны принадлежать  $n-1$ -мерной плоской области на  $F$ .

По предположению индукции поверхность  $F_2$  жесткая вне  $n-2$ -мерных плоских областей. Следовательно, расстояние между точками  $x$  и  $y$  стационарно, а это и значит, что  $F_1$  жесткая в  $P$  и на  $n-2$ -мерных плоских областях.

Таким образом, все сечения гиперповерхности  $F$  гиперплоскостями, проходящими через точку  $x_0$  и пересекающими  $L$ , жесткие вне точек на  $n-1$ -мерных плоских областях. То же верно и для всех сечений, проходящих через любую точку, близкую  $x_0$ , и пересекающих  $L$ . А это и значит, что гиперповерхность  $F$  жесткая в окрестности точки  $x_0$  вне  $n-1$ -мерных плоских областей.

Доказательство теоремы 15. Движением совместим точки  $P_1$  и  $P_2$  так, чтобы совпали касательные гиперплос-

жости в этих точках и соответствующие по изометрии направления.

Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы-векторы гиперповерхностей  $F_1$  и  $F_2$ . Рассмотрим гиперповерхность  $\Phi$  с радиусом-вектором

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Как показано в § 1, она будет выпуклой в окрестности точки  $P$ , где  $P$  есть общее положение точек  $P_1$  и  $P_2$ . Векторное поле  $\tau = r_1 - r_2$  будет изгибающим для  $\Phi$ .

Так как точка  $P_1$  на  $F_1$  не принадлежит плоской области размерности  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$ , то и на  $\Phi$  она не будет принадлежать плоской области размерности  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$ .

По теореме 14 гиперповерхность  $\Phi$  будет жесткой в окрестности точки  $P$  вне  $n-1$ -мерных плоских областей, но  $n-1$ -мерные плоские области на  $\Phi$  получаются лишь в том случае, когда соответствующие им области на  $F_1$  и  $F_2$  также  $n-1$ -мерные и соответствуют по изометрии.

Следовательно, поле  $\tau$  будет тривиальным вне  $n-1$ -мерных плоских областей на  $\Phi$ , а это значит, что гиперповерхности  $F_1$  и  $F_2$  совпадают вне  $n-1$ -мерных плоских областей. Но тогда они совпадают и на  $n-1$ -мерных плоских областях.

#### БИБЛИОГРАФИЯ

1. Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М., Гостехиздат, 1948
2. —, Выпуклые многогранники. М., Гостехиздат, 1950.
3. —, О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей. Матем. сб., 1936, 1(43), № 3, 307—322
4. —, Об одном классе замкнутых поверхностей. Матем. сб., 1938, 4(46), № 1, 69—77
5. —, Сенькин Е. П. О неизгибаемости выпуклых поверхностей. Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 8, 3—13 (РЖМат, 1958, 6181)
6. —, Дополнение к статье «О неизгибаемости выпуклых поверхностей». Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 104—106 (РЖМат, 1958, 6184)
7. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М., «Наука», 1973, 440 с. (РЖМат, 1974, 4А567 К)
8. Бляшке В., Дифференциальная геометрия. М.-Л. ОНТИ, 1935, т. I
9. Векун И. Н., Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, 628 стр. (РЖМат, 1962, 2Б172 К)
10. Волков Ю. А., Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики. Укр. геомстр. сб., 1968, вып. 5-6, 44—69 (РЖМат, 1969, 8А538)
11. Ефимов Н. В., Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. Успехи матем. наук, 1948, т. III, вып. 2, 47—158
12. —, Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом». Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1949, 30, 1—128
13. —, О жесткости «в малом», Докл. АН СССР, 1948, 60, № 5
14. Кон-Фоссен С. Э., Изгибаемость поверхностей «в целом». Успехи матем. наук. 1936, вып. 1, 33—76

15. —, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии «в целом». М., Физматгиз, 1959, 303 стр. (РЖМат, 1960, 10919 К)
16. *Либерман И. М.*, Геодезические линии на выпуклых поверхностях. Докл. АН СССР, 1941, 32, 310—313
17. *Оловянишников С. П.*, Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках. Матем. сб., 1946, 18 (60), 441—446
18. —, Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей. Матем. сб., 1946, 18 (60), 429—440
19. *Погорелов А. В.*, Изгибание выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.-Л., 1951
20. —, Однозначная определенность выпуклых поверхностей. Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, изд. АН СССР, 1949, 29, 1—100
21. —, Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Изд. АН УССР, 1952
22. —, Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Харьков, Харьковск. ун-т, 1959
23. —, Некоторые вопросы геометрии «в целом» в римановом пространстве. Харьков, Харьковск. ун-т, 1957, 90 стр. (РЖМат, 1958, 7159 К)
24. —, Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Харьков, Харьковск. ун-т, 1960, 92 стр. (РЖМат, 1961, 3А411 К)
25. —, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969, 759 стр. (РЖМат, 1969, 9А495 К)
26. *Решетняк Ю. Г.*, Об одном обобщении выпуклых поверхностей. Матем. сб., 1956, 40, № 3, 381—398 (РЖМат, 1957, 6678)
27. *Сенькин Е. П.*, Однозначная определенность выпуклых многогранников. Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 211—213 (РЖМат, 1959, 3223)
28. —, Об одном свойстве изгибания выпуклых поверхностей с границей. Вести. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 173—174 (РЖМат, 1958, 6179)
29. —, Об изгибании общих выпуклых поверхностей с границей. Вести. Ленингр. ун-та, 1960, № 19, 87—94 (РЖМат, 1961, 6А537)
30. —, Однозначная определенность одного класса общих выпуклых поверхностей с границей. Вести. Ленингр. ун-та, 1961, № 19, 77—82 (РЖМат, 1962, 6А430)
31. —, О свойстве бесконечно малого изгибания общей выпуклой поверхности с границей. Укр. геометр. сб., 1966, вып. 2, 86—87 (РЖМат, 1967, 10А560)
32. —, Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей. Укр. геометр. сб., 1972, вып. 12, 131—152 (РЖМат, 1973, 2А623)
33. —, Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей». Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, 132—134 (РЖМат, 1975, 7А922)
34. —, Об изгибании выпуклой поверхности с данной граничной полосой. Укр. геометр. сб., 1977, вып. 20, 98—102 (РЖМат, 1977, 11А676)
35. *Rembs E.*, Zur Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Arch. Math., 1953, 4, № 5-6, 366—369 (РЖМат, 1955, 3980)
36. *Sauer R.*, Infinitesimale Verbiegungen zueinander proektiver Flächen. Math. Ann., 1935, 111, 71—82