Е.Л.Коротяев

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИИМПУЛЬСА ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ХИЛЛА

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Хилла

$$H = -d^2/dx^2 + p(x),\ x \in \mathbb{R},$$

где p – вещественный I-периодический потенциал, $p \in L^2(0,1)$. Пусть E – спектральный параметр для оператора Хилла. В работе Н.Е.Фирсовой [1] было введено понятие "глобального" квазиимпульса $k(E)$ (далее просто квазиимпульса) и его римановой поверхности $\mathbb{K}$. Когда переменная E пробегает спектральную поверхность $\mathbb{E}$ (риманову) оператора H, то $k(E)$ пробегает риманову поверхность $\mathbb{K}$. Отображение $k(E)$ взаимооднозначно и через $E(k)$ обозначим обратную функцию.

При изучении асимптотики при $t \to \infty$ решения нестационарного уравнения Шредингера (с периодическим по x потенциалом), уравнения диффузии (с периодическим по x коэффициентом диффузии) [2] или волнового уравнения (с периодической по x скоростью) возникает необходимость в изучении свойств $\dot{E}, \ddot{E}$. Здесь и в дальнейшем $\dot{E} = \frac{dE}{dk}$, $k' = dk/dE$. Цель данной работы состоит в изучении свойства $\dot{E}, \ddot{E}$ как функций $k \in \mathbb{K}$, и $k'(E), k''(E)$ как функций $E \in \mathbb{E}$. Причем основное внимание уделяется изучению $\dot{E}, \ddot{E}$ на "прямой" $\mathrm{Im}\, k = 0$ и расположению нулей $\ddot{E}$. