УДК 517.987+519.216 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI: 10.33048/mattrudy.2021.24.205 2021, том 24, № 2, 65–80

ЗАКОН НУЛЯ ИЛИ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, А. А. Свищёв

В эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем рассматриваются монотонные поточечные оценки скоростей сходимости. Для действия эргодического полупотока в пространстве Лебега доказано, что такие оценки имеют место на множестве либо полной меры, либо нулевой. Показано, что монотонные оценки, справедливые п. в., всегда существуют. Исследована решетка таких оценок, рассмотрены вопросы об их неулучшаемости.

Ключевые слова и фразы: эргодическая теорема Биркгофа, скорости сходимости в эргодических теоремах, расширение эндоморфизмов, оптимальные оценки, решетки оценок.

§1. Введение

1.1. *Эргодические средние.* Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с вероятностной мерой, $\mathbf{T} = \{T^t\}_{t\geq 0}$ — полупоток, т. е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t этого пространства, что для любой измеримой (комплекснозначной) функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ и $t > 0$ положим

$$A_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = \frac{1}{t}\int_0^t f(T^s\omega)\, ds.$$

Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование μ-п. в. предела $f^* = \lim_{t\to\infty} A_t^{\mathbf{T}} f$ и справедливость равенства $\mathbb{E}f^* = \mathbb{E}f$. В случае эргодического полупотока (когда любые инвариантные множества имеют меру либо 0, либо 1) μ-п. в. f^* равен $\mathbb{E}f$.

Будем предполагать в дальнейшем, что $\mathbf{T} = \{T^t\}_{t\geq 0}$ — эргодический полупоток, а функция f имеет нулевое пространственное среднее, т. е. $\mathbb{E}f = 0$; подпространство таких функций в $L_1(\Omega)$ обозначим через $L_1^0(\Omega)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0005).

Наряду с эргодическими средними $A_t^{\mathbf{T}} f(\omega)$ будем рассматривать их *монотонную огибающую*

$$\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = \sup_{s \geq t} \left| A_s^{\mathbf{T}} f(\omega) \right| .$$

Ясно, что μ-п. в. $\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = 0$.

1.2. *Скорости сходимости*: *два подхода.* Есть два подхода к оценке скорости сходимости (к нулю) при $t \to \infty$ числовой функции $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Рассмотрим монотонную огибающую этой функции $m(t) = \sup_{s\geq t} |a(s)|$. Можно для каждого $\varepsilon > 0$ оценивать сверху время t входа функции a в ε-окрестность ее предела навсегда (т. е. такие $t > 0$, для которых $m(t)$ становится меньше ε). А можно непосредственно оценивать величины $|a(t)|$ и $m(t)$ для каждого $t > 0$ (и, сравнивая получаемые оценки с эталонными, говорить, например, о степенном или экспоненциальном убывании $a(t)$ при $t \to \infty$).

Соответственно возникают два хорошо известных в общей теории стохастических процессов вероятностных подхода к оценке скорости сходимости п. в. (к нулю) при $t \to \infty$ эргодических средних $A_t^{\mathbf{T}} f$.

При первом подходе мы для каждого $\varepsilon > 0$ оцениваем снизу для данного $t > 0$ вероятности того, что $A_t^{\mathbf{T}} f$ уже вошла в ε-окрестность ее предела навсегда, т. е. получаем оценку снизу скорости роста к единице для каждого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$ числовой величины $\mu\{\sup_{s\geq t} |A_s^{\mathbf{T}} f| < \varepsilon\}$ или, что то же самое, оценку сверху скорости убывания к нулю комплементарной ей числовой величины

$$\mathrm{P}_t^{\varepsilon} = \mu\left\{ \sup_{s\geq t} \left| A_s^{\mathbf{T}} f \right| \geq \varepsilon \right\} = \mu\left\{ \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f \geq \varepsilon \right\}$$

(как нетрудно видеть, сходимость $\mathrm{P}_t^{\varepsilon}$ к нулю для любого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$ эквивалентна сходимости $A_t^{\mathbf{T}} f$ к нулю п. в. при $t \to \infty$). Первые такие оценки (для дискретного времени) появились в [2, § 2] и [1]. Для непрерывного времени этот подход детально разрабатывался в [11; 12] (оценки по скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана) и [3; 8] (по убыванию вероятностей больших уклонений). Описание текущего состояния подхода с асимптотически точными оценками для многих популярных в приложениях классов динамических систем (например, для некоторых потоков Аносова и потоков Тейхмюллера) можно найти в обзоре [4, гл. 2].

Второй подход развит намного слабее (см. обзор [2, § 3]). Там получен, например, критерий максимальной возможной скорости сходимости (в рамках этого подхода) в эргодической теореме Биркгофа с дискретным временем, перенесенный недавно в [6] и на непрерывное время (см. теорему 3.1 и следствие из нее); ниже упоминаются и некоторые другие известные результаты.

Разработке этого второго подхода — а именно поиску надлежащих постановок задач об оценках скорости сходимости эргодических средних $A_t^{\mathbf{T}} f$ в его рамках, учитывающих специфику именно этого класса стохастических процессов — и посвящена эта статья. Аналогичные вопросы для эргодической теоремы Биркгофа с дискретным временем были рассмотрены ранее в [5].

1.3. *Асимптотические оценки.* Как и в дискретном случае [5], для функции $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ асимптотическую оценку $a(t) = \mathcal{O}(\varphi(t))$ при $t \to \infty$ будем называть *наилучшей возможной*, если она не может быть уточнена. Последнее означает, что если имеет место другая асимптотическая оценка $a(t) = \mathcal{O}(\psi(t))$ при $t \to \infty$, то $\varphi(t) = \mathcal{O}(\psi(t))$ при $t \to \infty$. Легко видеть, что оценка φ наилучшая возможная тогда и только тогда, когда найдутся константы $A, B > 0$ такие, что для всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}^+$

$$A|\varphi(t)| \le |a(t)| \le B|\varphi(t)|.$$

В этом случае также говорят, что a и φ *эквивалентны* и пишут $a \asymp \varphi$.

Будем называть асимптотическую оценку $a(t) = \mathcal{O}(\varphi(t))$ при $t \to \infty$ *оптимальной*, если дополнительно известно, что $a(t) \ne o(\varphi(t))$ при $t \to \infty$. Очевидно, что наилучшая возможная оценка является оптимальной, а обратное, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно взять кардинальный синус

$$a(t) = \mathrm{sinc}(t) := \frac{\sin t}{t}.$$

Нетрудно видеть, что $a(t) = \mathcal{O}(t^{-1})$ и $a(t) \ne o(t^{-1})$ при $t \to \infty$, однако оценка $\mathcal{O}(t^{-1})$ не является наилучшей возможной для $a(t)$. Отметим также, что оптимальными будут также оценки $a(t) = \mathcal{O}\Big(\frac{\sqrt[n]{|\sin t|}}{t}\Big)$ при $t \to \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. При этом оценка $\mathcal{O}(t^{-1})$ является наименьшей монотонной оптимальной оценкой (с точностью до умножения на константу).

На самом деле такая ситуация имеет место и в общем случае. Для убывающей к нулю на бесконечности функции $a(t)$ всегда существует наименьшая (с точностью до умножения на константу) монотонная оптимальная оценка, задаваемая монотонной огибающей $\sup_{s\ge t}|a(s)|$ функции $a(t)$.

Ясно, что $a(t) = \mathcal{O}\big(\sup_{s\ge t}|a(s)|\big)$ при $t \to \infty$ является оптимальной монотонной оценкой. При этом если найдется еще одна оптимальная монотонная оценка $a(t) = \mathcal{O}(\varphi(t))$ при $t \to \infty$, то, взяв супремум от левой и правой части, получим, что

$$\sup_{s\ge t}|a(s)| \le C\varphi(t)$$

для некоторого $C > 0$.

1.4. *Постановка задачи.* Для каждой функции $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, монотонно убывающей к нулю на бесконечности, определим следующие измеримые множества:

$$F\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = \bigl\{\omega \in \Omega : A_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = \mathcal{O}\,(\varphi(t)) \ \text{ при } t \to \infty\bigr\},$$
$$E\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = \bigl\{\omega \in \Omega : A_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = o\,(\varphi(t)) \ \text{ при } t \to \infty\bigr\},$$
$$D\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = \bigl\{\omega \in \Omega : \varphi(t) = \mathcal{O}\left(A_t^{\mathbf{T}} f(\omega)\right) \text{ при } t \to \infty\bigr\}.$$

Вполне естественно возникает вопрос о существовании неулучшаемой оценки скорости сходимости эргодических средних. Неулучшаемость мы понимаем в следующих двух смыслах: 1) в значении *наилучшей возможной* оценки и 2) в значении *оптимальной* оценки; имеющих место на множестве полной меры. Соответственно, как и в случае с дискретным временем [5], возникают следующие две задачи.

1. Определить, существует ли для данной ненулевой функции $f \in L_1^0(\Omega)$ неотрицательная монотонно убывающая к нулю на бесконечности функция φ такая, что $\mu\bigl(F(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) \cap D(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi)\bigr) = 1$?

2. Определить, существует ли для данной ненулевой функции $f \in L_1^0(\Omega)$ неотрицательная монотонно убывающая к нулю на бесконечности функция φ такая, что $\mu\bigl(F(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) \setminus E(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi)\bigr) = 1$?

Отметим, что, как и в случае дискретного времени [5, следствие 1], первая задача имеет отрицательный ответ для любой ненулевой вещественнозначной функции f. Доказательство этого факта основано на следующем (похожем, но все-таки отличном от дискретного случая) наблюдении: множество D имеет для таких f нулевую меру. Действительно, хорошо известно, что эргодические средние $A_t^{\mathbf{T}} f(\omega)$ для вещественнозначной функции f являются непрерывными п. в. функциями переменной t, имеющими [13] бесконечное число нулей $t_n = t_n(\omega) \in \mathbb{R}^+$, и $t_n \to \infty$. Отсюда следует, что если множество D для некоторой монотонной φ будет иметь положительную меру, то $\varphi(t_n(\omega)) = 0$ для п. в. $\omega \in D$. Таким образом, φ зануляется с некоторого момента, чего не может быть, поскольку $\varphi > 0$.

Как и в дискретном случае, рассмотрим аналоги этих задач для огибающей $\{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$. Монотонность огибающей облегчает изучение ее асимптотических свойств по сравнению с колеблющимися эргодическими средними.

Определим соответствующие множества для монотонной огибающей:

$$\mathcal{F}\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = \bigl\{\omega \in \Omega : \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = \mathcal{O}\,(\varphi(t)) \ \text{ при } t \to \infty\bigr\},$$
$$\mathcal{E}\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = \bigl\{\omega \in \Omega : \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = o\,(\varphi(t)) \ \text{ при } t \to \infty\bigr\},$$
$$\mathcal{D}\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = \bigl\{\omega \in \Omega : \varphi(t) = \mathcal{O}\left(\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)\right) \text{ при } t \to \infty\bigr\}.$$

Нетрудно видеть, что ввиду монотонности φ справедливы равенства

$$\mathcal{F}\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = F\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) \quad \text{ и } \quad \mathcal{E}\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi) = E\,(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi)\,.$$

Кроме того, полезным является следующее описание этих множеств, которое является простой переформулировкой определения:

$$\mathcal{F}\left(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi\right) = \left\{\omega \in \Omega : \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)} < \infty\right\},$$
$$\mathcal{E}\left(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi\right) = \left\{\omega \in \Omega : \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)} = 0\right\},$$
$$\mathcal{D}\left(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi\right) = \left\{\omega \in \Omega : \left(\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)}\right)^{-1} < \infty\right\}.$$

Покажем, что введенные множества действительно измеримы; в отличие от дискретного случая этот факт не совсем очевиден.

Лемма 1.1. *Пусть $\boldsymbol{T} = \{T^t\}_{t\geq 0}$ — полупоток в пространстве с вероятностной мерой (Ω, Σ, μ), $f \in L_1^0(\Omega)$ и функция $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ монотонно убывает к нулю на бесконечности. Тогда множества $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, D, E, F$ измеримы.*

Доказательство. Огибающая $\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)$ непрерывна как функция аргумента t на множестве полной меры Ω'. У функции φ не более чем счетное число разрывов в некоторых точках t_i. Пусть $P = \mathbb{Q}^+ \cup \{t_0, t_1, \dots\}$. Нетрудно видеть, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)} = \limsup_{P\ni t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)}, \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)} = \liminf_{P\ni t\to\infty} \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{\varphi(t)} \text{ на } \Omega'.$$

Отсюда получаем, что левые части равенств — измеримые функции, так как они равняются соответственно верхнему и нижнему пределу счетного числа измеримых функций. Тогда измеримость множеств $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, E, F$ следует из последних представлений, написанных перед леммой. Для множества D рассуждения аналогичны выкладкам для $\mathcal{D}$. □

Задача о нахождении оценок поточечной скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа успешна решена для некоторых конкретных популярных в приложениях потоков $\mathbf{T}$ и достаточно гладких функций f (см. вопрос Маргулиса об эффективной оценке [24] и работы [17; 19; 27; 28] для некоторых орициклических потоков и [14; 16; 20] для некоторых плоских потоков, а также ссылки в них). Но вопрос о неулучшаемости в рассматриваемом выше смысле, насколько известно авторам, не исследовался. Отметим также любопытное отличие дискретных и непрерывных оценок, встречающихся в литературе: для дискретного времени оценки получены в основном в виде o-малого, а для непрерывного — в виде $\mathcal{O}$-большого.

§2. Расширение эндоморфизмов и полупотоков

В дальнейшем мы будем считать рассматриваемое вероятностное пространство (Ω,Σ,μ) пространством Лебега (см., например, [9]); пусть S — его эндоморфизм. Рассмотрим часто применяемую в различных приложениях конструкцию естественного расширения эндоморфизма до автоморфизма [10], известную также как обратный предел (см., например, [26, I.3]), или соленоид [15, 2.4].

По эндоморфизму S построим автоморфизм $\widetilde{S}$ пространства Лебега $\big(\widetilde{\Omega}_S,\widetilde{\Sigma},\widetilde{\mu}\big)$, где

$$\widetilde{\Omega}_S=\big\{(\omega_0,\omega_1,\dots)\in\Omega^{\mathbb{N}}\mid S\omega_n=\omega_{n-1},\ n>0\big\};$$

σ-алгебра $\widetilde{\Sigma}$ порождена множествами

$$\widetilde{X}_n=\big\{(\omega_0,\omega_1,\dots)\in\widetilde{\Omega}_S\mid \omega_n\in X\big\},\ n\ge 0,\ X\in\Sigma;$$

на этом порождающем семействе мера $\widetilde{\mu}\{\widetilde{X}_n\}$ равняется $\mu\{X\}$ и продолжается до меры Лебега на все $\big(\widetilde{\Omega}_S,\widetilde{\Sigma},\widetilde{\mu}\big)$; и, наконец,

$$\widetilde{S}(\omega_0,\omega_1,\dots)=(S\omega_0,S\omega_1,\dots)=(S\omega_0,\omega_0,\omega_1,\dots).$$

Автоморфизм $\widetilde{S}$ и есть естественное расширение эндоморфизма S. Обозначив через $\pi:\widetilde{\Omega}_S\to\Omega$ естественную проекцию $\widetilde{\Omega}_S$ на нулевую координату, т. е. $\pi(\omega_0,\omega_1,\dots)=\omega_0$, получим

$$\pi\circ\widetilde{S}=S\circ\pi\quad\text{и}\quad\pi_*\widetilde{\mu}=\mu.$$

Другими словами, эндоморфизм S пространства Лебега (Ω,Σ,μ) является фактором автоморфизма $\widetilde{S}$ пространства Лебега $\big(\widetilde{\Omega}_S,\widetilde{\Sigma},\widetilde{\mu}\big)$. Также хорошо известно, что эргодичность S эквивалентна эргодичности $\widetilde{S}$.

Расширим эту конструкцию на полупотоки, следуя [23, теорема 2.1]. Для полупотока $\mathbf{T}=\{T^t\}_{t\ge 0}$ пространства Лебега (Ω,Σ,μ) построим поток $\mathbf{U}=\{U^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ в пространстве Лебега $\big(\widetilde{\Omega}_{T^1},\widetilde{\Sigma},\widetilde{\mu}\big)$ следующим образом. Множество $\widetilde{\Omega}_{T^1}$ — это соленоид, построенный по эндоморфизму T^1 (см. выше дискретный случай), мера $\widetilde{\mu}$ и σ-алгебра $\widetilde{\Sigma}$ строятся таким же образом, как в дискретном случае. На $\widetilde{\Omega}_{T^1}$ действие полупотока переносится по формуле

$$\widetilde{T}^t(\omega_0,\omega_1,\dots)=(T^t\omega_0,T^t\omega_1,\dots),\ t\ge 0.$$

Так как $T^tT^1=T^1T^t$ для всех $t\ge 0$, нетрудно проверить, что $\widetilde{T}^t:\widetilde{\Omega}_{T^1}\to\widetilde{\Omega}_{T^1}$. Кроме того, каждое отображение $\widetilde{T}^t$ обратимо. Действительно, для натуральных значений параметра $\widetilde{T}^n = (\widetilde{T}^1)^n$ — обратимое отображение, поскольку $\widetilde{T}^1$ — это автоморфизм $\bigl(\widetilde{\Omega}_{T^1}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu}\bigr)$. Для всех других значений параметра обратное отображение определяется следующим образом:

$$(\widetilde{T}^t)^{-1} = (\widetilde{T}^n)^{-1}\widetilde{T}^\alpha,$$

где $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [0,1)$ связаны соотношением $t + \alpha = n$. Таким образом, определяя автоморфизмы $U^t = \widetilde{T}^t$ для $t \geq 0$ и $U^t = (\widetilde{T}^t)^{-1}$ для $t < 0$, получаем

$$\pi \circ U^t = T^t \circ \pi, \ t \geq 0 \ \text{ и } \ \pi_* \widetilde{\mu} = \mu,$$

т. е. U^t сохраняет меру $\widetilde{\mu}$ и, следовательно, $\mathbf{U}$ является потоком в пространстве Лебега $\bigl(\widetilde{\Omega}_{T^1}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu}\bigr)$. Кроме того, эргодичность потока $\mathbf{U}$ эквивалентна эргодичности полупотока $\mathbf{T}$. Это может быть показано так же, как и в дискретном случае [7, гл. 10, § 4].

Везде далее точки из $\widetilde{\Omega}_{T^1}$ будем обозначать как $\vec{\omega}$. Приведем несколько простых фактов, которые окажутся полезными в доказательстве последующих теорем.

Лемма 2.1. *Пусть $\boldsymbol{T} = \{T^t\}_{t \geq 0}$ — эргодический полупоток в пространстве Лебега (Ω, Σ, μ) и эргодический поток $\boldsymbol{U} = \{U^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — его расширение на пространство Лебега $\bigl(\widetilde{\Omega}_{T^1}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu}\bigr)$. Тогда для любой измеримой функции g справедливы следующие утверждения*:

(1) *если $g \not\equiv 0$ относительно μ, то $\widetilde{f} := g \circ \pi \not\equiv 0$ относительно $\widetilde{\mu}$*;

(2) *если $g \in L_1^0(\Omega)$, то $\widetilde{g} \in L_1^0(\widetilde{\Omega}_{T^1})$ и $A_t^{\boldsymbol{U}} \widetilde{g}(\vec{\omega}) = A_t^{\boldsymbol{T}} g(\omega_0)$.*

Доказательство. (1) Если g отлична от 0 на измеримом множестве B положительной меры μ, то $\widetilde{g}$ также отлична от 0 на $\widetilde{B}_0 \in \widetilde{\Sigma}$ и $\widetilde{\mu}(\widetilde{B}_0) > 0$.

(2) Из построения расширения получаем равенство средних по пространству

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{T^1}} \widetilde{g} d\widetilde{\mu} = \int_{\Omega} g d\mu = 0$$

и аналогично равенство временных средних

$$A_t^{\mathbf{U}} \widetilde{g}(\vec{\omega}) = \frac{1}{t} \int_0^t \widetilde{g}(U^s \vec{\omega}) ds = \frac{1}{t} \int_0^t g(\pi(\widetilde{T}^s \vec{\omega})) ds = \frac{1}{t} \int_0^t g(T^s \omega_0) ds = A_t^{\mathbf{T}} g(\omega_0). \quad \square$$

§3. Свойства монотонной огибающей эргодических средних

3.1. *Наибольшая скорость убывания.* Для дискретного времени асимптотическая оценка $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$ для эргодических средних эквивалентна тому, что усредняемая функция f когомологична нулю с ограниченной функцией перехода, т. е. $f = h \circ T - h$, где $h \in L_\infty(\Omega)$ (см. [2]).

Кроме того, асимптотическая оценка $o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$ справедлива только для нулевой f (см. там же). Другими словами, для таких функций имеет место оптимальная оценка скорости сходимости эргодических средних на множестве полной меры. Как показано в [6], аналогичный факт имеет место и для непрерывного времени.

Теорема 3.1 [6]**.** *Пусть $\boldsymbol{T} = \{T^t\}_{t\geq 0}$ — эргодический полупоток в пространстве Лебега (Ω, Σ, μ). Для каждой $f \in L_1(\Omega)$ следующие три условия равносильны:*

(1) *$A_t^{\boldsymbol{T}} f = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$ на множестве положительной меры;*

(2) *существует такая константа C, что $\left|A_t^{\boldsymbol{T}} f\right| \leq \frac{C}{t}$ п. в. для всех $t > 0$;*

(3) *найдется $h \in L_\infty(\Omega)$ такая, что для п. в. $\omega \in \Omega$ верно представление*

$$f(\omega) = \lim_{\tau \to 0+} \frac{h(\omega) - h \circ T^\tau(\omega)}{\tau}.$$

Следствие 3.1 [6]**.** *Асимптотическое соотношение $A_t^{\boldsymbol{T}} f(\omega) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$ на множестве положительной меры возможно только в вырожденном случае $f \equiv 0$ п. в. Таким образом, рассматриваемые в теореме 3.1 скорости сходимости являются максимально возможными.*

Замечание 3.1. Теорема 3.1 и следствие 3.1 из нее доказаны в [6] для вещественнозначных функций f. Переходя к вещественной и мнимой частям, нетрудно показать, что эти результаты справедливы и для комплекснозначных функций.

Замечание 3.2. Условие (2) теоремы 3.1 равносильно условию

$$\sup_{t>0} \left\| \int_0^t f(T^s \omega) ds \right\|_\infty < \infty.$$

Как показано в [22], последнее (в случае потока) эквивалентно тому, что f лежит в образе генератора полугруппы $\{\widehat{T}^t\}_{t\geq 0}$, действующей в $L_\infty(\Omega)$ (по правилу $\widehat{T}^t g(\omega) = g(T^t \omega)$), т. е. для некоторой функции $h \in L_\infty(\Omega)$ имеем

$$\lim_{\tau \to 0+} \left\| f - \frac{\widehat{T}^\tau h - h}{\tau} \right\|_\infty = 0.$$

Там же показано, что этого условия достаточно для выполнения (3).

Замечание 3.3. Если функция f лежит в образе генератора полугруппы $\{\widehat{T}^t\}_{t\geq 0}$, действующей в $L_p(\Omega)$, $p > 1$, то для любого $\delta \in [0, 1 - 1/p)$ на множестве полной меры справедлива асимптотическая оценка

$$A_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = o\left(\frac{1}{t^\delta}\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Таким образом, асимптотическое соотношение для случая $L_\infty(\Omega)$, рассмотренное в теореме 3.1, является предельным для асимптотики в $L_p(\Omega)$.

Покажем это, используя подход из дискретного случая [18]. Поскольку f удовлетворяет условию

$$\sup_{t>0}\left\|\int_0^t f(T^s\omega)ds\right\|_p < \infty,$$

для всех $\delta \in [0, 1-1/p)$ получим

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{1}{n^{1-\delta}}\int_0^n f(T^s\omega)ds\right|^p d\mu = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{p-p\delta}}\int_\Omega \left|\int_0^n f(T^s\omega)ds\right|^p d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{p-p\delta}}\left\|\int_0^n f(T^s\omega)ds\right\|_p^p \le \left(\sup_{t>0}\left\|\int_0^t f(T^s\omega)ds\right\|_p\right)^p \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{p-p\delta}} < \infty.$$

Откуда следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{1}{n^{1-\delta}}\int_0^n f(T^s\omega)ds\right|^p$$

сходится п. в., а значит, член ряда стремится на бесконечности к нулю:

$$\frac{1}{n^{1-\delta}}\left|\int_0^n f(T^s\omega)ds\right| = o(1) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{п. в.}$$

Положим

$$g(\omega) = \sup_{0<t<1}\int_0^t |f(T^s\omega)|ds.$$

Ясно, что

$$g(\omega) \le \sup_{t>0}\frac{1}{t}\int_0^t |f(T^s\omega)|ds$$

и, следовательно,

$$\|g\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

(по доминантной эргодической теореме [21, теорема 6.12]). Тогда для всех $\delta \in [0, 1-1/p)$ получим

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{g(T^n\omega)}{n^{1-\delta}}\right|^p d\mu = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{p-p\delta}}\|g(T^n\omega)\|_p^p$$
$$\le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{p-p\delta}} < \infty.$$

Откуда следует, что

$$\frac{g(T^n\omega)}{n^{1-\delta}} = o(1) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{п. в.}$$

Учитывая оба асимптотических соотношения, для всех $\delta\in[0,1-1/p)$ при $t\to\infty$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^{1-\delta}}\left|\int_0^t f(T^s\omega)ds\right| &= \left(\frac{[t]}{t}\right)^{1-\delta}\left|\frac{1}{[t]^{1-\delta}}\int_0^{[t]} f(T^s\omega)ds + \frac{1}{[t]^{1-\delta}}\int_{[t]}^t f(T^s\omega)ds\right| \\ &\le \frac{1}{[t]^{1-\delta}}\left|\int_0^{[t]} f(T^s\omega)ds\right| + \frac{1}{[t]^{1-\delta}}\int_0^{t-[t]}\left|f(T^s(T^{[t]}\omega))\right|ds \\ &\le \frac{1}{[t]^{1-\delta}}\left|\int_0^{[t]} f(T^s\omega)ds\right| + \frac{1}{[t]^{1-\delta}}g(T^{[t]}\omega) = o(1) \quad \text{п. в.}\end{aligned}$$

3.2. *Неравенство для огибающих.* Интересный факт заключается в том, что монотонные огибающие эргодических средних не могут убывать слишком быстро к нулю при $t\to\infty$, о чем и говорит следующий результат, аналогичный дискретному случаю для автоморфизмов [5, теорема 1] и непрерывному случаю для потоков [25, теорема 4].

Лемма 3.1. *Пусть $\boldsymbol{T}=\{T^t\}_{t\ge 0}$ — эргодический полупоток в пространстве Лебега (Ω,Σ,μ), $f\in L_1^0(\Omega)$ и $f\not\equiv 0$. Тогда существует такое $p\in(0,1)$, зависящее от функции f и полупотока $\boldsymbol{T}$, что для п. в. $\omega\in\Omega$ найдется константа $c=c(\omega)>0$ такая, что для всех $t\ge p$ верно неравенство $\mathcal{A}_t^{\boldsymbol{T}}f(\omega)\ge\frac{c(\omega)}{t}$.*

Доказательство. Воспользуемся конструкцией расширения полупотока, описанной в § 2. По лемме 2.1 функция $\widetilde{f}=f\circ\pi$ не равна тождественно нулю и имеет нулевое пространственное среднее. Тогда согласно [25] для потока $\mathbf{U}$ и функции $\widetilde{f}$ найдутся число $p\in(0,1)$ и множество $A\subseteq\widetilde{\Omega}_{T^1}$ полной $\widetilde{\mu}$-меры такие, что для всех $\vec{\omega}\in A$ справедливо неравенство

$$\mathcal{A}_t^{\mathbf{U}}\widetilde{f}(\vec{\omega})\ge\frac{\widetilde{c}(\vec{\omega})}{t}$$

для всех $t\ge p$ и некоторого $\widetilde{c}(\vec{\omega})>0$. Ясно, что

$$A=\Big\{\vec{\omega}\in\widetilde{\Omega}_{T^1}\ \Big|\ \inf_{t\ge p} t\mathcal{A}_t^{\mathbf{U}}\widetilde{f}(\vec{\omega})>0\Big\}.$$

Рассмотрим измеримое множество

$$B=\Big\{\omega\in\Omega\ \Big|\ \inf_{t\ge p} t\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}}f(\omega)>0\Big\}.$$

По лемме 2.1 имеет место равенство временных средних $A_t^{\mathbf{U}}\widetilde{f}(\vec{\omega}) = A_t^{\mathbf{T}}f(\omega_0)$ и, следовательно, равенство множеств $\widetilde{B}_0 = A$. Откуда $\mu(B) = \widetilde{\mu}(A) = 1$. Определяя $c(\omega) := \inf_{t\ge p} t\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}}f(\omega)$, для всех $\omega \in B$ получаем требуемое в теореме неравенство. ☐

Следствие 3.2. *Для любой $f \in L\log L$ найдется константа $c_f > 0$ такая, что при всех $t \ge p$*

$$\Big\|\sup_{s\ge t}|A_s^{\mathbf{T}}f|\Big\|_1 \ge \frac{c_f}{t}.$$

Доказательство. По доминантной эргодической теореме [21, теорема 6.12] $\sup_{t>0} A_t^{\mathbf{T}}|f|$ интегрируем для каждой $f \in L\log L$. Поскольку $c(\omega)$ ограничена (это следует из доказательства леммы 3.1 и применяемых фактах из [25] и [5]), то, интегрируя, получаем требуемую оценку с константой $c_f = \|c\|_1$. ☐

3.3. *Инвариантность множеств.* Следующий результат является точным аналогом теоремы для автоморфизмов [5, теорема 2], который можно назвать законом нуля или единицы для скоростей сходимости.

Теорема 3.2. *Пусть $\boldsymbol{T} = \{T^t\}_{t\ge 0}$ — эргодический полупоток в пространстве Лебега (Ω, Σ, μ), $f \in L_1^0(\Omega)$ и $f \not\equiv 0$. Тогда для любой монотонно убывающей к нулю функции $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ множества*

$$\mathcal{F}(\Omega, f, \boldsymbol{T}; \varphi), \quad \mathcal{E}(\Omega, f, \boldsymbol{T}; \varphi), \quad \mathcal{D}(\Omega, f, \boldsymbol{T}; \varphi)$$

имеют меру 0 или 1.

Доказательство. Воспользуемся конструкцией расширения полупотока, которая описана в § 2. Пусть

$$\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\big(\widetilde{\Omega}_{T^1}, \widetilde{f}, \mathbf{U}; \varphi\big), \quad \widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\big(\widetilde{\Omega}_{T^1}, \widetilde{f}, \mathbf{U}; \varphi\big), \quad \widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}\big(\widetilde{\Omega}_{T^1}, \widetilde{f}, \mathbf{U}; \varphi\big).$$

Используя равенство $A_t^{\mathbf{U}}\widetilde{f}(\vec{\omega}) = A_t^{\mathbf{T}}f(\omega_0)$, рассмотрим монотонную огибающую для потока $\mathbf{U}$. Для всех $l \ge 0$ получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t^{\mathbf{U}}\widetilde{f}(U^l\vec{\omega}) &= \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}}f(T^l\omega_0)\\
&= \sup_{\tau\ge t}\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f\left(T^{s+l}\omega_0\right)ds\right|\\
&= \sup_{\tau\ge t}\left|\frac{1}{\tau}\int_0^{l+\tau} f\left(T^{s}\omega_0\right)ds - \frac{1}{\tau}\int_0^{l} f\left(T^{s}\omega_0\right)ds\right|\\
&\le \sup_{\tau\ge t}\left|\frac{l+\tau}{\tau}\frac{1}{l+\tau}\int_0^{l+\tau} f\left(T^{s}\omega_0\right)ds\right| + \sup_{\tau\ge t}\left|\frac{1}{\tau}\int_0^{l} f\left(T^{s}\omega_0\right)ds\right|\\
&\le \left(1+\frac{l}{t}\right)\mathcal{A}_{t+l}^{\mathbf{T}}f(\omega_0) + \frac{1}{t}\left|\int_0^{l} f\left(T^{s}\omega_0\right)ds\right|.
\end{aligned}$$

Для $t \geq p$ воспользуемся оценкой

$$\frac{1}{t} \leq \frac{\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega)}{c(\omega)}$$

из леммы 3.1, монотонностью огибающей, т. е. $\mathcal{A}_{t+l}^{\mathbf{T}} f(\omega_0) \leq \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega_0)$, и получим неравенство с одинаковыми моментами времени у монотонных огибающих:

$$\mathcal{A}_t^{\mathbf{U}} \widetilde{f}(U^l \vec{\omega}) \leq \left(1 + \frac{l}{p} + \frac{1}{c(\omega_0)} \int_0^l \left|f(T^s \omega_0)\right| ds\right) \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega_0).$$

Обозначая громоздкую константу как $C(\vec{\omega})$ и учитывая равенство средних, получаем

$$\mathcal{A}_t^{\mathbf{U}} \widetilde{f}(U^l \vec{\omega}) \leq C(\vec{\omega}) \mathcal{A}_t^{\mathbf{U}} \widetilde{f}(\vec{\omega}).$$

Из полученного неравенства следует, что для каждого $l \geq 0$ имеют место включения $U^l \widehat{\mathcal{F}} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$, $U^l \widehat{\mathcal{E}} \subseteq \widehat{\mathcal{E}}$ и $U^{-l} \widehat{\mathcal{D}} \subseteq \widehat{\mathcal{D}}$. Это означает инвариантность $(\mathrm{mod}\ \widetilde{\mu})$ этих множеств относительно эргодического потока $\mathbf{U}$, а значит, мера этих множеств 0 или 1.

Снова используя равенство средних $A_t^{\mathbf{U}} \widetilde{f}(\vec{\omega}) = A_t^{\mathbf{T}} f(\omega_0)$, получаем

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{F}} &= \left\{\vec{\omega} \in \widetilde{\Omega}_{T^1} \mid \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega_0) = \mathcal{O}\left(\varphi(t)\right) \text{ при } t \to \infty\right\} = \widetilde{\mathcal{F}}_0, \\
\widehat{\mathcal{E}} &= \left\{\vec{\omega} \in \widetilde{\Omega}_{T^1} \mid \mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega_0) = o\left(\varphi(t)\right) \text{ при } t \to \infty\right\} = \widetilde{\mathcal{E}}_0, \\
\widehat{\mathcal{D}} &= \left\{\vec{\omega} \in \widetilde{\Omega}_{T^1} \mid \varphi(t) = \mathcal{O}\left(\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega_0)\right) \text{ при } t \to \infty\right\} = \widetilde{\mathcal{D}}_0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\mu(\mathcal{F}) = \widetilde{\mu}(\widehat{\mathcal{F}}), \quad \mu(\mathcal{E}) = \widetilde{\mu}(\widehat{\mathcal{E}}), \quad \mu(\mathcal{D}) = \widetilde{\mu}(\widehat{\mathcal{D}}),$$

и поэтому эти меры равняются 0 или 1. □

Замечание 3.4. Отметим, что в этом доказательстве вместо леммы 3.1 можно использовать неравенство для потоков из [25, теорема 4].

