A. A. Arkhipova, Time-local and time global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for a class of nonlinear non-diagonal parabolic systems,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 6, 69–102

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 6

ЛОКАЛЬНАЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ–ДИРИХЛЕ ДЛЯ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© А. А. Архипова

Введение

В работе [1] автор построил глобальное по времени обобщенное решение задачи Коши–Дирихле для *квазилинейной* параболической системы с недиагональной главной матрицей и *квадратичной нелинейностью* по градиенту. Рассматривался случай двух пространственных переменных и предполагалось, что эллиптический оператор системы имеет вариационную структуру.

Построенное в [1] решение является почти везде гладким и может иметь не более конечного числа сингулярных точек. Для построения решения использовались следующие основные факты: 1) теорема о классической локальной по времени разрешимости задачи, 2) теорема о продолжимости гладкого на некотором интервале $[0,T)$ решения на замкнутый интервал $[0,T]$, 3) свойство монотонности глобальной энергии системы. Для рассмотренных в [1] недиагональных *квазилинейных* систем локальная по времени разрешимость следует из результатов [2, 3], а монотонность энергии является следствием предположения о вариационной структуре эллиптического оператора системы. Основная аналитическая часть работы [1] состояла в доказательстве теоремы о продолжимости гладких решений на замкнутый временной интервал $[0,T]$. В ней при условии равномерной малости „локальных энергий“ прослеживались оценки гёльдеровских норм решения и его пространственных производных вплоть до $t = T$. Отметим, что работа автора [1] представляла развитие идеи работы M. Struwe [4].

Теорема о продолжимости решения на замкнутый интервал $[0,T]$ не только дает возможность построить глобальное решение, но и помогает описать сингулярное множество при $t = T_0$, если $T_0 > 0$ определяет максимальный интервал существования гладкого решения.

Ключевые слова: параболические системы, сильная нелинейность, разрешимость, краевые задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант №99-01-00684 и ЦФП „Интеграция“, грант №326.002.

Данная работа является обобщением работы [1], в ней рассматриваются *нелинейные* недиагональные параболические системы уравнений, имеющие квадратичную нелинейность по градиенту. Считая, что эллиптический оператор системы имеет вариационную структуру (или близкую к ней) в случае двух пространственных переменных, мы доказываем *глобальную* по времени обобщенную разрешимость задачи Коши–Дирихле.

Работа разделена на три параграфа. В §1 доказана теорема о продолжимости решения (теорема 1). Метод доказательства этой теоремы тот же, что и в работе автора [1], поэтому здесь мы подробно излагаем только те этапы доказательства, где возникают новые рассуждения, связанные с предположением о нелинейности эллиптического оператора системы.

В §2 доказана теорема о локальной классической разрешимости рассматриваемой в работе задачи Коши–Дирихле (теорема 4).

В §3 мы формулируем условия на данные задачи, при которых с помощью теорем 1 и 4 можно показать существование обобщенного решения задачи Коши–Дирихле на *произвольном* временном интервале (теорема 6). Это решение является гладким, за исключением, быть может, конечного числа сингулярных точек.

Отметим, что теорема о продолжимости решения и локальная теорема разрешимости доказаны при более общих предположениях о данных задачи, чем теорема о глобальной разрешимости. Эти результаты представляют, по мнению автора, самостоятельный интерес. Так, например, теорема 1 о продолжимости решения позволяет описать качественную и количественную характеристики сингулярного множества при $t = T$, если $T > 0$ определяет максимальный интервал существования гладкого решения (теорема 2).

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с $C^{2+\alpha_0}$ — гладкой границей; $x = (x_1, x_2) \in \Omega$; $Q = \Omega \times (0, T)$; $u = (u^1, u^2, \dots, u^N)$; числа $\alpha_0 \in (0,1)$ и $T > 0$ фиксированы произвольно.

В работе рассматривается задача Коши–Дирихле

$$\left.\begin{aligned} &u_t^k - (a_\alpha^k(z,u,u_x))_{x_\alpha} + b^k(z,u,u_x) = 0, \quad z = (x,t) \in Q,\\ &u^k|_{\partial' Q} = \varphi^k(z), \quad k = 1,\dots,N, \end{aligned}\right\} \tag{0.1}$$

где $\partial' Q = (\Omega \times \{0\}) \cup \partial\Omega \times (0,T)$ — параболическая граница цилиндра Q.

Будем предполагать, что для некоторой скалярной функции $f(z,u,p)$

$$a_\alpha^k(z,u,p) = \frac{\partial f(z,u,p)}{\partial p_\alpha^k}. \tag{0.2}$$

Условия на $\{a_\alpha^k\}_{\alpha\leqslant 2}^{k\leqslant N}$ опишем как требования на функцию f.

а) На множестве $\mathfrak{M} = \overline{Q} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$ $f(z,u,p)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные производные

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f_x = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right\}_{\alpha\leqslant 2}, \quad f_u = \left\{\frac{\partial f}{\partial u^m}\right\}^{m\leqslant N}, \quad f_p = \left\{\frac{\partial f}{\partial p_\alpha^k}\right\}_{\alpha\leqslant 2}^{k\leqslant N},$$

$$f_{pt} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha^k \partial t}\right\}_{\alpha\leqslant 2}^{k\leqslant N}, \qquad f_{px} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha^k \partial x_\beta}\right\}_{\alpha,\beta\leqslant 2}^{k\leqslant N},$$

$$f_{pu} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha^k \partial u^m}\right\}_{\alpha\leqslant 2}^{k,m\leqslant N}, \quad f_{pp} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha^k \partial p_\beta^l}\right\}_{\alpha,\beta\leqslant 2}^{k,l\leqslant N},$$

при этом f и ее производные удовлетворяют следующим условиям:

$$\nu_0|p|^2 - \mu_1 \leqslant f(z,u,p) \leqslant \mu_0|p|^2 + \mu_1, \tag{0.3}$$

$$|f_u| + |f_t| \leqslant \mu_2(1 + |p|^2), \tag{0.4}$$

$$|f_p| + |f_{pt}| + |f_{px}| + |f_{pu}| \leqslant \mu_2(1 + |p|), \tag{0.5}$$

$$|f_{pp}| \leqslant \mu_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p^k_\alpha}\partial\xi^l_\beta\xi^k_\alpha \geqslant \nu|\xi|^2, \ \ \xi \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{0.6}$$

где ν_0, ν, μ_0, μ_2 — положительные постоянные, $\mu_1 = \mathrm{const} \geqslant 0$.

Кроме того, предполагаем, что производные f_{px}, f_{pu}, f_{pp} непрерывны по Гёльдеру по аргументам x, t, u, p с показателями α_0, $\alpha_0/2$, α_0, α_0 соответственно на любом компакте множества $\mathfrak{M}$.

б) Относительно фукнции $b(z,u,p)$ предполагаем следующее.

На множестве $\mathfrak{M}$ функция b непрерывна вместе со своими производными $b_t = \left\{\frac{\partial b^k}{\partial t}\right\}^{k\leqslant N}$, $b_u = \left\{\frac{\partial b^k}{\partial u^m}\right\}^{k,m\leqslant N}$, $b_p = \left\{\frac{\partial b^k}{\partial p^m_\alpha}\right\}^{k,m\leqslant N}_{\alpha\leqslant 2}$ и удовлетворяет условиям

$$|b(z,u,p) - f_u(z,u,p)| \leqslant \mu_3(1 + |p|), \tag{0.7}$$

$$|b(z,u,p)| \leqslant \mu_4|p|^2 + \mu_5, \tag{0.8$_1$}$$

$$|b_t| + |b_u| + |b_p|(1 + |p|) \leqslant \mu_6(1 + |p|^2) \tag{0.8$_2$}$$

с положительными постоянными $\mu_3, \ldots, \mu_6$. (Малости параметра μ_4 в данной работе не предполагается). Условие (0.8$_1$) является следствием условий (0.4) и (0.7), но нам его удобно выписать отдельно.

Функция b непрерывна по Гёльдеру по аргументам x_1, x_2 с показателем α_0 на любом компакте множества $\mathfrak{M}$.

В частности, если

$$b(z,u,p) = f_u(z,u,p), \tag{0.9}$$

то считаем выполненными условия а) со следующим дополнением: на $\mathfrak{M}$ существуют непрерывные производные f_{ux}, f_{ut}, f_{uu} и

$$|f_{ux}| + |f_{ut}| + |f_{uu}| \leqslant \mu_3(1 + |p|^2). \tag{0.10}$$

В этом случае условия б) также выполняются.

При условиях (0.2), (0.9) эллиптический оператор $L_0 = \{L_0^{(k)}\}^{k\leqslant N}$ системы (0.1),

$$L_0^{(k)}[v] = -\frac{d}{dx_\alpha}a^k_\alpha(x,\cdot,v,v_x) + b(x,\cdot,v,v_x),$$

имеет вариационную структуру, т. е. является оператором Эйлера для функционала

$$\mathcal{E}_f[v] = \int\limits_\Omega f(x,\cdot,v,v_x)dx. \tag{0.11}$$

Если же выполнены условия (0.2), (0.7), то оператор L_0 „близок“ к оператору вариационной структуры.

В работе автора [1] рассматривалась квазилинейная параболическая система с оператором L_0, являющимся оператором Эйлера для функционала (0.11), где

$$f(x,u,p) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l\leqslant N \\ \alpha,\beta\leqslant 2}} \mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl}(x,u) p^l_\beta p^k_\alpha; \tag{0.12}$$

на множестве $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N$ матрица $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl}\}$ имеет непрерывные и ограниченные первые и вторые производные по x и u и удовлетворяет условиям

$$\mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl}(x,u)\xi^l_\beta\xi^k_\alpha \geqslant \nu|\xi|^2, \quad \xi\in\mathbb{R}^{2N}, \ \nu = \mathrm{const} > 0, \ \mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl} = \mathcal{A}^{\beta\alpha}_{lk}.$$

Очевидно, что в описанной ситуации $f_t \equiv 0$ и условия п. а), а также условия (0.9), (0.10) выполняются.

В работе через $\mathbb{C}^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, α, $\beta\in(0,1)$, обозначается пространство функций $v(x,t)$, непрерывных в $\overline{Q}$ с конечной нормой

$$\begin{aligned}&\|v\|_{\mathbb{C}^{\alpha,\beta}(\overline{Q})}\\ &\quad= \sup_{\overline{Q}}|v| + \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in\overline{Q},\\ x\neq x'}} \frac{|v(x,t)-v(x',t)|}{|x-x'|^\alpha} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in\overline{Q},\\ t\neq t'}} \frac{|v(x,t)-v(x,t')|}{|t-t'|^\beta}\\ &\quad= \|v\|_{C(\overline{Q})} + \langle v\rangle^{(\alpha)}_{x,Q} + \langle v\rangle^{(\beta)}_{t,Q}.\end{aligned} \tag{0.13}$$

Для описания гладких решений задачи (0.1) нам потребуется также пространство $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$, $\alpha\in(0,1)$. Так мы обозначаем пространство функций $v(x,t)$, непрерывных в $\overline{Q}$ вместе с производными v_x, v_t, v_{xx}, имеющих конечную норму

$$\begin{aligned}&\|v\|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})}\\ &\quad= \|v\|_{\mathbb{C}(\overline{Q})} + \|v_x\|_{\mathbb{C}(\overline{Q})} + \|v_t\|_{\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})} + \|v_{xx}\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})} + \langle v_x\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,Q}.\end{aligned} \tag{0.14}$$

§1. Теорема о продолжимости

Определим класс гладких решений. Для произвольных t_1, $t_2\in[0,T]$ положим $Q' = \Omega\times(t_1,t_2)$ и

$$\mathcal{K}\{[t_1,t_2]\} = \{v : \overline{Q'}\to\mathbb{R}^N \mid v\in H^{2+\alpha_0,1+\alpha_0/2}(\overline{Q'}),\ v_{xt}\in L_2(Q')\}. \tag{1.1}$$

Будем писать $v\in\mathcal{K}\{[t_1,t_2)\}$, если $v\in\mathcal{K}\{[t_1,\tau]\}$, $\tau<t_2$. Для гладкой функции $\varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^N)$ считаем выполненным условие согласования

$$\varphi^k_t - \frac{d}{dx_\alpha}a^k_\alpha(x,t,\varphi,\varphi_x) + b^k(x,t,\varphi,\varphi_x)\Big|_{\substack{t=0\\ x\in\partial\Omega}} = 0, \quad k = 1,\dots,N. \tag{1.2}$$

Через $\Omega_R(x^0)$ обозначаем множество $\Omega\cap B_R(x^0)$, где $B_R(x^0)$ — круг радиуса R с центром в точке x^0.

Теорема 1 (о продолжимости решения). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *— ограниченная область с* $\mathbb{C}^{2+\alpha_0}$*-гладкой границей,* $Q = \Omega \times (0, T)$, *числа* $\alpha_0 \in (0,1)$ *и* $T > 0$ *фиксированы произвольно. Предположим, что* $\varphi \in H^{2+\alpha_0, 1+\alpha_0/2}(\overline{Q})$, $\exists \varphi_{xt}, \varphi_{tt} \in L_4(Q)$, *выполняется соотношение* (1.2); *пусть для функций* a_α^k *и* b^k *выполнены условия а), б), в частности, соотношения* (0.2)–(0.8) *или* (0.2)–(0.6), (0.9), (0.10); *пусть* $u \in \mathcal{K}\{[0,T)\}$ *— решение задачи* (0.1). *Существует число* $\varepsilon_0 > 0$, *зависящее от параметров* ν_0, ν, $\mu_0, \dots, \mu_6$ *и* $\mathbb{C}^{1+1}$ *— характеристики* $\partial\Omega$, *такое, что если для какого-либо* $R_0 = R_0(\varepsilon_0) > 0$ *выполняется условие*

$$\sup_{[0,T)} \sup_{x^0 \in \overline{\Omega}} \|u_x(\cdot, t)\|^2_{2, \Omega_{R_0}(x^0)} < \varepsilon_0, {}^1 \tag{1.3}$$

то $u \in \mathcal{K}\{[0,T]\}$.

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд утверждений и сформулируем их в виде лемм. Каждая лемма уточняет информацию о поведении решения u задачи (0.1) вблизи $t = T$. Бóльшая часть этих утверждений доказывается так же, как в работе автора [1], отличие состоит в несущественных технических деталях. Как правило, дополнительные рассуждения связаны с тем, что в рассматриваемом случае функции a_α^k, b^k и φ^k могут зависеть от t. *Нелинейное* вхождение градиента в главную часть системы (0.1) является существенно новым обстоятельством только при выводе оценок гёльдеровских норм решения и его пространственных производных в $\overline{\Omega}$ при t, близких к T. Вывод этих оценок полностью изложен в лемме 1.5.

При доказательстве лемм 1.2–1.4 используется двумерность области Ω. Для оценки в различных ситуациях сильно-нелинейной функции $b(z, u, p)$ мы привлекаем мультипликативное неравенство (см. [5, гл. I, §1])

$$\|v\|^4_{4,D} \leqslant 2\|v\|^2_{2,D}\|v_x\|^2_{2,D}, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \tag{1.4}$$

D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$.

Через c и c_i будем обозначать различные положительные постоянные, которые могут зависеть от ν_0, ν, $\mu_0, \dots, \mu_6$; зависимость от других величин, в том числе от T, отмечаем отдельно. Постоянной l_φ обозначаем величину $\|\varphi\|_{H^{2+\alpha_0, 1+\alpha_0/2}(Q)} + \|\varphi_{xt}\|_{4,Q} + \|\varphi_{tt}\|_{4,Q}$ или более слабую характеристику функции φ. Если c зависит от C^{1+1} — характеристики $\Gamma = \partial\Omega$, то пишем $c(\Gamma)$.

Лемма 1.1. 1) *Если выполнены условия* (0.2)–(0.4), (0.7), (0.8_1), *тогда для решения* $u \in \mathcal{K}\{[0,T)\}$ *задачи* (0.1) *верны оценки*

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_t|^2 dx dt + \mathcal{E}_f[u(t)]\Big|_{t_1}^{t_2} \leqslant c(l_\varphi)\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (1 + |u_x|^2) dx dt, \quad t_1 \leqslant t_2 < T; \tag{1.5}$$

$$\sup_{[0,T]} \|u_x(\cdot, t)\|^2_{2,\Omega} \leqslant E_0, \tag{1.6}$$

[1]Здесь и далее для краткости пишем $\|\cdot\|_{p,\mathcal{D}}$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{D})}$.

постоянная E_0 *зависит от* $\nu_0, \mu_0, \ldots, \mu_5, l_\varphi$ *и* T;

$$\int\limits_Q |u_t|^2 dQ \leqslant c_0, \quad c_0 = c_0(E_0, l_\varphi, T). \tag{1.7}$$

Кроме того, существует число $\Delta \in (0,T)$, *зависящее от* $\nu_0, \mu_0, \ldots, \mu_5, l_\varphi$, *такое, что для любых* $x^0 \in \overline{\Omega}$, $R > 0$, $t_1 \leqslant t_2 < T$, *при* $t_2 - t_1 < \Delta$ *верно неравенство*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_R(x^0)} |u_t|^2 dx dt + \nu_0 \sup_{[t_1,t_2]} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_R(x^0)}$$
$$\leqslant c_1((t_2-t_1)+R^2) + c_2\|u_x(\cdot,t_1)\|^2_{2,\Omega_{2R}(x^0)} + \frac{c_3 E_0(t_2-t_1)}{R^2}. \tag{1.8}$$

2) *Если выполнены условия* (0.2)–(0.4), (0.9), $f = f(x,u,p)$, $\varphi = \varphi(x)$, *тогда для* $u(x,t)$ *при любых* $t_1 \leqslant t_2 < T$ *верны оценки*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 dx dt + \mathcal{E}_f[u(t_2)] \leqslant \mathcal{E}_f[u(t_1)], \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_r(x^0)} |u_t|^2 dx dt + \nu_0 \int\limits_{\Omega_R(x^0)} |u_x(x,t_2)|^2 dx$$
$$\leqslant \mu_0 \int\limits_{\Omega_{2R}(x^0)} |u_x(x,t_1)|^2 dx + 2\mu_1|\Omega_{2R}| + c(t_2-t_1)\left(1 + \frac{\mathcal{E}_f[\varphi]}{R^2}\right),^2 \quad c = c(\mu_2). \tag{1.10}$$

Поясним вывод оценок (1.5)–(1.10). Функция u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} [u_t^k h^k + f_{p_\alpha^k}(z,u,u_x)h^k_{x_\alpha} + b^k(z,u,u_x)h^k] dx dt = 0 \tag{1.11}$$

с любой гладкой функцией h, $h|_{\partial\Omega\times(t_1,t_2)} = 0$, $t_1 < t_2 < T$.

Полагая в (1.11) $h = u_t - \varphi_t$, после элементарных преобразований получаем равенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \left[|u_t|^2 + \frac{df(z,u,ux)}{dt} + (b^k - f_{u_k})u_t^k\right] dx dt$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} (f_t + u_t^k \varphi_t^k + f_{p_\alpha^k}\varphi^k_{x_\alpha t} + b^k \varphi_t^k) dx dt. \tag{1.12}$$

[2]Здесь и далее $|\mathcal{D}| = \mathrm{meas}_n\, \mathcal{D}$.

Используя условия (0.4), (0.7), (0.8_1), из (1.12) выводим неравенство (1.5). Положив $\Delta = \min\{\frac{\nu_0}{2c(l_\varphi)}, T\}$, из неравенства (1.5) при $t_2 - t_1 \leqslant \Delta$ получаем оценку

$$\frac{\nu_0}{2}\sup_{[t_1,t_2]}\|u_x(\cdot,\tau)\|^2_{2,\Omega} \leqslant \mu_0\|u_x(\cdot,t_1)\|^2_{2,\Omega} + (2\mu_1 + \nu_0/2)|\Omega|. \tag{1.13}$$

Полагая в полученном неравенстве $t_1 = 0$, $t_2 = \Delta$, получаем, что

$$\sup_{[0,\Delta]}\|u_x(\cdot,\tau)\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{2\mu_0}{\nu_0}\|\varphi_x(\cdot,0)\|^2_{2,\Omega} + (4\mu_1/\nu_0 + 1)|\Omega|. \tag{1.14}$$

Теперь из оценки (1.13) с $t_1 = \Delta$, $t_2 = 2\Delta$ и неравенства (1.14) следует оценка $\sup_{[0,2\Delta]}\|u_x(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}$ через данные задачи. Продолжая рассуждение, за k шагов, $k \leqslant [T/\Delta] + 1$, получаем оценку (1.6). Из (1.5) и (1.6) следует (1.7).

Для получения локальной оценки (1.8) мы обращаемся к тождеству (1.11) с $h = (u_t - \varphi_t)\xi^2$, $\xi = \xi(x)$ — срезающая для $B_{2R}(x^0)$ функция, $\xi = 1$ в $B_R(x^0)$, и выводим неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_{2R}(x^0)} |u_t|^2\xi^2 dxdt + \int_{\Omega_{2R}(x^0)} f\xi^2 dx\Big|_{t_1}^{t_2}$$
$$\leqslant c_1(l_\varphi)\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_{2R}(x^0)} (1 + |u_x|^2)\xi^2 dxdt + \frac{c_2}{R^2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_{2R}(x^0)} (1 + |u_x|^2)dxdt.$$

С помощью оценки (1.6) при $t_2 - t_1 \leqslant \Delta = \min\{\frac{\nu_0}{4c_1(l_\varphi)}, T\}$ из последнего неравенства выводим оценку (1.8).

Второе утверждение леммы 1.1 доказывается элементарно. Заметим только, что в этом случае равенство (1.12) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\left(|u_t|^2 + \frac{df(\ldots)}{dt}\right)dxdt = 0.$$

Далее, структурные ограничения (0.2) и (0.7) на оператор системы (0.1) не используются.

Для оценки норм $\|u_x\|_{4,Q}$ и $\|u_{xx}\|_{2,Q}$ решение $u(x,t)$ задачи (0.1) рассматривается локально, в окрестности распрямленной части границы области Ω.

Пусть V — окрестность произвольно фиксированной точки $\partial\Omega$ такая, что при $C^{2+\alpha_0}$-диффеоморфизме $y = y(x)$ множество $V \cap \Omega$ переходит в $B_2^+ = B_2(0) \cap \{y_2 > 0\}$, а $V \cap \partial\Omega$ в $\gamma_2 = B_2(0) \cap \{y_2 = 0\}$.

Функция $v(y,t) = u(x(y),t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} v_t^k - \dfrac{d}{dy_\beta}A_\beta^k(y,t,v,v_y) + \mathbb{B}^k(y,t,v,v_y) = 0, \\ \qquad\qquad y \in B_2^+,\ t \in (0,T),\ k = 1,\ldots,N, \\ v|_{\gamma_2\times(0,T)} = \psi(y,t),\ v|_{t=0} = \psi(y,0), \quad y \in B_2^+. \end{cases} \tag{1.15}$$

Здесь $A^k_\beta(y,t,v,q) = a^k_\alpha(x(y),t,u,q\frac{\partial y}{\partial x}) \cdot \frac{y_\beta(x(y))}{\partial x_\alpha}$, $\mathbb{B}^k(y,t,v,q) = b^k(x(y),t,u,q\frac{\partial y}{\partial x}) - A^k_\beta(y,t,v,q)\frac{J_{y_\beta}(y)}{J(y)}$, где $u = u(x(y),t)$ и $J(y) = |\det\{\frac{\partial x(y)}{\partial y}\}| > 0$ в $\overline{B_2^+}$; $\psi(y,t) = \varphi(x(y),t)$.

Из условий a) Введения следует, что на множестве $\mathfrak{M}^+ = \overline{B_2^+}\times[0,T]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{2N}$ функции A^k_β непрерывно дифференцируемы по всем аргументам и удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} |A|+|A_t|+|A_y|+|A_v| &\leqslant l_1(1+|q|),\\ |A_q|\leqslant l_2, \qquad \frac{\partial A^k_\beta}{\partial q^m_\gamma}\theta^k_\beta\theta^m_\gamma &\geqslant \nu_*|\theta|^2, \quad \theta\in\mathbb{R}^{2N}.\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Согласно условиям (0.8), для функции $\mathbb{B}$ и ее производных на множестве $\mathfrak{M}$ верны соотношения:

$$|\mathbb{B}| \leqslant l_3|q|^2 + l_4|q| + l_5, \tag{1.17}$$

$$|\mathbb{B}_t| + |\mathbb{B}_v| + |\mathbb{B}_q|(1+|q|) \leqslant l_6(1+|q|^2). \tag{1.18}$$

Положительные постоянные ν_*, $l_1,\dots,l_6$ определяются параметрами ν, μ_2, μ_4, μ_6 и C^{1+1} — характеристикой функций $y=y(x)$ и $x=x(y)$, определяющих прямое и обратное преобразования множества $V\cap\Omega$ на B_2^+. Очевидно, что для $\mathbb{B}$ из оценки (1.17) следует, что

$$|\mathbb{B}| \leqslant (l_3+\delta)|q|^2 + \left(l_5 + \frac{l_4^2}{4\delta}\right), \quad \delta > 0.$$

Таким образом, при переходе к новым координатам все условия на функции a^k_α и b^k (кроме структурных ограничений) сохраняются с новыми постоянными.

Далее обозначаем

$$\omega_R(y^0) = B_2^+ \cap B_R(y^0), \qquad \gamma_R(y^0) = \gamma_2 \cap B_R(y^0).$$

Лемма 1.2. *Пусть v — гладкое в $\overline{B_2^+}\times[0,T)$ решение задачи* (1.15). *Существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, зависящее от ν_*, $l_1,\dots,l_5$, что если для некоторого $R_1 \in (0,1/2]$ выполняется условие*

$$\sup_{[0,T)} \sup_{y^0\in\overline{B^+_{3/2}}} \|v_y(\cdot,t)\|^2_{2,\omega_{R_1}(y^0)} < \varepsilon_1, \tag{1.19}$$

то для любого $y^0\in\overline{B^+}_{3/2}$ и любого $R\leqslant\frac{R_1}{2}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\omega_{\frac{R}{4}}(y^0)} &(|v_y|^4 + |v_{yy}|^2)\,dy\,dt\\ &\leqslant c(l_\psi)\Big\{\|v_y(\cdot,t_1)\|^2_{2,\omega_{2R}(y^0)} + \frac{E_0(t_2-t_1)}{R^2} + R^2 + (t_2-t_1)\Big\}, \quad t_1<t_2<T,\end{aligned} \tag{1.20}$$

E_0 *— постоянная из оценки* (1.6).

Лемма 1.2 доказывается так же, как лемма 2.1 [1]. Условие (1.19) и двумерность области используются для оценки интеграла с функцией $\mathbb{B}$.

Замечание 1. Покроем множество $\overline{\Omega}$ конечным числом окрестностей $V^1, \ldots, V^M$, на каждой из которых определен $\mathbb{C}^{2+\alpha_0}$-диффеоморфизм $y^j = y^j(x)$, $j \leqslant M$, переводящий множество $V^j \cap \Omega$ в B_2 или B_2^+, при этом, если $y^j(V^j \cap \Omega) = B_2^+$, то $y^j(V^j \cap \partial\Omega) = \gamma_2$. Будем считать, что множества $W^j \subset V^j$, $j = 1, \ldots, M$, такие, что $y^j(W^j \cap \Omega) = B_{1/4}$ (или $B_{1/4}^+$), также образуют покрытие множества $\overline{\Omega}$. Не умаляя общности, можно считать, что в локальной постановке, когда фиксированы V^j и $y^j(x)$, параметры задачи ν_*, $l_1 - l_6$ зависят от $\mathbb{C}^{1+1}$-характеристики $\partial\Omega$, а не от фиксированного отображения y^j.

Замечание 2. Пусть окрестность V и диффеоморфизм $y = y(x)$ множества $V \cap \Omega$ на B_2^+ фиксированы. Существует $\lambda > 0$ такое, что при любых $y^0 \in \overline{B_{3/2}^+}$ и $R < 1/2$ образ множества $\omega_R(y^0) = B_2^+ \cap B_R(y^0)$ при отображении $x = x(y)$ содержится в $\Omega_{\lambda R}(x^0)$, $x^0 = x(y^0)$. Параметр λ можно выбрать одинаковым для всех окрестностей V^j, $j \leqslant M$, покрывающих $\overline{\Omega}$. Далее, считаем $\lambda \geqslant 1$.

Замечание 3. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ фиксировано так, как в лемме 1.2, и $c_0 > 0$ — постоянная из неравенства

$$\int\limits_{\omega_r(y^0)} |v_y(y,t)|^2 dy \leqslant c_0 \int\limits_{\Omega_{\lambda r}(x^0)} |u_x(x,t)|^2 dx,$$

$r < 1/2$, $y^0 \in \overline{B_{3/2}^+}$, $x^0 = x(y^0)$, $\lambda \geqslant 1$ — параметр из замечания 2. Предположим, что для $\varepsilon_0 = \varepsilon_1/c_0$ найдется $R_0 > 0$ такое, что выполняется условие

$$\sup_{[0,T)} \sup_{x^0 \in \Omega} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_{R_0}(x_0)} < \varepsilon_0,$$

т. е. условие (1.3). Тогда для $v(y,t) = u(x(y),t)$ верна оценка (1.19) с $R_1 = R_0/\lambda$ и, согласно лемме 1.2, справедлива оценка (1.20). Из сказанного следует, что при выполнении условия (1.3) с выбранным выше $\varepsilon_0 > 0$ имеет место оценка

$$\int\limits_Q (|u_x|^4 + |u_{xx}|^2) dQ \leqslant C(\Gamma, l_\varphi, E_0, T)\{1 + T/R_0^2\}. \tag{1.21}$$

Далее, мы не будем обращаться к условию (1.3), а будем использовать только конечность интеграла

$$J = \int\limits_Q |u_x|^4 dQ. \tag{1.22}$$

Для доказательства следующего утверждения мы вернемся к исходной постановке задачи.

Лемма 1.3. *Пусть* $u \in \mathcal{K}\{[0,T)\}$ — *решение задачи* (0.1), *для которого конечен интеграл* J. *Существует* $t_1 \in (0,T)$ *такое, что для функции* $\widehat{u} = u - \varphi$ *и любого параметра* $\beta \in [0, \nu/3\mu_2)$ *верна оценка*

$$\sup_{[t_1,T)} \int_\Omega |\widehat{u}_t(x,t)|^{2+2\beta} dx + \int_{t_1}^T \int_\Omega (|\widehat{u}_{xt}|^2 |\widehat{u}_t|^{2\beta} + |\widehat{u}_t|^{3+2\beta}) dxdt$$
$$\leqslant C(T)\Big[(T-t_1) + \int_\Omega |\widehat{u}_t(x,t_1)|^{2+2\beta} dx\Big] \equiv \varkappa_1(t_1). \tag{1.23}$$

Число t_1 *зависит от параметров из условий* (0.3)–(0.8) *и интеграла* J.

Для квазилинейных систем, образованных функциями, не зависящими от t, при нулевом условии Дирихле, подобное утверждение было доказано в лемме 1.3 [1], при этом оценка сильно-нелинейного члена системы была основана на применении мультипликативного неравенства (1.4). Переход к более общей ситуации фактически не вносит изменений в доказательство, поэтому вывод оценки (1.23) мы опускаем.

Следующий результат будет получен локально для задачи (1.15).

Лемма 1.4. *Пусть* v — *гладкое в* $\overline{B^+_{3/2}}[0,T)$ *решение задачи* (1.15) *и конечен интеграл* $J_0 = \int_0^T \int_{B^+_{3/2}} |v_y|^4 dydt$. *Существуют* $t_2 \in [t_1, T)$ (t_1 — *из формулировки леммы* 1.3) *и* $\beta^* \in (0, \frac{\nu}{8\mu_2})$ *такие, что при* $\beta \leqslant \beta_*$ *для функции* $\widehat{v} = v - \psi$ *справедлива оценка*

$$\sup_{[t_2,T)} \int_{B_2^+} |\widehat{v}_y(y,t)|^{2+2\beta} dy$$
$$\leqslant c_1 \int_{t_2}^T \int_{B^+_{3/2}} (1 + |\widehat{v}_t|^{2+\beta} + |\widehat{v}_y|^{2+2\beta}) dydt + c_2 \int_{B^+_{3/2}} |\widehat{v}_y(y,t_2)|^{2+2\beta} dy \equiv \varkappa_2(t_2) \tag{1.24}$$

с постоянными c_1 *и* c_2, *зависящими от* l_φ.

Лемма 1.4 является аналогом леммы 3.1 [1] и доказывается также с помощью условий (1.16), (1.17) и мультипликативного неравенства (1.4).

Привлекая для оценки правой части неравенства (1.24), соотношения (1.23) и (1.21), получаем, что для функции u справедливо неравенство

$$\sup_{[t_2,T)} \|u_x(\cdot,t)\|_{p,\Omega} \leqslant \mathbb{K}_1, \quad p = 2 + 2\beta_*. \tag{1.25}$$

Здесь и далее через $\mathbb{K}_i$ мы обозначаем постоянные, которые могут зависеть от параметров ν_0, ν, $\mu_0, \dots, \mu_6$, l_φ, $\mathbb{C}^{2+\alpha_0}$ — характеристики $\partial\Omega$, а также норм $\|u_t(\cdot,t_2)\|_{p,\Omega}$ и $\|u_x(\cdot,t_2)\|_{p,\Omega}, p > 2$.

Далее, обозначаем $\Lambda_* = (t_2, T)$, $Q_* = \Omega \times \Lambda_*$ и уточняем информацию о гладкости $u(x,t)$ в $\overline{Q_*}$.

Из теоремы вложения $W^1_p(\Omega) \hookrightarrow C^\beta(\overline{\Omega}), \beta = 1 - 2/p > 0$ следует, что

$$\sup_{\Lambda_*} \|u(\cdot,t)\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leqslant \mathbb{K}_2. \tag{1.26}$$

Далее, мы покажем, что оценка (1.26) верна при *любом* $\beta \in (0,1)$. Этот факт позволит нам оценить норму Гёльдера производных $u_x(\cdot,t)$ в $\overline{\Omega}$.

Лемма 1.5. *Существуют положительные постоянные* $\mathbb{K}_3$ *и* $\mathbb{K}_4$ *такие, что*

$$1) \sup_{\Lambda_*} \|u(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^\delta(\overline{\Omega})} \leqslant \mathbb{K}_3 \quad \text{\textit{при любом} } \delta \in (0,1); \tag{1.27}$$

$$2) \sup_{\Lambda_*} \|u_x(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^{\delta_0}(\overline{\Omega})} \leqslant \mathbb{K}_4 \quad \text{\textit{при некотором} } \delta_0 \in (0,1). \tag{1.28}$$

Как было отмечено во Введении, вывод оценок (1.27) и (1.28) для квазилинейного случая, рассмотренного в [1], и нелинейного случая существенно различаются. Более того, в работе [1] их получение прокомментировано довольно кратко. Поэтому здесь мы приводим полное доказательство леммы 1.5.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $t \in (t_2, T) = \Lambda_*$ и рассмотрим систему (0.1) как эллиптическую:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d}{dx_\alpha} a^k_\alpha(x,t,u,u_x) + b^k(x,t,u,u_x) = f^k(x,t), \quad x \in \Omega, \\ &u^k|_{\partial\Omega} = \varphi^k(x,t), \quad k = 1,\dots,N. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

В системе (1.29) $f(x,t) = -u_t(x,t)$, согласно оценке (1.23)

$$\|f(\cdot,t)\|_{p,\Omega} \leqslant c,$$

$p > 2$ можно считать одинаковым в оценках (1.23) и (1.25).

Функция $b(x,t,u,p) \sim |p|^2$, $|p| \to \infty$ удовлетворяет условию (0.8_1). Чтобы оценить $\|u(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^\delta(\overline{\Omega})}$ при фиксированном t, перейдем к локальной постановке задачи и положим $\widehat{v}(y,t) = v(y,t) - \psi(y,t)$, где $v(y,t) = u(x(y),t)$ — решение задачи (1.15). При фиксированном t функция $\widehat{v}$ является решением задачи

$$-\frac{d}{dy_\alpha}\widehat{A}^k_\alpha(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y) + \widehat{\mathbb{B}}^k(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y) = F^k(y,t), y \in B^+_1, \quad \widehat{v}|_{\gamma_1} = 0, \tag{1.30}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{A}^k_\alpha(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y) &= A^k_\alpha(y,t,\widehat{v} + \psi(y,t), \widehat{v}_y + \psi_y(y,t)), \\ \widehat{\mathbb{B}}^k(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y) &= \mathbb{B}^k(y,t,\widehat{v} + \psi(y,t), \widehat{v}_y + \psi_y(y,t)), \\ F^k(y,t) &= -v^k_t(y,t), \\ \gamma_1 &= B_1 \cap \{y_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что функции $\widehat{A}^k_\alpha$ и $\widehat{\mathbb{B}}^k$ удовлетворяют на множестве $\overline{B^+_1} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$ при фиксированном $t \in \Lambda_*$ условиям вида (1.16)–(1.18) и

$$\|F(\cdot,t)\|_{p,B^+_1} \leqslant \mathbb{K}_5, \quad p > 2. \tag{1.31}$$

Для решения $\widehat{v}$ задачи (1.30) в силу (1.24) верна оценка

$$\sup_{\Lambda_*}\|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|_{p,B_1^+}\leqslant \mathbb{K}_6,\quad p>2, \tag{1.32}$$

и, следовательно,

$$\sup_{\Lambda_*}\|\widehat{v}(\cdot,t)\|_{C^\beta(\overline{B_1^+})}\leqslant \mathbb{K}_7,\quad \beta=1-2/p. \tag{1.33}$$

Для произвольно фиксированной точки $y^0\in\overline{B^+_{3/4}}$ и $R<1/4$ в $\omega_R(y^0)=B_1^+\cap B_R(y^0)$ рассмотрим модельную задачу

$$\frac{d}{dy_\alpha}\mathring{A}^k_\alpha(\theta_y)=0 \quad \text{в } \omega_R(y^0),\qquad \theta|_{\partial\omega_R(y^0)}=\widehat{v}, \tag{1.34}$$

где $\mathring{A}^k_\alpha(\theta_y)=\widehat{A}^k_\alpha(y_0,t,v^0,\theta_y)$, $v^0=\frac{1}{|\omega_R|}\int\limits_{\omega_R(y^0)}\widehat{v}(y,t)dy$ — среднее значение функции $\widehat{v}$ по множеству $\omega_R(y^0)$ (при фиксированном $t\in\Lambda_*$).

Заметим, что $\theta|_{\gamma_R(y^0)}=0$, $\gamma_R(y^0)=\gamma_1\cap B_R(y^0)$.

В работе S. Campanato [6] показано, что в случае двух пространственных переменных обобщенное решение θ задачи (1.34) из пространства $W_2^1(\omega_R(y^0))$ является функцией класса $W_q^2(\omega_r(y^0))$ с некоторым $q>2$ при всех $r<R$. В частности, для θ справедливы интегральные оценки

$$\int\limits_{\omega_\rho(y^0)}|\theta_y|^2dy\leqslant c(\rho/R)^2\int\limits_{\omega_R(y^0)}|\theta_y|^2dy, \tag{1.35}$$

$$\int\limits_{\omega_\rho(y^0)}|\theta_y-(\theta_y)_{y_0,\rho}|^2dy\leqslant c(\rho/R)^{2+2(1-2/q)}\int\limits_{\omega_R(y^0)}|\theta_y-(\theta_y)_{y^0,R}|^2dy \tag{1.36}$$

с постоянными c, зависящими от постоянной эллиптичности матрицы $\{\frac{\partial\mathring{A}^k_\alpha}{\partial p^l_\beta}\}$ и $\sup_{p\in\mathbb{R}^{2N}}\|\mathring{A}'_p(p)\|$; $(h)_{y_0,r}$ — среднее значение функции h по множеству $\omega_r(y^0)$.

Из уравнений (1.30), (1.34) следует справедливость тождества

$$\begin{aligned}\int\limits_{\omega_R(y^0)}&[(\widehat{A}^k_\alpha(y^0,t,v^0,\widehat{v}_y)-\widehat{A}^k_\alpha(y^0,t,v^0,\theta_y))\eta^k_{y_\alpha}\\ &+\Delta A^k_\alpha\cdot\eta^k_{y_\alpha}+\widehat{\mathbb{B}}^k(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y)\eta^k]dy=\int\limits_{\omega_R(y^0)}F^k\eta^kdy,\quad \eta\in\mathring{W}_2^1(\omega_R(y^0)),\end{aligned} \tag{1.37}$$

где $\Delta A^k_\alpha=\widehat{A}^k_\alpha(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y)-\widehat{A}^k_\alpha(y^0,t,v^0,\widehat{v}_y)$.

Определим функцию $w=\widehat{v}-\theta$, $w|_{\partial\omega_R(y^0)}=0$. Полагая в (1.37) $\eta=w$, выводим неравенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{\omega_R(y^0)}&|w_y|^2dy\\ &\leqslant c\int\limits_{\omega_R(y^0)}\{|\widehat{v}_y|^2|w|+R^2(1+|\widehat{v}_y|^2)+(1+|\widehat{v}_y|^2)\cdot|\hat{v}-v^0|^2+R^2(1+|F|^2)\}dy.\end{aligned} \tag{1.38}$$

Из оценок (1.32), (1.33) следует, что

$$\int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_y(\cdot,t)|^2 dy \leqslant \mathbb{K}_8 R^{2\beta}, \qquad \underset{\omega_R(y^0)}{\operatorname{osc}} \widehat{v}(\cdot,t) \leqslant \mathbb{K}_8 R^{\beta}. \tag{1.39}$$

С помощью оценок (1.31), (1.39) из (1.38) выводим неравенство

$$\int\limits_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 dy \leqslant c_1\{\mathbb{P}_R(y^0) + R^{4\beta} + c_F R^{2+2\beta}\}, \tag{1.40}$$

где $\mathbb{P}_R(y^0) = \int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_y|^2|w|dy$, $c_1 = c_1(l_\psi, \mathbb{K}_8)$, $c_F = \|F\|^2_{p,B_1^+}$.

Для оценки интеграла $\mathbb{P}_R(y^0)$ обратимся к тождеству для функции $\widehat{v}$:

$$\int\limits_{B_1^+} [\widehat{A}^k_\alpha(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y)\eta^k_{y_\alpha} + \widehat{\mathbb{B}}^k(y,t,\widehat{v},\widehat{v}_y)\eta^k]dy = \int\limits_{B_1^+} F^k\eta^k dy, \quad \eta\in \overset{\circ}{W}{}'_2(B_1^+).$$

Полагая в этом тождестве $\eta = (\widehat{v}-v^0)|w|$, $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega_R(y^0))$, с помощью оценок (1.39) выводим неравенство

$$\mathbb{P}_R(y^0) \leqslant c_2 R^\beta \mathbb{P}_R(y^0) + c_3\Big[\varepsilon \int\limits_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 dy + \frac{c}{\varepsilon}(R^{4\beta} + c_F R^{2+2\beta})\Big], \quad \varepsilon > 0. \tag{1.41}$$

Пусть $R \leqslant 1/4$ удовлетворяет дополнительному условию

$$c_2 R^\beta \leqslant 1/2.$$

Тогда из оценки (1.41) при $\varepsilon \leqslant \frac{1}{4c_1c_3}$ (c_1, c_3 — из оценок (1.40) и (1.41)) и неравенства (1.40) выводим, что

$$\int\limits_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 \leqslant c_4(\mathbb{R}^{4\beta} + c_F R^{2+2\beta}), \quad c_4 = c_4(l_\varphi, \mathbb{K}_8). \tag{1.42}$$

Определим функцию $H_\rho(y^0) = \int\limits_{\omega_\rho(y^0)} |\widehat{v}_y|^2 dy$. Для нее из оценок (1.35), (1.42) следует соотношение

$$H_\rho(y^0) \leqslant c_5\big[(\rho/R)^2 H_R(y^0) + R^{4\beta} + C_F R^{2+2\beta}\big]. \tag{1.43}$$

Предположим сначала, что $4\beta \geqslant 2$. Тогда, согласно известной алгебраической лемме (см., например, [7, гл. III, лемма 2.1]), из оценки (1.43) выводим, что для любого $\varepsilon > 0$ и некоторой постоянной $c_6 = c_6(l_\varphi, \mathbb{K}_8)$ справедливо неравенство

$$H_\rho(y^0) \leqslant c_6\big\{(\rho/R)^{2-\varepsilon} H_R(y^0) + (1+C_F)\rho^{2-\varepsilon}\big\}, \quad \rho \leqslant R. \tag{1.44}$$

Так как $y^0 \in \overline{B^+_{3/4}}$ фиксировалось произвольно, то из полученной оценки следует, что

$$\|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|^2_{L^{2,2-\epsilon}(B^+_{3/4})} \leqslant c_7\{1 + \|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|^2_{2,B_1^+} + \|\widehat{v}_t(\cdot,t)\|^2_{p,B_1^+}\} \leqslant \mathbb{K}_9,$$

откуда получаем оценку

$$\|\widehat{v}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^{2,4-\varepsilon}(B^+_{3/4})} \leqslant \mathbb{K}_{10}.$$

Здесь и далее через $L^{2,\mu}$ и $\mathcal{L}^{2,\mu}$ обозначаем пространства Морри и Кампанато соответственно (определение этих пространств и их свойства см., например, [7, гл. III]). В силу изоморфизма пространств $\mathcal{L}^{2,4-\varepsilon}(B^+_{3/4})$ и $\mathbb{C}^\delta\big(\overline{B^+_{3/4}}\big)$, $\delta = 1-\varepsilon/2$, имеем оценку

$$\|\widehat{v}(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^\delta(\overline{B^+_{3/4}})} \leqslant \mathbb{K}_{11}, \tag{1.45}$$

откуда следует оценка (1.27).

Пусть теперь $4\beta < 2$, тогда из (1.43), согласно упомянутой лемме, выводим неравенство

$$H_\rho(y^0) \leqslant C_8\big\{\big(\rho/R\big)^{4\beta} H_R(y^0) + (1+C_F)\rho^{4\beta}\big\}, \quad \rho \leqslant R. \tag{1.46}$$

Оценка (1.46) гарантирует, что

$$\|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|^2_{L^{2,4\beta}(B^+_{3/4})} \leqslant \mathbb{K}_{12}, \qquad \|\widehat{v}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^{2,2+4\beta}(B^+_{3/4})} \leqslant \mathbb{K}_{13}.$$

В шкале пространств Гёльдера это означает, что

$$\|\widehat{v}(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^{\beta_1}(\overline{B^+_{3/4}})} \leqslant \mathbb{K}_{14}, \quad \beta_1 = 2\beta. \tag{1.47}$$

Полученная информация о $\widehat{v}$ позволяет повторить анализ неравенства (1.38) и вывести оценку (1.43) с заменой β на β_1 для любых $y^0 \in \overline{B^+_{1/2+(1/4)^2}}$. В результате либо $4\beta_1 \geqslant 2$ и первое утверждение леммы 1.5 можно считать доказанным, либо мы получим оценку (1.47) с $\beta_2 = 2\beta_1$ вместо β_1 и $B^+_{1/2+(1/4)^2}$ вместо $B^+_{3/4}$. Очевидно, что за конечное число шагов мы придем к ситуации $\beta_M = 2^M\beta \geqslant 1/2$.

Таким образом, в любом случае мы получим, что для некоторых постоянных $\mathbb{K}_{15}$ и $\mathbb{K}_{16}$ при любом $\delta \in (0,1)$ верны оценки

$$\|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|_{L^{2,2\delta}(B^+_{1/2})} \leqslant \mathbb{K}_{15}, \qquad \|\widehat{v}(\cdot,y)\|_{\mathbb{C}^\delta(\overline{B^+_{1/2}})} \leqslant \mathbb{K}_{16}, \tag{1.48}$$

откуда следует справедливость первого утверждения леммы 1.5.

Чтобы доказать второе утверждение, прежде всего заметим, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для любых $y^0 \in \overline{B^+_{1/4}}$ и $R \leqslant 1/4$ в силу оценок (1.48) верны неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_y(\cdot,t)|^2 dy \leqslant \mathbb{K}_{17} R^{2(1-\varepsilon)}, \\ &\max_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}(\cdot,t)| + R^{\varepsilon-1} \operatorname{osc}_{\omega_R(y^0)} \widehat{v}(\cdot,t) \leqslant \mathbb{K}_{18}. \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

Эти неравенства позволяют в рамках приведенных выше рассуждений улучшить оценку (1.42) для $w = \widehat{v} - \theta$:

$$\int\limits_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 dy \leqslant c_9\big(R^{4(1-\varepsilon)} + c_F R^{2+2\beta}\big). \tag{1.50}$$

Обозначим $\beta_0 = 1 - 2/q$, $q > 2$ — из оценки (1.36). Для функции $\Phi_\rho(y^0) = \int\limits_{\omega_\rho(y^0)} |\widehat{v}_y - (\widehat{v}_y)_{y^0,\rho}|^2 dy$, $\rho \leqslant R$, с помощью оценок (1.36) и (1.50) выводим неравенство

$$\Phi_\rho(y^0) \leqslant c_{10}\big[(\rho/R)^{2+2\beta_0}\Phi_R(y^0) + R^{4(1-\varepsilon)} + c_F R^{2+2\beta}\big]. \tag{1.51}$$

Положим $\varepsilon = \frac{1-\beta}{2}$ и обозначим $\beta_1 = \min\{\beta_0, \beta\}$. Тогда из оценки (1.51), согласно указанной алгебраической лемме, получаем, что

$$\Phi_\rho(y^0) \leqslant c_{11}\big\{(\rho/R)^{2+2\delta_0}\Phi_R(y^0) + C_F \rho^{2+2\delta_0}\big\}, \quad \rho \leqslant R, \tag{1.52}$$

δ_0 — произвольное число в интервале $(0, \beta_1)$.

Из оценки (1.52), справедливой при любом $y^0 \in \overline{B^+_{1/4}}$, следует, что

$$\|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{L}^{2,2+2\delta_0}(B^+_{1/4})} \leqslant c\{1 + \|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|^2_{2,B^+_{1/2}} + \|v_t(\cdot,t)\|^2_{p,B^+_1/2}\} \leqslant \mathbb{K}_{19};$$

в силу изоморфизма пространств $\mathcal{L}^{2,2+2\delta_0}(\cdot)$ и $\mathbb{C}^{\delta_0}(\cdot)$ из полученной оценки следует, что

$$\|\widehat{v}_y(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^{\delta_0}(\overline{B^+_{1/4}})} \leqslant \mathbb{K}_{20}.$$

Переходя к глобальной постановке задачи, заключаем о справедливости оценки (1.28). •

Заметим, что из оценок (1.7) и (1.27) следует, что

$$\|u\|_{C^{\delta,\delta_1}(\overline{Q}_*)} \leqslant \mathbb{K}_{21}, \quad \delta \in (0,1), \ \ \delta_1 = \frac{\delta}{2(1+\delta)} \tag{1.53}$$

(см., например, [8, лемма 4]).

Оценки (1.53) и (1.28) гарантируют ([9, гл. II, лемма 3.1]), что производные $u_x(\cdot,t)$ непрерывны по Гёльдеру по переменной t в $\overline{Q}_*$ с показателем $\delta_2 = \frac{\delta_0\delta_1}{1+\delta_0}$. Таким образом, для некоторого $\gamma \in (0,1)$

$$\|u\|_{C^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_*)} + \|u_x\|_{C^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_*)} \leqslant \mathbb{K}_{22}. \tag{1.54}$$

Наличие оценки (1.54) позволяет посмотреть на задачу (0.1) как на линейную задачу с гёльдеровскими коэффициентами и правой частью из $C^{\gamma\alpha_0,\gamma\alpha_0/2}(\overline{Q}_*)$. Согласно известным результатам о гладкости решений задачи Коши–Дирихле [9, 10], заключаем, что $u \in H^{2+\gamma\alpha_0,1+\gamma\alpha_0/2}(\overline{Q}_*)$. Из оценки (1.23) с $\beta = 0$ следует, что $u_{xt} \in L_2(Q_*)$.

Теперь систему (0.1) можно рассмотреть как линейную с коэффициентами из $C^{\alpha_0,\alpha_0/2}(\overline{Q}_*)$ и заключить, что $u \in H^{2+\alpha_0,1+\alpha_0/2}(\overline{Q}_*)$ и, более того, $u \in \mathcal{K}\{[0,T]\}$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана. •

О сингулярном множестве. Предположим, что $u \in \mathcal{K}\{[0,T)\}$ — решение задачи (0.1) и $T > 0$ определяет максимальный интервал существования гладкого решения, т.е. u нельзя продолжить гладкой функцией вплоть до $t = T$. Тогда, согласно теореме 1, в некоторых точках $(\widehat{x}, T)$ нарушается условие (1.3), т.е. в таких точках при любом $R > 0$

$$\varlimsup_{t \nearrow T} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_R(\widehat{x})} \geqslant \varepsilon_0, \tag{1.55}$$

число $\varepsilon_0 > 0$ — из формулировки теоремы 1.

Множество всех точек $\widehat{x}$, для которых выполняется соотношение (1.55), обозначим σ. Положим $\Sigma_T = \sigma \times \{T\}$.

Зафиксируем конечное число точек $x^1, \ldots, x^M \in \sigma$ и число $R > 0$ такое, что $B_{2R}(x^i) \cap B_{2R}(x^j) = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j \leqslant M$, и $C_1 R^2/\nu_0 \leqslant \varepsilon_0/8$ (здесь и далее c_1, c_2, c_3 — постоянные из оценки (1.8)). Пусть числа $t^k \in (0,T)$ фиксированы из условия

$$\|u_x(\cdot,t^k)\|^2_{2,\Omega_R(x^k)} \geqslant \varepsilon_0/2, \quad k = 1,\ldots,M. \tag{1.56}$$

Можно считать, что $t^k \geqslant T - \theta R^2 \equiv \widehat{t}$, где $\theta = \min\{\frac{\varepsilon_0 \nu_0}{8c_3 E_0}, 1\}$. Из оценки (1.8) следует, что

$$\|u_x(\cdot,t^k)\|^2_{2,\Omega_R(x^k)} \leqslant \frac{3\varepsilon_0}{8} + \frac{c_2}{\nu_0}\|u_x(\cdot,\widehat{t})\|^2_{2,\Omega_{2R}(x^k)}. \tag{1.57}$$

Из (1.57) и (1.56) выводим неравенство

$$\|u_x(\cdot,\widehat{t})\|^2_{2,\Omega_{2R}(x^k)} \geqslant \frac{\varepsilon_0\nu_0}{8c_2}.$$

Теперь, учитывая энергетическую оценку (1.6), получаем, что

$$E_0 \geqslant \|u_x(\cdot,\widehat{t})\|^2_{2,\Omega} \geqslant \sum_{k=1}^{M} \|u_x(\cdot,\widehat{t})\|^2_{2,\Omega_{2R}(x^k)} \geqslant \frac{M\varepsilon_0\nu_0}{8c_2},$$

т.е.

$$M \leqslant \frac{8E_0c_2}{\varepsilon_0\nu_0}. \tag{1.58}$$

Отсюда следует, что множество σ может включать не более конечного числа точек.

Более того, можно утверждать, что решение из $\mathcal{K}\{[0,T)\}$ продолжимо с сохранением гладкости на множество $\overline{Q} \setminus \Sigma_T$. Действительно, зафиксируем положительное число $\lambda \ll 1$ и рассмотрим множество $\mathcal{D} \subset \overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{M} \Omega_\lambda(x^j)$, $\bigcup_{j=1}^{M} x^j = \sigma$. Существует $r_0 < \lambda$ такое, что

$$\sup_{[0,T)} \sup_{x^0 \in \mathcal{D}} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_{r_0}(x^0)} < \varepsilon_0, \tag{1.59}$$

ε_0 — из условия (1.3).

Анализируя доказательство теоремы 1 и используя локальные оценки (1.8), (1.20), (1.24) и локальный вариант оценки (1.23), нетрудно доказать, что $u \in H^{2+\alpha_0, 1+\alpha_0/2}(\overline{\mathcal{D}} \times [0,T])$, $u_{xt} \in L_2(\mathcal{D} \times (0,T))$. Так как число $\lambda > 0$ фиксировано произвольно, то решение $u(x,t)$ продолжимо с сохранением гладкости на множество $\overline{Q} \setminus \Sigma_T$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть относительно области Ω, функций φ^k, a^k_α, b^k выполнены предположения теоремы 1. Пусть $u \in \mathcal{K}\{[0,T)\}$ и $T > 0$ определяет максимальный интервал существования гладкого решения u. Тогда в $\overline{\Omega}$ может существовать не более конечного числа точек $\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^M$, в которых при $t = T$ нарушается гладкость функции u. Каждая точка $\widehat{x}^j$, $j = 1, \ldots, M$, характеризуется тем, что при любом $R > 0$*

$$\overline{\lim_{t \nearrow T}} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_R(\widehat{x}^j)} \geqslant \varepsilon_0,$$

число $\varepsilon_0 > 0$ определяется параметрами задачи.

Замечание 4. Если система (0.1) имеет вариационную структуру, точнее, выполнены условия утверждения 2) леммы 1.1, то энергия $\mathcal{E}[u(t)]$ монотонна и постоянная E_0 в оценке (1.6) не зависит от T. В этом случае количество возможных сингулярных точек (число M) оценивается постоянной, не зависящей от $T > 0$.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим решение задачи (0.1) в классе функций

$$Y(Q) = W^{2,1}_2(Q) \cap L_\infty((0,T); W^1_2(\Omega)). \tag{1.60}$$

Заметим, что если $v \in Y(Q)$, то для $w = v_x$ конечна норма

$$\big|w\big| = \sup_{(0,T)} \|w(\cdot,t)\|_{2,\Omega} + \|w_x\|_{2,Q}.$$

Согласно теореме вложения [9, гл. II, §3],

$$\|v_x\|_{4,Q} \leqslant C\big(T/|\Omega|\big)\big|v_x\big|_Q < +\infty. \tag{1.61}$$

Теорема 3. *Задача* (0.1) *может иметь в классе $Y(Q)$ не более одного решения.*

Доказывается этот результат довольно просто, приведем доказательство для полноты изложения.

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in Y(Q)$ — решения задачи (0.1); $v = u_1 - u_2 \in Y(Q)$, $v|_{\partial' Q} = 0$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q^t} (v^k_t \eta^k + \mathfrak{A}^{\alpha\beta}_{kl} v^l_{x_\beta} \eta^k_{x_\alpha} + \mathcal{D}^\alpha_{km} v^m \eta^k_{x_\alpha} + \mathcal{R}^\alpha_{kl} v^l_{x_\alpha} \eta^k + \mathcal{P}_{km} v^m \eta^k) dQ = 0,$$

с любой гладкой функцией η, $\eta|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$.

Здесь $Q^t = \Omega \times (0, T)$,

$$\mathfrak{A}_{kl}^{\alpha\beta} = \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha^k(z, u_1, \tau u_{1x} + (1-\tau)u_{2x})}{\partial p_\beta^l} d\tau,$$

$$\mathcal{D}_{km}^\alpha = \int_0^1 \frac{\partial a_\alpha^k(z, \tau u_1 + (1-\tau)u_2, u_{2x})}{\partial u^m} d\tau,$$

$$\mathcal{R}_{kl}^\alpha = \int_0^1 \frac{\partial b^k(z, u_1, \tau u_{1x} + (1-\tau)u_{2x})}{\partial p_\alpha^l} d\tau,$$

$$\mathcal{P}_{km} = \int_0^1 \frac{\partial b^k(z, \tau u_1 + (1-\tau)u_2, u_{2x})}{\partial u^m} d\tau.$$

Из этого тождества с $\eta = v$ с помощью условий (0.5), (0.6), (0.8) выводим неравенство

$$\int_\Omega |v(x,t)|^2 dx + \nu \int_{Q^t} |v_x|^2 dz \leqslant c \int_{Q^t} \mathcal{M}(z)|v|^2 dz, \tag{1.62}$$

где $\mathcal{M}(z) \equiv 1 + |(u_1)_x|^2 + |(u_2)_x|^2$, $\quad c = c(\nu, \mu_2, \mu_6)$.

Зафиксируем пока произвольно $t_1 \in (0, T]$ и будем считать, что $t \in (0, t_1]$. Согласно оценке (1.61), $\int_{Q^T} \mathcal{M}^2(z) dz < +\infty$.

Справедливы неравенства

$$\int_{Q^t} \mathcal{M}|v|^2 dz \leqslant \Big(\int_{Q^t} \mathcal{M}^2 dz\Big)^{1/2} \Big(\int_{Q_t} |v|^4 dz\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \sqrt{2}\Big(\int_{Q^t} \mathcal{M}^2 dz\Big)^{1/2} \Big(\int_{Q^t} |v_x|^2 dz\Big)^{1/2} \sqrt{t}\Big(\sup_{[0,t_1]} \int_\Omega |v(x,\tau)|^2 dx\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{\nu}{4} \int_{Q^t} |v_x|^2 dz + c_0 \|\mathcal{M}\|_{2,Q^t}^2 t \sup_{[0,t_1]} \|v(\cdot,\tau)\|_{2,\Omega}^2, \quad c_0 = c_0(\nu, \mu_2, \mu_6). \tag{1.63}$$

Выберем δ из условия

$$c_0 \delta \|\mathcal{M}\|_{2,Q^T}^2 \leqslant \frac{1}{4}. \tag{1.64}$$

Фиксируя $t_1 = \delta$, из неравенств (1.62), (1.63), выводим, что

$$\sup_{[0,t_1]} \|v(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_{Q^{t_1}} |v_x|^2 dz \leqslant 0,$$

т.е. $v \equiv 0$ в $\overline{Q^{t_1}}$.

Повторяя рассуждение, показываем, что $v \equiv 0$ в Ω на интервале $[t_1, t_1 + \delta]$, δ — из условия (1.64). За конечное число шагов можно доказать, что $v \equiv 0$ в $\overline{Q}$, т.е. $u_1 \equiv u_2$ в $\overline{Q}$. •

Для решений класса $Y(Q)$ справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 1°. *Пусть* $\partial\Omega$, φ, a_α^k, b^k *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Если известно, что решение* u *задачи* (0.1) *принадлежит классу* $Y(Q)$, *тогда* $u \in \mathcal{K}\{(0,T]\}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для доказательства гладкости функции u на интервале $(0,T]$ нам не нужно условие (1.3), так как оно использовалось только для того, чтобы показать конечность интеграла $J = \int_Q |u_x|^4 dz$.

Анализируя доказательства лемм 1.3 и 1.4, можно установить, что для некоторого $\beta^* \in (0,1)$ при любых $\tau > 0$ и $\beta \leqslant \beta^*$ верны оценки

$$\begin{gathered}\sup_{[\tau,T)} \int_\Omega |\widehat{u}_t(x,t)|^{2+2\beta} dx + \int_{Q^{\tau,T}} (|\widehat{u}_{xt}|^2 |\widehat{u}_t|^{2\beta} + |\widehat{u}_t|^{3+2\beta}) dxdt \leqslant H_1, \\ \sup_{[\tau,T)} \int_\Omega |\widehat{u}_x(x,t)|^{2+2\beta} dx \leqslant H_2,\end{gathered} \tag{1.65}$$

где $Q^{\tau,T} = \Omega \times (\tau, T)$, постоянные H_1 и H_2 зависят от параметров ν, μ_i, T, C^{1+1} — характеристики $\partial\Omega$, норм $\|\varphi\|_{Y(Q^{\tau,T})}$, $\|u\|_{Y(Q^{\tau,T})}$ и величины τ^{-1}. Выводятся эти оценки точно так же, как в замечаниях 1.3 и 3.2 работы [1].

Дальнейшая гладкость u и оценки

$$\begin{gathered}\sup_{(\tau,T)} \|u(\cdot,t)\|_{C^\delta(\overline{\Omega})} \leqslant H_3, \quad \delta \in (0,1), \\ \sup_{(\tau,T)} \|u_x(\cdot,t)\|_{C^{\delta_0}(\overline{\Omega})} \leqslant H_4 \quad \text{с некоторым } \delta_0 \in (0,1)\end{gathered} \tag{1.66}$$

при произвольном $\tau > 0$ и постоянных H_3, H_4, зависящих от тех же величин, что и H_1, H_2, выводятся точно так же, как оценки (1.27) и (1.28). Отметим только, что, рассматривая $u(\cdot,t)$ как решение эллиптической системы (1.29), нам достаточно знать, что $u \in W_2^1(\Omega) \cap C^\beta(\overline{\Omega})$ с каким-либо $\beta > 0$. Эта информация у нас есть.

Из оценок (1.65), (1.66) дальнейшая гладкость u получается при $\tau > 0$ точно так, как это сделано при доказательстве теоремы 1. •

§2. Локальная разрешимость задачи

Для доказательства классической разрешимости задачи (0.1) на некотором временном интервале $[0, T_*)$ мы воспользуемся методом Лере–Шаудера. Схема реализации этого метода такая, как в монографии [9, гл. 5, §6], где доказана классическая разрешимость задачи Коши–Дирихле для *скалярных* нелинейных уравнений на произвольном временном интервале. В рамках выбранного метода основным моментом является получение априорных оценок решений нелинейных задач в пространствах Гёльдера. Для *систем* уравнений автору удалось получить такие оценки на достаточно малом временном интервале и при ограничениях (0.2), (0.7), $\dim\Omega = 2$.

Для описания гладких решений мы воспользуемся определением (1.2) класса гладких функций $\mathcal{K}\{[t_1,t_2]\}$.

Положим $L_0\varphi \equiv \varphi_t - \Delta\varphi$.

Теорема 4. *Пусть* $T > 0$, $\alpha_0 \in (0,1)$ *фиксированы произвольно,* $\partial\Omega \in C^{2+\alpha_0}$, $\varphi \in H^{2+\alpha_0, 1+\alpha_0/2}(\overline{Q})$, φ_{xt}, φ_{tt}, $(L_0\varphi)'_t \in L_4(Q)$, *выполнено условие* (1.2); *для функций* a^k_α, b^k *выполняются предположения* а), б) *Введения. Тогда для некоторого* $T_* \in (0, T]$ *на интервале* $[0, T_*)$ *существует единственное решение* u *задачи* (0.1) *класса* $\mathcal{K}\{[0, T_*)\}$.

Доказательство. Задачу (0.1) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &u^k_t - A^{\alpha\beta}_{kl}(x,t,u,u_x)u^l_{x_\beta x_\alpha} + d^k(x,t,u,u_x) = 0, \quad z = (x,t) \in Q,\\ &u^k|_{\partial' Q} = \varphi^k(x,t), \quad k = 1,\dots,N. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Здесь $A^{\alpha\beta}_{kl}(z,u,p) = f_{p^k_\alpha p^l_\beta}(z,u,p), d^k(z,u,p) = -f_{p^k_\alpha u^m}(z,u,p)p^m_\alpha - f_{p^k_\alpha x_\alpha}(z,u,p) + b^k(z,u,p)$.

Согласно условиям (0.3)–(0.8), на множестве $\mathfrak{M} = \overline{Q} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$ выполняются соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl}(z,u,p)\xi^k_\alpha\xi^l_\beta \geqslant \nu|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2N}, \ \nu = \mathrm{const} > 0,\\ &\sup_{\mathfrak{M}} |\mathcal{A}(z,u,p)| \leqslant \mu, \quad \mathcal{A} = \{\mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl}\}^{\alpha,\beta\leqslant 2}_{k,l\leqslant N}\\ &|d(z,u,p)| \leqslant d_0(1+|p|^2), \quad d_0 = d_0(\mu_2,\mu_4,\mu_5). \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Кроме того, функции $\mathcal{A}^{\alpha\beta}_{kl}$ и d^k удовлетворяют на $\forall$ компакте множества $\mathfrak{M}$ условию Гёльдера с показателями α_0, $\alpha_0/2$, α_0, α_0 по аргументам x, t, u, p соответственно.

Для $\tau \in [0,1]$ рассмотрим семейство линейных задач

$$\begin{aligned} &v^k_t - [\tau A^{\alpha\beta}_{kl}(z,w,w_x) + (1-\tau)\delta^\alpha_\beta\delta^k_l]v^l_{x_\beta x_\alpha}\\ &\quad + \tau d^k(z,w,w_x) - (1-\tau)(\varphi^k_t - \Delta\varphi^k) = 0, \quad z \in Q, \ k = 1,\dots,N,\\ &\qquad v|_{\partial' Q} = \varphi(z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Пусть $T_0 \leqslant T$, $Q_0 = \Omega \times (0, T_0)$. Определим пространство функций

$$X_\gamma(T_0) = \{w : \overline{Q}_0 \to \mathbb{R}^N \mid w, w_x \in \mathbb{C}^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_0)\}$$

с нормой $\|w\|_{X_\gamma(T_0)} = \|w\|_{\mathbb{C}^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_0)} + \|w_x\|_{\mathbb{C}^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_0)}$, $\gamma \in (0,1)$.

Для произвольно фиксированных $w \in X_\gamma(T_0)$ и $\tau \in [0,1]$, согласно известным результатам о разрешимости линейной задачи Коши–Дирихле (см., например, [9, гл. VII, §10]), существует единственное решение задачи (2.3) $v^{(\tau)} \in H^{2+\alpha_1, 1+\alpha_1/2}(\overline{Q}_0)$, $\alpha_1 = \alpha_0\gamma$, при этом существует $v^{(\tau)}_{xt} \in L_2(Q_0)$. Для решения $v^{(\tau)}$ справедлива оценка

$$\|v^{(\tau)}\|_{H^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{Q}_0)} \leqslant c\{\|\varphi\|_{H^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{Q}_0)} + \|d\|_{\mathbb{C}^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\overline{Q}_0)}\}.$$

Постоянная c в этой оценке зависит от $\mathbb{C}^{2+\alpha_1}$-гладкости $\partial\Omega$ и $\|A\|_{\mathbb{C}^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\overline{Q}_0)} < +\infty$.

Таким образом,

$$v = \Phi(w,\tau), \tag{2.4}$$

где Φ — нелинейный оператор, зависящий от $\tau \in [0,1]$.

Покажем, что для достаточно малого T_0 отображение Φ имеет при любом $\tau \in [0,1]$ неподвижные точки u^τ, т.е.

$$u^{(\tau)} = \Phi(u^{(\tau)}, \tau). \tag{2.5}$$

В частности, при $\tau = 1$ решение уравнения (2.5) будет гладким решением начально-краевой задачи (2.1).

Ключевым моментом доказательства разрешимости уравнения (2.5) является вывод априорных оценок решений $u^{(\tau)}$. Точнее, будет доказан следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Существует* $T^* \in (0,T]$ *такое, что для решений* $u^{(\tau)}$ *задачи* (2.5) *класса* $\mathbb{C}^{2,1}(\overline{Q}_0)$, $Q_0 = \Omega \times (0,T_0)$, $tT_0 < T_*$, *верна оценка*

$$\|u^{(\tau)}\|_{X_\delta(T_0)} \leqslant m, \quad t\tau \in [0,1], \tag{2.6}$$

с некоторым показателем $\delta \in (0,1)$ *и постоянной* m, *зависящими от параметров из условий на данные задачи и* T_*, *но не зависящими от* $\tau \in [0,1]$. *Кроме того, при любом* $\tau \in [0,1]$ *существует* $u_{xt}^{(\tau)} \in L_2(Q_0)$ *и*

$$\|u_{xt}^{(\tau)}\|_{2,Q_0} \leqslant m_1, \tag{2.7}$$

постоянная m_1 *зависит от тех же параметров, что и* m.

Доказательство этой теоремы мы приведем в конце данного параграфа, а сейчас для произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ положим $M = m + \varepsilon$ (m — из оценки (2.6)) и обозначим

$$\mathfrak{N} = \{v \in X_\delta(T_0) \mid \|v\|_{X_\delta(T_0)} \leqslant M\}, \qquad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \times [0,1],$$
$$X = X_\delta(T_0), \quad T_0 < T_*.$$

Отображение $\Phi(u,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(u,\tau) : \mathfrak{N}_1 \to X$ — вполне непрерывно;

2) $\partial\mathfrak{N}$ не содержит решений уравнения $u = \Phi(u,\tau)$, $\tau \in [0,1]$;

3) уравнение $u = \Phi(u,0)$ имеет единственное решение в X и преобразование $u - \Phi(u,0)$ обратимо в окрестности этого решения.

Утверждение 1) проверяется в нашем случае точно так же, как это сделано при доказательстве теоремы 6.1 гл. 5 [9]. Оценка (2.6) гарантирует справедливость утверждения 2). Наконец, задача

$$v_t - \Delta v = \varphi_t - \Delta\varphi \quad \text{в } Q_0,$$
$$v/\partial' Q_0 = \varphi$$

имеет единственное решение $v = \varphi \in \mathfrak{N}$, т.е. $\Phi(w,0) \equiv \varphi$, $w \in \mathfrak{N}$. Отсюда следует справедливость утверждения 3).

Согласно теореме Лере–Шаудера, при выполнении условий 1)–3) уравнение (2.5) имеет по крайней мере одно решение $u^{(\tau)}$ в $H^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{Q}_0)$, $\alpha_1 = \alpha_0\cdot\delta$, при любом $\tau\in[0,1]$. На самом деле, нетрудно убедиться, что $u^{(\tau)}\in\mathcal{K}\{[0,T_0]\}$. В частности, при $\tau=1$ отсюда следует существование решения класса $\mathcal{K}\{[0,T_0]\}$ задачи (2.1) и, следовательно, задачи (0.1). Единственность решения задачи (0.1) класса $\mathcal{K}\{[0,T_*)\}$ следует из теоремы 3, §1.

Чтобы завершить доказательство теоремы 4, нам осталось доказать теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Определим функционал

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(\tau)}[v] &= \int\limits_\Omega [\tau f(x,t,v,v_x) + (1-\tau)(|v_x|^2/2 - \varphi_x v_x - \varphi_t v)]dx\\ &\equiv \int\limits_\Omega F^{(\tau)}(x,t,v,v_x)dx \end{aligned}\tag{2.8}$$

и обозначим как $L^{(\tau)}$ — оператор Эйлера этого функционала, $\tau\in[0,1]$.

Задачу (2.5) можно записать в форме

$$\begin{gathered} u_t^k - \frac{d}{dx_\alpha}F^{(\tau)}_{p^k_\alpha}(x,t,u,u_x) + F^{(\tau)}_{u^k}(x,t,u,u_x)\\ +\tau(b^k(x,t,u,u_x) - f_{u^k}(x,t,u,u_x)) = 0, \quad z=(x,t)\in Q,\ k\leqslant N,\\ u|_{\partial' Q} = \varphi. \end{gathered}\tag{2.9}$$

Для задачи (2.9) выполнены условие (0.2) и условие согласования первого порядка, а функция $F^{(\tau)}(x,t,u,p)$ и ее производные оцениваются следующим образом:

$$\begin{gathered}\widehat{\nu}|p|^2 - \mu_1 - l|p| - l|u| \leqslant F^\tau \leqslant \widehat{\mu}|p|^2 + \mu_1 + l|p| + l|u|,\\ \widehat{\nu} = \min(\nu_0,1/2),\quad \widehat{\mu} = \max(\mu_0,1/2);\end{gathered}\tag{2.10}$$

$$|F^{(\tau)}_u| + |F^{(\tau)}_t| \leqslant (\mu_2+l)(1+|p|^2) + l|v|,\quad |F^{(\tau)}_p| \leqslant (\mu_2+1)|p| + \mu_2 + l;\tag{2.11}$$

$$|F^{(\tau)}_{pu}| + |F^{(\tau)}_{px}| + |F^{(\tau)}_{pt}| \le \mu_2(1+|p|) + l;\tag{2.12}$$

$$|F^{(\tau)}_{pp}| \leqslant \mu_2 + 1,\qquad \frac{\partial^2 F^{(\tau)}}{\partial p^k_\alpha \partial p^l_\beta}\xi^k_\alpha\xi^l_\beta \geqslant \min\{\nu,1\}|\xi|^2,\quad \xi\in\mathbb{R}^{2N}.\tag{2.13}$$

Здесь и далее через l обозначаются постоянные, определяемые известными нормами функции φ.

Условия (2.10)–(2.13) несущественно отличаются от предположений (0.3)–(0.5) о функции f. Более того, условия п.а) Введения гарантируют, что $F^{(\tau)}_{px}$, $F^{(\tau)}_{pp}$, $F^{(\tau)}_{pu}$ — непрерывны по Гёльдеру по переменным x, t, u, p с показателями α_0, $\alpha_0/2$, α_0, α_0 соответственно на любом компакте множества $\mathfrak{M}$.

Из условий б) Введения следует, что функция $\mathbb{B}^{(\tau)} = F^{(\tau)}_u + \tau(b - f_u)$ удовлетворяет условиям

$$|\mathbb{B}^{(\tau)} - F^{(\tau)}_u| \leqslant \mu_3(1+|p|),\tag{2.14}$$

$$|\mathbb{B}^{(\tau)}| \leqslant \mu_4|p|^2 + \mu_5 + l,\tag{2.15}$$

$$|\mathbb{B}^{(\tau)}_t| + |B^{(\tau)}_u| + |B^{(\tau)}_p|(1+|p|) \leqslant \mu_6(1+|p|^2) + l.\tag{2.16}$$

Кроме того, функция $\mathbb{B}^{(\tau)}$ непрерывна по Гёльдеру по аргументам x_1, x_2 с показателем α_0 на всяком компакте множества $\mathfrak{M}$.

Чтобы вывести оценку (2.6), проанализируем доказательства лемм 1–5, §1.

П. 1. Энергетические оценки. Для $u = u^{(\tau)}$ при всех $\tau \in [0,1]$ верно неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |u_t|^2 dx\, dt + \mathcal{E}^{(\tau)}[u(t)]|_0^t$$
$$\leqslant c_* \int_0^t\int_\Omega |u_x(x,t)|^2 dx\, dt + ct, \quad t \in [0,T], \ \ c_* = c_*(\mu_2,\mu_3), \ \ c = c(\mu_i, l). \tag{2.17}$$

Из (2.17) при $t_0 < \widehat{\nu}/c_*$ ($t_0 \leqslant T$) выводятся оценки

$$\sup_{[0,t_0]} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega} \leqslant E_0, \quad \|u_t\|^2_{2,Q_0} \leqslant c_0, \tag{2.18}$$

с постоянными E_0 и c_0, зависящими от μ_i, l, $(\widehat{\nu} - c_* t_0)^{-1}$ и t_0.

Кроме того, для любых $x^0 \in \overline{\Omega}$, $R > 0$, $t \leqslant t_0$ верна оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega_R(x^0)} |u_t|^2 dx\, dt + \sup_{[0,t]} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_R(x^0)}$$
$$\leqslant c_1(t+R^2) + c_2\|\varphi_x(\cdot,0)\|^2_{2,\Omega_{2R}(x^0)} + c_3\frac{E_0 t}{R^2}, \tag{2.19}$$

постоянные c_1– c_3 зависят от тех же величин, что и E_0.

Замечание 5. Зафиксируем произвольно $\widehat{\varepsilon} > 0$. Тогда существуют $\widehat{t} \leqslant t_0$ и $\widehat{R}$ такие, что

$$\sup_{[0,\widehat{t}]}\ \sup_{x^0\in\overline{\Omega}} \|u_x^{(\tau)}(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_{\widehat{R}}(x^0)} < \widehat{\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Действительно, пусть c_1– c_3 — постоянные из оценки (2.19).

Существует $\widehat{R} > 0$ такое, что

$$c_1\widehat{R}^2 + c_2\|\varphi_x(\cdot,0)\|^2_{2,\Omega_{2\widehat{R}}(x^0)} < \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}, \quad x^0 \in \overline{\Omega}.$$

Выберем $\widehat{t} \leqslant t_0$ так, чтобы

$$c_1\widehat{t} + \frac{c_3 E_0 \widehat{t}}{\widehat{R}^2} < \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}.$$

Из оценки (2.19) с $t = \widehat{t}$ и $R = \widehat{R}$ следует (2.20).

П. 2. Существует $t_1 \in (0, t_0)$ такое, что при любом $\tau \in [0,1]$ для $u^{(\tau)}$ справедлива оценка

$$\|u^{(\tau)}_{xx}\|^2_{2,Q_1} + \|u^{(\tau)}_x\|^4_{4,Q_1} \leqslant K_1, \quad Q_1 = \Omega \times (0, t_1), \tag{2.21}$$

где постоянные t_1 и K_1 определяются параметрами ν, μ_i, l, t_0, $\mathbb{C}^{1+1}$ — характеристикой $\partial\Omega$ и не зависят от τ.

Чтобы получить оценку (2.21), мы переходим к локальной постановке задачи так, как это сделано в §1. Если систему (2.9) кратко записать в следующей форме:

$$u^k_t - \frac{d}{dx_\alpha} a^{k(\tau)}_\alpha(x, t, u, u_x) + B^{k(\tau)}(x, t, u, u_x) = 0, \quad x \in \Omega, \ t > 0, \ k = 1, \dots, N,$$
$$u = u^{(\tau)}, \quad \tau \in [0,1],$$

тогда в новых переменных (см. постановку задачи (1.15)) функция $v = v^{(\tau)}(y,t) = u^{(\tau)}(x(y), t)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} v^k_t - \frac{d}{dy_\beta} A^{k(\tau)}_\beta(y, t, v, v_y) + \mathcal{D}^{k(\tau)}(y, t, v, v_y) = 0, \quad y \in B^+_2, \ t \in (0, t_0), \\ v|_{\gamma_2 \times (0, t_0)} = \psi(y, t), \quad v|_{t=0} = \psi(y, 0), \end{gathered} \tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned} A^{k(\tau)}_\beta(y, t, v, q) &= a^{k(\tau)}_\alpha\left(x(y), t, u, q\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha}, \\ \mathcal{D}^{k(\tau)}(y, t, v, q) &= \mathbb{B}^{k(\tau)}\left(x(y), t, u, q\frac{\partial y}{\partial x}\right) - A^{k(\tau)}_\beta(y, t, v, q) \cdot \frac{J_{y_\beta}(y)}{J(y)}, \\ J(y) &= \left|\det\left\{\frac{\partial x(y)}{\partial y}\right\}\right| > 0 \quad \text{в } \overline{B^+_2}; \\ \psi(y,t) &= \varphi(x(y), t), \\ \gamma_2 &= B_2 \cap \{y_2 = 0\}. \end{aligned}$$

С помощью условий (2.10)–(2.13), (2.15), (2.16) можно выписать ограничения на функции $A^{(\tau)}_\beta$, $\mathcal{D}^{(\tau)}$ и их производные, при этом все параметры в этих условиях можно взять независящими от $\tau \in [0,1]$.

Прежде всего заметим, что из оценки (2.19) следует локальная оценка для $v = v^{(\tau)}$:

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\omega_R(y^0)} |v_t|^2 dy\, dt + \sup_{[0,t]} \|v_y(\cdot, t)\|^2_{2,\omega_R(y^0)} \leqslant c_*[t + R^2 + E_0 t/R^2],$$
$$y^0 \in B^+_{3/2}, \quad R \leqslant 1/2, \quad t \leqslant t_0. \tag{2.23}$$

Далее, для функций $v^{(\tau)}$ легко доказывается аналог леммы 1.2, §1 (подробно доказательство см. лемму 2.1, [1]). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Существует число $\varepsilon_1 > 0$, определяемое параметрами ν, μ_i, l, $\mathbb{C}^{1+1}$ — характеристикой $\partial\Omega$ и не зависящее от $\tau \in [0,1]$, такое, что если для некоторого $R_1 \in (0, \frac{1}{2}]$ и $t_1 \leqslant t_0$ выполняется условие*

$$\sup_{[0,t_1]} \sup_{y^0 \in \overline{B^+_{3/2}}} \|v_y^{(\tau)}(\cdot,t)\|^2_{2,\omega_{R_1}(y^0)} < \varepsilon_1, \tag{2.24}$$

$\omega_{R_1}(y^0) = B_2^+ \cap B_{R_1}(y^0)$, тогда для любого $y^0 \in \overline{B^+_{3/2}}$ и любого $R \leqslant R_1/2$ верна оценка

$$\int_0^t \int_{\omega_R(y^0)} (|v_y^{(\tau)}|^4 + |v_{yy}^{(\tau)}|^2) dy\, dt \leqslant K_2(E_0 t/R^2 + R^2 + t), \tag{2.25}$$

где постоянная K_2 зависит от тех же параметров, что и ε_1, и постоянной c_0 (c_0, E_0 — из оценок (2.18)).

Из утверждения 2.1, в частности, следует, что

$$\int_0^{t_1} \int_{B^+_{\frac{3}{2}}} (|v_y^{(\tau)}|^4 + |v_{yy}^{(\tau)}|^2) dy\, dt \leqslant c(c_0, E_0, R_1^{-1}, t_1, l) \equiv K_3. \tag{2.26}$$

Как отмечено в замечании 3, §1, условие (2.24) будет выполняться, если при некоторых $\varepsilon_0 > 0$, $R_0 > 0$, вычисляемых по ε_1 и R_1, для решений $u^{(\tau)}$ задачи (2.9) имеет место оценка

$$\sup_{[0,t_1]} \sup_{x^0 \in \overline{\Omega}} \|u_x^{(\tau)}(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_{R_0}(x^0)} < \varepsilon_0. \tag{2.27}$$

Согласно замечанию 5, при $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon_0$ найдутся такие $\widehat{t} \leqslant t_0$ и $\widehat{R}$, что верно неравенство (2.20). Полагая $t_1 = \widehat{t}(\varepsilon_0)$, $R_0 = \widehat{R}(\varepsilon_0)$, получаем, что верна оценка (2.27). Отсюда следует выполнение условия (2.24), а значит, и справедливость оценок (2.25), (2.26), (2.21).

П. 3. Следующий шаг состоит в получении при некоторых $t_2 \in (0, t_1]$ и $\beta \in (0,1)$ оценки

$$\sup_{[0,t_2]} \|u_t^{(\tau)}(\cdot,t)\|_{2+2\beta,\Omega} \leqslant K_4, \quad \tau \in [0,1]. \tag{2.28}$$

При фиксированном $\tau \in [0,1]$ глобальная оценка (2.28) может быть получена на интервале $[0, t_2]$ так, как это сделано при доказательстве леммы 1.3 §1, но с t_2, быть может, зависящей от τ. Напомним, что при доказательстве леммы 1.3 используется не только конечность, но и абсолютная непрерывность интеграла $J = \int_0^{t_1} \int_\Omega |u_x|^4 dx\, dt$. В данном случае нам потребовалась бы равномерная по $\tau \in [0,1]$ абсолютная непрерывность интегралов $J_\tau = \int_0^{t_1} \int_\Omega |u_x^{(\tau)}|^4 dx\, dt$, но такой информации у нас нет. Вот почему в данном случае мы предварительно выведем локальную оценку нужной нормы и воспользуемся при этом не оценкой (2.26), а более точной оценкой (2.25).

Утверждение 2.2. *Существуют* $t_2 \in (0,t_1]$, $R_2 \leqslant R_1$ *и* $\beta_* \in (0,1)$ t_1, R_1 *— из утверждения* 2.1) *такие, что для функции* $\widehat{v} = v^{(\tau)} - \psi$ *при* $\beta \leqslant \beta_*$, $R \leqslant R_2/3$, $\tau \in [0,1]$ *верно неравенство*

$$\sup_{[0,t_2]} \int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta} dy + \int\limits_0^{t_2} \int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_{yt}|^2 |\widehat{v}_t|^{2\beta} dy\, dt \leqslant K_5; \tag{2.29}$$

постоянные t_2, R_2 *и* K_5 *зависят от* ν, μ_i, l, C^{1+1} *характеристики* $\partial\Omega$, *кроме того, величина* K_5 *зависит от* T_0 *и* R^{-1}.

Для доказательства этого утверждения мы записываем систему (2.22) относительно $\widehat{v} = v - \psi$, затем составляем разностное отношение по t для полученной системы, домножаем его на функцию $\eta = \frac{\Delta \widehat{v}}{\Delta t} |\frac{\Delta \widehat{v}}{\Delta t}|^{2\beta} \zeta^2(y)$ и интегрируем по множеству $B^+_{3/2} \times (0,t)$, $t \leqslant t_2$. Значение $t_2 \leqslant t_1$ и $\beta > 0$ пока фиксированы произвольно, ζ — срезающая для $B_{2R}(y^0)$ функция, $y^0 \in \overline{B^+_1}$, $R \leqslant R_1/2$. После интегрирования по частям по переменным y и предельного перехода по $\Delta t \to 0$ получаем равенство, из которого при $\beta \leqslant \beta_*$ (β_* зависит от ν, μ_2, C^{1+1} — характеристики $\partial\Omega$) выводится оценка

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(1+\beta)} \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta} \xi^2 dy\Big|_0^t + \frac{\overline{\nu}}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2\beta} |\widehat{v}_{yt}|^2 \xi^2 dy\, dt \\
&\leqslant c_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} (1 + |\widehat{v}_t|^2 + |\widehat{v}_y|^2)(\xi^2 + |\xi_y|^2) dy\, dt \\
&+ c_2 \int\limits_0^t \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta} |\widehat{v}_y|^2 \xi^2 dy\, dt \\
&+ c_3 \int\limits_0^t \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} (1 + |\widehat{v}_t|^{2+2\beta} + |\widehat{v}_y|^4) |\xi_y|^2 dy\, dt, \\
&\qquad \overline{\nu} = \min(\nu, 1).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Интеграл с постоянной c_2 оценивается, согласно мультипликативному неравенству (1.4), следующим образом. Пусть

$$\mathbb{P}(t) = \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_t(y,t)|^{2+2\beta} |\widehat{v}_y(y,t)|^2 \xi^2 dy,$$

тогда

$$\mathbb{P}(t) \leqslant \Bigg(\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_y(y,t)|^4 dy \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\omega_{2R}} (|\widehat{v}_t(y,t)|^{1+\beta} \xi(y))^4 dy \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sqrt{2}\Big(\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_y|^4 dy\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta}\xi^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_{\omega_{2R}} |(|\widehat{v}_t|^{1+\beta}\xi)_y|^2 dy\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \theta \int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t|^{2\beta}|\widehat{v}_{ty}|^2\xi^2 dy$$
$$+\theta \int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta}|\xi_y|^2 dy + \frac{1}{\theta}\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_y|^4 dy \int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta}\xi^2 dy, \quad \theta > 0.$$

Далее, фиксируем $\theta = \overline{\nu}/4$ и из (2.30) для $t \leqslant t_2$ выводим:

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t(y,t)|^{2+2\beta}\xi^2(y) dy + \frac{\overline{\nu}}{4}\int\limits_0^t\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t|^{2\beta}|\widehat{v}_{yt}|^2\xi^2 dy\, dt$$
$$\leqslant c(R^{-1},T_0) + \frac{c_2}{\theta}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_y|^4 dy\, dt \sup_{[0,t_2]}\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t(y,t)|^{2+2\beta}\xi^2(y) dy$$
$$+\frac{c_3}{R^2}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\omega_{2R}} (1+|\widehat{v}_t|^{2+2\beta}+|\widehat{v}_y|^4) dy\, dt + \int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_t(y,0)|^{2+2\beta} dy. \tag{2.31}$$

Согласно оценке (2.25), для функции $\widehat{v} = v^\tau - \psi$, $R \leqslant R_1/4$ верно неравенство

$$\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_y|^4 dy\, dt \leqslant c_5(E_0 t_2/R^2 + R^2 + t_2), \tag{2.32}$$

постоянная c_5 зависит от тех же величин, что и K_2.

Зафиксируем теперь $R_2 \leqslant R_1/4$ такое, что

$$\frac{4c_2c_5}{\overline{\nu}}R_2^2 \leqslant \frac{1}{16},$$

и выберем $t_2 \leqslant t_1$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{4c_2c_5}{\overline{\nu}}(E_0/R_2^2 + 1)t_2 \leqslant \frac{1}{16}.$$

Тогда при любом $R \leqslant R_2$

$$\frac{c_2}{\theta}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\omega_{2R}} |\widehat{v}_y|^4 dy\, dt \leqslant \frac{1}{8}. \tag{2.33}$$

Оценивая $|\widehat{v}_t(y,0)|$ с помощью системы (2.22) при $t = 0$ и учитывая оценку (2.33), из неравенства (2.31) выводим, что

$$\frac{1}{8}\sup_{[0,t_2]}\int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_t(y,t)|^{2+2\beta} + \frac{\overline{\nu}}{4}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\omega_R(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2\beta}|\widehat{v}_{yt}|^2 dy\, dt$$
$$\leqslant c(R^{-1},T_0) + \frac{c_3}{R^2}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta} dy\, dt, \quad R \leqslant R_2. \tag{2.34}$$

Заметим, что при $\beta = 0$ правая часть неравенства (2.34) оценивается величиной, не зависящей от $\tau \in [0,1]$. В частности, отсюда следует оценка

$$\int_0^{t_2} \int_{\omega_{R_2}(y^0)} |\widehat{v}_{yt}|^2 dy\, dt \leqslant \text{const}, \quad \tau \in [0,1]. \tag{2.35}$$

Обращаясь к интегральному тождеству для функции $\widehat{v}$ с пробной функцией $h = \widehat{v}_t |\widehat{v}_t|^{2\beta} \eta^2(y)$, η — срезающая для $B_{3R}(y^0)$ функция, $\eta \equiv 1$ в $B_{2R}(y^0)$, $3R \leqslant R_2$, и привлекая оценки (2.23), (2.25) и (2.35), считая $\beta_* \leqslant 1/4$, получаем равномерную по $\tau \in [0,1]$ оценку

$$\int_0^{t_2} \int_{\omega_{2R}(y^0)} |\widehat{v}_t|^{2+2\beta} dy\, dt \leqslant c(R^{-1}, T_0), \quad R \leqslant R_2/3. \tag{2.36}$$

Теперь из (2.34) следует оценка (2.29).

Так как величина $R_2 > 0$ определяется данными задачи и не зависит от τ, из (2.29) следует оценка (2.28).

П. 4. Утверждение 2.3. *Существует $t_3 \in (0, t_2]$ такое, что при $\tau \in [0,1]$ для $u^{(\tau)}$ верна оценка*

$$\sup_{[0,t_3]} \|u_x^{(\tau)}(\cdot, t)\|_{p,\Omega} \leqslant \mathbb{K}_6 \tag{2.37}$$

с некоторым $p > 2$.

Утверждение 2.3 является аналогом леммы 1.4, §1, и нам предстоит только проверить, что величина $\mathbb{K}_6$ не зависит от $\tau \in [0,1]$.

Выводу оценки (2.37) предшествует рассмотрение локальной постановки задачи. Для решения $v^{(\tau)}$ задачи (2.22) нетрудно вывести неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1+\beta)} \int_{\omega_{2R}(y^0)} |v_y^{(\tau)}|^{2+2\beta} \xi^2(y) dy \Big|_0^t + \frac{\overline{\nu}}{2} \int_0^t \int_{\omega_{2R}(y^0)} |v_y^{(\tau)}|^{2\beta} |v_{yy}^{(\tau)}|^2 \xi^2 dy\, dt \\ \leqslant c_6 \int_0^t \int_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}|^{4+2\beta} \xi^2 dy\, dt + c_7 \int_0^t \int_{\omega_{2R}} (|v_y^{(\tau)}|^{2+2\beta} + |v_t^{(\tau)}|^{2+\beta} + 1) dy\, dt, \end{aligned} \tag{2.38}$$

где $t \leqslant t_3 \leqslant t_2$, $R \leqslant R_2/3$ (t_2, R_2 — из утверждения 2.2), β не превосходит некоторого $\beta_0 \leqslant \beta_*$.

Интеграл с постоянной c_7 в неравенстве (2.38) оцениваем с помощью соотношений (2.36), (2.25) величиной $c(T_0, R^{-1})$.

Чтобы оценить интеграл с постоянной c_6, положим

$$\Phi(t) = \int_{\omega_{2R}(y^0)} |v_y^{(\tau)}(y,t)|^{4+2\beta} \xi^2(y) dy$$

и будем пока считать, что $y^0 \in \gamma_1$. Рассуждая так, как при оценке интеграла $\mathbb{P}(t)$ в утверждении 2.2, получаем неравенства

$$\Phi(t) \leqslant \Bigg(\int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |v_y^{(\tau)}|^4 dy\Bigg)^{\frac12} \Bigg(\int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} (|v_y^{(\tau)}|^{1+\beta}\xi)^4 dy\Bigg)^{\frac12}$$
$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |v_y^{(\tau)}|^4 dy\Bigg)^{\frac12} \Bigg(\int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} |v_y^{(\tau)}|^{2+2\beta}\xi^2 dy\Bigg)^{\frac12}$$
$$\cdot \int\limits_{\omega_{2R}(y^0)} (|v_y^{(\tau)}|^{2\beta}|v_{yy}^{(\tau)}|^2 + |v_y|^{2+2\beta}|\xi_y|^2 0dy)^{\frac12}$$
$$\leqslant \theta \int\limits_{\omega_{2R}} (|v_y^{(\tau)}|^{2\beta}|v_{yy}^{(\tau)}|^2 + |v_y|^{2+2\beta}|\xi_y|^2)dy$$
$$+ \frac{c}{\theta}\int\limits_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}|^4 dy \int\limits_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}|^{2+2\beta}\xi^2 dy, \quad \theta > 0.$$

Далее, считаем $\theta = \overline{\nu}/4$ и из (2.38) выводим оценку

$$\frac14 \int\limits_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}(y,t)|^{2+2\beta}\xi^2(y)dy + \frac{\overline{\nu}}{4}\int\limits_0^t \int\limits_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}|^{2\beta}|v_{yy}^{(\tau)}|^2\xi^2 dy\,dt$$
$$\leqslant c(T_0, R^{-1}) + c_8 \sup_{[0,t_3]} \int\limits_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}|^{2+2\beta}\xi^2 dy\,dt \int\limits_0^{t_3}\int\limits_{\omega_{2R}} |v_y^{(\tau)}|^4 dy\,dt. \tag{2.39}$$

Пусть $R_3 \leqslant R_2/3$ выбрано так, что $C_8K_2R_3^2 \leqslant 1/16$ (K_2 — из оценки (2.25)). Далее, фиксируем $t_3 \leqslant t_2$ из условия

$$c_8K_2(E_0/R_3^2 + 1)t_3 \leqslant \frac{1}{16}.$$

В результате из оценки (2.25) получаем, что

$$c_8 \int\limits_0^{t_3} \int\limits_{\omega_{2R_3}(y^0)} |v_y^{(\tau)}|^4 dy\,dt \leqslant \frac18,$$

и тогда из неравенства (2.39) легко следует оценка

$$\sup_{[0,t_3]} \|v_y^{(\tau)}(\cdot,t)\|_{2+2\beta,\omega_R(y^0)} \leqslant c(T_0, R^{-1}), \quad R \leqslant R_3. \tag{2.40}$$

Оценка вида (2.40) для любых $y^0 \in B_1^+$, $R < \min\{\operatorname{dist}(y,\gamma_1)/2, R_3\}$ (внутренняя оценка) получается аналогично и проще.

В случае $y^0 \in B_1^+$ и $R > \operatorname{dist}(y^0,\gamma_1)/2$ оценка вида (2.40) получается „склеиванием“ граничной и внутренней оценок.

Точнее, мы показали, что для некоторых $t_3 \leqslant t_2$, $R_3 \leqslant R_2/3$ и $\beta_0 \leqslant \beta_*$ верна оценка

$$\sup_{[0,t_3]} \|v_y^{(\tau)}(\cdot,t)\|_{2+2\beta_0,B_1^+} \leqslant c(T_0, R_3^{-1}), \tag{2.41}$$

величины t_3, R_3 и β_0 зависят от ν, μ_i и C^{1+1}-характеристики $\partial\Omega$, кроме того, t_3 и R_3 зависят от l.

Из неравенства (2.41) получаем оценку (2.37) с $p = 2+2\beta_0$ для решений $u^{(\tau)}$ задач (2.9).

Согласно теореме вложения, из (2.37) следует, что

$$\sup_{[0,t_3]} \|u^{(\tau)}(\cdot,t)\|_{C^\delta(\overline{\Omega})} \leqslant \mathbb{K}_7, \quad \tau \in [0,1], \tag{2.42}$$

где $\delta = 1 - 2/p = \frac{\beta_0}{1+\beta_0}$.

П. 5. Вывод оценки (2.6). Анализ леммы 1.5, §1 показывает, что 1) для $u^{(\tau)}$ справедлива оценка (2.42) с *любым* $\delta \in (0,1)$, 2) при некотором $\delta_0 \in (0,1)$

$$\sup_{[0,t_3]} \|u_x^{(\tau)}(\cdot,t)\|_{\mathbb{C}^{\delta_0}(\overline{\Omega})} \leqslant \mathbb{K}_8, \quad \tau \in [0,1]. \tag{2.43}$$

Постоянные $\mathbb{K}_7$ и $\mathbb{K}_8$ не зависят от τ.

Рассуждая далее как при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что полученных для $u^{(\tau)}$ равномерных по $\tau \in [0,1]$ оценок достаточно, чтобы утверждать о справедливости оценки

$$\|u^{(\tau)}\|_{X_\gamma(t_3)} \leqslant m, \quad \tau \in [0,1]. \tag{2.44}$$

Очевидно, что условия, согласно которым выбирались величины $t_0,\dots,t_3$, можно уточнять. Таким образом, существует такое $T_* \leqslant T$, что любое $T_0 < T_*$ может быть взято в качестве t_3. Постоянная m в оценке (2.44) зависит от ν, μ_i, l, $\mathbb{C}^{1+1}$-характеристики $\partial\Omega$, T_*, а также величины $(\widehat{\nu} - \hat{c}_* T_*)^{-1}$ (см. (2.18)). Оценка (2.7) есть тривиальное следствие оценки (2.29) при $\beta = 0$. Теорема 5 теперь полностью доказана, а вместе с ней и теорема 4 о локальной разрешимости задачи (0.1). •

§3. Глобальная разрешимость задачи

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u_t^k - \frac{d}{dx_\alpha} f_{p_\alpha^k}(x,u,u_x) + f_{u^k}(x,u,u_x) = 0, \quad (x,t) \in Q, \;\; k \leqslant N, \\ u|_{\partial' Q} = \varphi. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Предположим следующее:

I. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей класса $C^{2+\alpha_0}$, $Q = \Omega \times (0,T)$, числа $\alpha_0 \in (0,1)$ и $T > 0$ фиксированы произвольно;

II. Функция $f = f(x,u,p)$ удовлетворяет в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N}$ условиям п. а) Введения;

III. Функция $\varphi = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathbb{C}^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega})$, выполнено условие согласования (1.2).

Эллиптический оператор L_0 системы (3.1) является оператором Эйлера функционала $\mathcal{E}_f[v] = \int_\Omega f(x, v, v_x)dx$, выполняются условия (0.2), (0.9). Кроме того, $f_t \equiv 0$, $\varphi_t = 0$. Далее, построение решения проводится так, как это сделано в §4 [1] на основе конструкции M. Struwe ([4]; [11, гл. III, теорема 5]).

Согласно теореме 4, на некотором интервале $[0; T_*)$ существует единственное решение u задачи (3.1) класса $\mathcal{K}\{[0, T_*)\}$.

Пусть T_* определяет максимальный интервал существования *гладкого решения* u и $T_* < T$. Согласно теореме 2, существует не более конечного сингулярных точек $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_m$ при $t = T_*$, каждая из них характеризуется условием

$$\varlimsup_{t\nearrow T_*} \|u_x(\cdot, t)\|^2_{2,\Omega_R(\widehat{x}^j)} \geqslant \varepsilon_0, \quad R > 0,$$

число $\varepsilon_0 > 0$ определяется параметрами задачи (3.1).

Предположим теперь, что вместо условия III выполнено условие

III$_1$: $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ и существует $\Phi \in C^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega})$ такая, что $\varphi|_{\partial\Omega} = \Phi$, $L_0\Phi|_{\partial\Omega} = 0$.

Рассмотрим последовательность $\{g_k\}_{k\in\mathcal{N}}$ финитных $C^{2+\alpha_0}$-гладких в $\overline{\Omega}$ функций таких, что в $W_2^1(\Omega)$ $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi - \Phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Положим $\varphi_k = g_k + \Phi$, ясно, что $\varphi_k \in C^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega})$, $L_0\varphi_k|_{\partial\Omega} = L_0\Phi|_{\partial\Omega} = 0$. По теореме 4 для любого $k \in \mathcal{N}$ существуют $T_k > 0$ и $u_k \in \mathcal{K}\{[0, T_k)\}$, u_k — решение задачи (3.1) с начально-краевой функцией φ_k, т.е. $u_k|_{\partial' Q^{T_k}} = \varphi_k$. Считаем, что T_k определяет максимальный интервал существования гладкого решения u_k.

Для системы (3.1) выполняются условия утверждения 2) леммы 1.1, §1, и, следовательно, для функций u_k справедливы оценки (1.9), (1.10). В частности, из (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T_k)} \mathcal{E}_f[u_k(t)] &\leqslant \mathcal{E}_f[\varphi_k] \leqslant \mu_0\|(\varphi_k)_x\|^2_{2,\Omega} + \mu_1 \\ &\leqslant 2\mu_0\|\varphi_x\|^2_{2,\Omega} + \mu_1 \equiv E_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Зафиксируем R_0 так, чтобы

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|\varphi_x\|^2_{2,\Omega_{2R_0}(x)} < \frac{\varepsilon_0\nu_0}{8\mu_0}, \quad 2\mu_1\pi R_0^2 < \frac{\varepsilon_0\nu_0}{4};$$

$\varepsilon_0 > 0$ фиксировано согласно формулировке теоремы 1.

Существует $k_0 \in \mathcal{N}$ такое, что при $k \geqslant k_0$

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|(\varphi_k)_x\|^2_{2,\Omega_{2R_0}(x)} < \frac{\varepsilon_0\nu_0}{4\mu_0}.$$

Из оценки (1.10) получаем, что при $k \geqslant k_0$, $t \in [0, T_k)$

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|(u_k)_x(\cdot, t)\|^2_{2,\Omega_{R_0}(x)} < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{ct}{\nu_0}(1 + E_0/R_0^2).$$

Зафиксируем $\widetilde{T} = \frac{\varepsilon_0\nu_0}{2c(1+E_0/R_0^2)}$, тогда

$$\sup_{0\leqslant t<\min\{T_k,\widetilde{T}\}} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|(u_k)_x(\cdot, t)\| < \varepsilon_0.$$

Если $T_k < \widetilde{T}$, то решение u_k, согласно теореме 1, может быть продолжено гладкой функцией вплоть до $t = T_k$, что противоречит определению T_k. Таким образом, $T_k \geqslant \widetilde{T} > 0$ и

$$\sup_{[0,\widetilde{T}]} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|(u_k)_x(\cdot,t)\|^2_{2,\Omega_{R_0}(x)} < \varepsilon_0. \tag{3.3}$$

Согласно замечанию 3, §1, при выполнении условия (3.3) для u_k верна оценка вида (1.21):

$$\int_0^{\widetilde{T}} \int_\Omega (|(u_k)_{xx}|^2 + |(u_k)_x|^4) dx\, dt \leqslant c_1 \{1 + \widetilde{T}/R_0^2\}, \tag{3.4}$$

причем постоянная c_1 в этой оценке зависит от параметров ν, μ_2, μ_3, постоянной E_0, $\mathbb{C}^{1+1}$-характеристики $\partial\Omega$, $\widetilde{T}$, $\|\varphi_k\|_{W_2^1(\Omega)}$ и $\|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)}$. Принимая во внимание оценку (3.2), можно считать, что c_1 не зависит от $k \in \mathcal{N}$.

Из (1.9), (3.2) и (3.4) следует, что

$$\sup_{[0,\widetilde{T}]} \|u_k(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_k\|_{W_2^{2,1}(Q^{\widetilde{T}})} \leqslant c_2, \quad k \in \mathcal{N}. \tag{3.5}$$

Таким образом, для некоторой последовательности $k \to +\infty$ $\{u_k\}$ слабо сходится в $W_2^{2,1}(Q^{\widetilde{T}})$ к $u \in W_2^{2,1}(Q^{\widetilde{T}})$ и $(u_k)_x \to u_x$ в $L_2(Q^{\widetilde{T}})$. Для предельной функции верна оценка (3.5),и, следовательно, u принадлежит классу $Y(Q^{\widetilde{T}})$ (см. определение (1.60)). По теореме 1°, §1 $u \in \mathcal{K}\{(0,\widetilde{T}]\}$. Кроме того, $\sup_{[0,T]} \mathcal{E}_f[u(t)] \leqslant \mathcal{E}_f[\varphi]$. Существует максимальное $T_1 > \widetilde{T}$ такое, что u продолжимо гладкой функцией на $\overline{\Omega} \times (0,T_1] \setminus \Sigma_{T_1}$, где $\Sigma_{T_1} = \{(x^1,T_1) \cup \dots \cup (x^{M_1},T_1)\}$, $M_1 \leqslant \frac{8E_0c_2}{\varepsilon_0\nu_0}$ (см. теорему 2 и оценку (1.58)).

При $t \nearrow T_1$ $u(\cdot,t) \to u(\cdot,T_1)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и сильно в $W_2^1(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{M_1} \Omega_\varepsilon(x^i))$, $\varepsilon > 0$.

Продолжаем построение решения (см. [11, гл. III, теорема 5]). Обозначим $\varphi^{(1)}(\cdot) = u(\cdot,T_1)$, $\varphi^{(1)} \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi^{(1)}|_{\partial\Omega} = \Phi \in C^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega})$.

С помощью локальной энергетической оценки (1.8) нетрудно показать, что

$$\mathcal{E}_f[\varphi^{(1)}] \leqslant \mathcal{E}_f[\varphi] - \frac{\varepsilon_0\nu_0^2 M}{4\mu_0}. \tag{3.6}$$

Обозначим через $u^{(1)}$ решение задачи (3.1) на интервале существования (T_1,T_2), $u^{(1)}|_{t=T_1} = \varphi^{(1)}$, $u^{(1)}|_{\partial\Omega\times(T_1,T_2)} = \Phi$. $u^{(1)}(\cdot,t) \xrightarrow[t\to T_2]{} u^{(1)}(\cdot,T_2) = \varphi^{(2)}$ слабо в $W_2^1(\Omega)$. Продолжим процесс построения последовательности интервалов $(T_m,T_{m+1}) \subset (0,T)$ и решений $u^{(m)}(\cdot,t)$, $m = 0,1,\dots$ ($T_0 = 0$, $u^{(0)} = u$, $\varphi^{(0)} = \varphi$). Принимая во внимание оценку (3.6), получаем неравенство

$$\mathcal{E}_f[\varphi^{(m+1)}] \leqslant \mathcal{E}_f[\varphi^{(0)}] - \sum_{j=1}^{m+1} M_j \frac{\varepsilon_0\nu_0^2}{4\mu_0},$$

из которого следует, что общее число сингулярных точек конечно и $\sum_{j=1}^{m+1} M_j \leqslant \frac{4\mu_0}{\varepsilon_0\nu_0^2}(2\mu_1|\Omega| + \mu_0\|\varphi_x\|^2_{2,\Omega})$. Объединяя все $u^{(m)}$, получаем решение u задачи (3.1), которое является гладкой функцией на $\overline{\Omega} \times (0,T]$, за исключением конечного числа сингулярных точек. Единственность построенного решения легко доказывается, если применить теорему 3 последовательно на интервалах $[T_j, T_{j+1})$, $j = 0, \dots, M$, $\bigcup\limits_{j=0}^{M} T_j = T$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6 (глобальной разрешимости). *Пусть выполнены условия* I, II, III$_1$. *Тогда существует глобальное решение* $u : Q \to \mathbb{R}^N$ *задачи* (3.1), *гладкое в* $(\overline{\Omega} \times (0,T]) \setminus \Sigma$, *сингулярное множество* Σ *состоит не более чем из конечного числа точек* $\{(x^j, t^j)\}_{j=1}^{M}, t^j \in (0,T]$. *Любая точка* $(x^j, t^j) \in \Sigma$ *характеризуется условием*

$$\varlimsup_{t \nearrow t^j} \|u_x(\cdot, t)\|^2_{2,\Omega_R(x^j)} \geqslant \varepsilon_0$$

при всех $R > 0$ ($\varepsilon_0 > 0$ — *из формулировки теоремы* 1). *Кроме того, справедливы следующие утверждения.*

1) $u \in W(Q)$, *где*

$$W(Q) = \{v : Q \to \mathbb{R}^N \mid v \in L_\infty((0,T); W_2^1(\Omega)), \quad \text{существует } v_t \in L_2(Q)\};$$

2) $\sup_{[0,T]} \mathcal{E}_f[u(t)] \leqslant \mathcal{E}_f[\varphi]$;

3) u — *единственное решение с указанными свойствами*;

4) u — *обобщенное решение задачи* (3.1) *класса* $W(Q)$ *в следующем смысле*

$$\int_Q (u_t^k \eta^k + f_{p_\alpha^k}(x,u,u_x)\eta^k_{x\alpha} + f_{u^k}(x,u,u_x)\eta^k)dz = 0,$$

$$\eta \in L_2((0,T), \mathring{W}_2^1(\Omega)) \cap L_1((0,T), L_\infty(\Omega)),$$

$$u(\cdot,t) \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi \text{ в } W_2^1(\Omega), \quad u - \Phi \in L_\infty((0,T); \mathring{W}_2^1(\Omega)).$$

Обсуждение поведения $u(\cdot, t)$ при $t \to +\infty$ не укладывается в рамки данной работы, и мы можем только отослать читателя к работе [1], где в замечаниях 4.1 и 4.2 обсуждается эта проблема.

Список литературы

[1] Архипова А. А., *О глобальной разрешимости задачи Коши–Дирихле для недиагональных параболических систем с вариационной структурой при двух пространственных переменных*, Пробл. мат. анал., вып. 16, С.-Петербург. гос. ун-т, С.-Петербург, 1997, сс. 3–40.

[2] Amann H., *Quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions*, Arch. Rational Mech. Anal. **92** (1986), no. 2, 153–192.

[3] Giaquinta M., Modica G., *Local existence for quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **149** (1987), 41–59.

[4] Struwe M., *On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 558–581.

[5] Ладыженская О. А., *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, 2-е. изд., перераб. и доп., Наука, М., 1970.

[6] Campanato S., *A maximum principle for nonlinear elliptic systems: boundary fundamental estimates*, Adv. Math. **66** (1987), 291–317.

[7] Giaquinta M., *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. of Math. Stud., vol. 105, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.

[8] Nečas J., Šverák V., *On regularity of solutions of nonlinear parabolic systems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **18** (1991), no. 1, 1–11.

[9] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; Пер. на англ. яз., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[10] Campanato S., *Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi* $L^{2,\theta}(\Omega,\delta)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **73** (1966), 55–102.

[11] Struwe M., *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечная пл., 2

Поступило 21 января 1999 г.