Замечание 3.5. Кроме выведенного в теореме неравенства аналогичным способом также можно получить и немного отличающееся от него следующее неравенство:

$$\mathcal{A}_{t+l}^{\mathbf{U}} \widetilde{f}(\vec{\omega}) \leq \left(1 + \frac{1}{c(T^l \omega_0)} \int_0^l \left|f(T^s \omega_0)\right| ds\right) \mathcal{A}_t^{\mathbf{U}} \widetilde{f}(U^l \vec{\omega}).$$

§4. Решетки оценок

Обозначим через $\mathbf{E}(f,\mathbf{T})$, $\mathbf{F}(f,\mathbf{T})$ и $\mathbf{D}(f,\mathbf{T})$ множества классов эквивалентности (относительно описанного в § 1 отношения $\asymp$) монотонно убывающих к нулю функций $\varphi(t)$, для которых

$$\mu\left(\mathcal{F}\left(\Omega,f,\mathbf{T};\varphi\right)\right)=1,\quad \mu\left(\mathcal{E}\left(\Omega,f,\mathbf{T};\varphi\right)\right)=1,\quad \mu\left(\mathcal{D}\left(\Omega,f,\mathbf{T};\varphi\right)\right)=1,$$

т. е.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f,\mathbf{T})&=\bigl\{\varphi(t):\mu\left(\mathcal{F}\left(\Omega,f,\mathbf{T};\varphi\right)\right)=1\bigr\}/\asymp,\\
\mathbf{F}(f,\mathbf{T})&=\bigl\{\varphi(t):\mu\left(\mathcal{E}\left(\Omega,f,\mathbf{T};\varphi\right)\right)\ =1\bigr\}/\asymp,\\
\mathbf{D}(f,\mathbf{T})&=\bigl\{\varphi(t):\mu\left(\mathcal{D}\left(\Omega,f,\mathbf{T};\varphi\right)\right)=1\bigr\}/\asymp .
\end{aligned}$$

На этих множествах можно рассмотреть естественное корректно определенное отношение частичного порядка. Будем говорить, что класс $\mathcal{K}_1$ не превосходит класс $\mathcal{K}_2$, если для любых $\varphi_1\in\mathcal{K}_1$ и $\varphi_2\in\mathcal{K}_2$ найдется константа $\kappa=\kappa(\varphi_1,\varphi_2)$ такая, что $\varphi_2\le\kappa\varphi_1$.

Следующая теорема содержит несколько простых свойств введенных частично упорядоченных множеств и является точным аналогом теоремы 3 из [5].

Теорема 4.1. *Пусть* $\boldsymbol{T}=\{T^t\}_{t\ge0}$ *— эргодический полупоток в пространстве Лебега* (Ω,Σ,μ), $f\in L_1^0(\Omega)$ *и* $f\not\equiv0$. *Тогда справедливы следующие свойства*:

(1) *множества* $\boldsymbol{F}(f,\boldsymbol{T})$, $\boldsymbol{E}(f,\boldsymbol{T})$ *и* $\boldsymbol{D}(f,\boldsymbol{T})$ *не пусты*;

(2) *множества* $\boldsymbol{F}(f,\boldsymbol{T})$, $\boldsymbol{E}(f,\boldsymbol{T})$ *и* $\boldsymbol{D}(f,\boldsymbol{T})$ *являются решетками*;

(3) *в множестве* $\mathbf{E}(f,\boldsymbol{T})$ *нет минимальных элементов и*

$$\mathbf{D}(f,\boldsymbol{T})\cap\mathbf{E}(f,\boldsymbol{T})=\varnothing;$$

(4) $\operatorname{card}\bigl(\mathbf{F}(f,\boldsymbol{T})\cap\mathbf{D}(f,\boldsymbol{T})\bigr)\le1$; *если же* $\operatorname{card}\bigl(\mathbf{F}(f,\boldsymbol{T})\cap\mathbf{D}(f,\boldsymbol{T})\bigr)=1$, *то единственный элемент, лежащий в пересечении, является наибольшим в* $\mathbf{D}(f,\boldsymbol{T})$ *и наименьшим в* $\mathbf{F}(f,\boldsymbol{T})$;

(5) *если в* $\mathbf{F}(f,\boldsymbol{T})$ *найдется наименьший элемент, то* $\mathbf{F}(f,\boldsymbol{T})\setminus\mathbf{E}(f,\boldsymbol{T})\ne\varnothing$.

Доказательство. Пункты (2), (4) и (5) доказываются аналогично соответствующим пунктам в дискретном случае (см. [5, теорема 3]). Докажем только оставшиеся свойства, поскольку в них имеются некоторые отличия от дискретного варианта.

(1) По теореме Биркгофа $\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}}f(\omega)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ п. в. Тогда по теореме Егорова найдется такое множество $\bar\Omega\subseteq\Omega$, что $\mu(\bar\Omega)>0$ и $\mathcal{A}_n^{\mathbf{T}}f(\omega)\rightrightarrows0$ при натуральных $n\to\infty$ на $\bar\Omega$. Положим

$$\varphi(t):=\sup_{\omega\in\bar\Omega}\mathcal{A}_{\lfloor t\rfloor}^{\mathbf{T}}f(\omega).$$

Тогда $\bar{\Omega} \subseteq \mathcal{F}(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi)$, а значит, $\mu(\mathcal{F}) = 1$ по теореме 3.2. Очевидно, что $\varphi(t)$ монотонно убывает к 0 по t, а значит, $\varphi \in \mathbf{F}(f, \mathbf{T})$.

Так как множество $\mathbf{F}(f, \mathbf{T})$ непусто, то, взяв оттуда любую функцию φ, мы получим, что $\sqrt{\varphi} \in \mathbf{E}(f, \mathbf{T})$.

Непустота множества $\mathbf{D}(f, \mathbf{T})$ очевидна, так как класс эквивалентности $1/t$ лежит в $\mathbf{D}(f, \mathbf{T})$ по лемме 3.1.

(3) Пусть $\mu(\mathcal{E}(\Omega, f, \mathbf{T}; \varphi)) = 1$, т. е. $\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = \alpha_t(\omega)\varphi(t)$, где $\alpha_t(\omega) \to 0$ п. в. при $t \to \infty$. Применяя теорему Егорова к $\alpha_n(\omega)$, получаем, что найдется такое измеримое множество $\Omega_\alpha \subseteq \Omega$ положительной меры, что

$$\alpha_n = \sup_{k \geq n} \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} \sqrt{\alpha_k(\omega)} \to 0$$

при $n \to \infty$. Полагая $\psi(t) = \alpha_{\lfloor t \rfloor}\varphi(\lfloor t \rfloor)$, для всех $\omega \in \Omega_\alpha$ получаем

$$\mathcal{A}_t^{\mathbf{T}} f(\omega) \leq \sqrt{\alpha_{\lfloor t \rfloor}(\omega)}\sqrt{\alpha_{\lfloor t \rfloor}(\omega)}\varphi(\lfloor t \rfloor) \leq \sqrt{\alpha_{\lfloor t \rfloor}(\omega)}\psi(t),$$

т. е.

$$\Omega_\alpha \subseteq \mathcal{E}(\Omega, f, \mathbf{T}; \psi).$$

Отсюда ввиду положительности меры множества Ω_α и инвариантности $(\operatorname{mod} \mu)$ множества $\mathcal{E}(\Omega, f, \mathbf{T}; \psi)$ следует, что $\mathcal{E}(\Omega, f, \mathbf{T}; \psi)$ имеет полную меру. Нетрудно видеть, что $\psi(t) = o(\varphi(t))$ при $t \to \infty$. Это доказывает, что класс, порожденный функцией $\psi(t)$ не меньше класса, порожденного функцией $\varphi(t)$. Поскольку φ выбрано произвольно, то отсутствие минимальных элементов в $\mathbf{E}(f, \mathbf{T})$ доказано. Пустота пересечения $\mathbf{D}(f, \mathbf{T})$ и $\mathbf{E}(f, \mathbf{T})$ очевидна. □

Список литературы

1. *Гапошкин В. Ф.* О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов // *Матем. заметки.* 1998. Т. 64, № 3. С. 366–372.
2. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // *УМН.* 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
3. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // *Матем. заметки.* 2013. Т. 94, № 4. С. 569–577.
4. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // *Труды ММО.* 2016. Т. 77, № 1. С. 1–66.
5. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Об измерении скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа // *Матем. заметки.* 2019. Т. 106, № 1. С. 40–52.

6. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А.* Максимальная поточечная скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 2020. Т. 498. С. 18–25.
7. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая Теория.* М.: Наука, 1980.
8. *Подвигин И. В.* О скорости сходимости в индивидуальной эргодической теореме для действий полугрупп // *Матем. тр.* 2015. Т. 18, № 2. С. 93–111.
9. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры // *Матем. сб.* 1949. Т. 25(67), № 1. С. 107–150.
10. *Рохлин В. А.* Точные эндоморфизмы пространства Лебега // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1961. Т. 25, № 4. С. 499–530.
11. *Седалищев В. В.* Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем // *Сиб. матем. журн.* 2012. Т. 53, № 5. С. 1102–1110.
12. *Седалищев В. В.* Связь скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа в L_p // *Сиб. матем. журн.* 2014. Т. 55, № 2. С. 412–426.
13. *Шнейберг И. Я.* Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем // *Функц. анализ и его прил.* 1985. Т. 19, № 2. С. 92–93.
14. *Athreya J. S. and Forni G.* Deviation of ergodic averages for rational polygonal billiards // *Duke Math. J.* 2008. V. 144, N 2. P. 285–319.
15. *Bezuglyi S. and Jorgensen P. E. T. Transfer Operators, Endomorphisms, and Measurable Partitions* / Lecture Notes in Math.; N 2217. Cham: Springer, 2018.
16. *Bufetov A.* Limit theorems for translation flows // *Ann. of Math.* 2014. V. 179. P. 431–499.
17. *Burger M.* Horocycle flow on geometrically finite surfaces // *Duke Math. J.* 1990. V. 61, N. 3. P. 779–803.
18. *Cohen G. and Lin M.* Laws of large numbers with rates and the one-sided ergodic Hilbert transform // *Illinois J. Math.* 2003. V. 47, N 4. P. 997–1031.
19. *Flaminio L. and Forni G.* Invariant distributions and time averages for horocycle flows // *Duke Math. J.* 2003. V. 119. P. 465–526.
20. *Forni G.* Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus // *Ann. of Math.* 2002. V. 155. P. 1–103.
21. *Krengel U. Ergodic Theorems* / de Gruyter Studies in Mathematics. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1985. V. 6.
22. *Krengel U. and Lin M.* On the range of the generator of a Markovian semigroup // *Math. Zeit.* 1984. V. 185. P. 553–565.
23. *Lin C.-H. and Rudolph D.* Sections for semiflows and Kakutani shift equivalence // *Modern Dynamical Systems and Applications.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. P. 145–162.

24. *Margulis G.* Problems and conjectures in rigidity theory // *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 161–174.
25. *Podvigin I. V.* Lower bound of the supremum of ergodic averages for $\mathbb{Z}^d$ and $\mathbb{R}^d$-actions // *SEMR.* 2020. V. 17. P. 626–636.
26. *Qian M., Xie J.-S., and Zhu S. Smooth Ergodic Theory for Endomorphisms* / Lecture Notes in Math.; N 1978. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
27. *Ratner M.* Rigidity of time changes for horocycle flows // *Acta Math.* 1986. V. 156. P. 1–32.
28. *Strömbergsson A.* On the deviation of ergodic averages for horocycle flows // *J. Mod. Dyn.* 2013. V. 7, N 2. P. 291–328.

Zero-One law for the rates of convergence in the Birkhoff ergodic theorem with continuous time

A. G. Kachurovskii, I. V. Podvigin, and A. A. Svishchev

Abstract. We consider monotone pointwise estimates of the rates of convergence in the Birkhoff ergodic theorem with continuous time. For an ergodic semiflow in a Lebesgue space, we prove that such estimates hold either on a null or full measure set. It is shown that monotone estimates that are true almost everywhere always exist. We study the lattice of such estimates and also consider some questions on their unimprovability.

Keywords: the Birkhoff ergodic theorem, rates of convergence in ergodic theorems, optimal estimates, natural extension of endomorphism, lattice of estimates.

Качуровский Александр Григорьевич
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: agk@math.nsc.ru

Подвигин Иван Викторович
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
Новосибирский гос. университет,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: ipodvigin@math.nsc.ru

Свищёв Александр Александрович
Новосибирский гос. университет,
Новосибирск, 630090 РОССИЯ.
E-mail: saa1997@yandex.ru

Поступила в редакцию
9 июня 2020 г.
Получена после доработки
11 января 2021 г.
Принята к публикации
31 марта 2021 г.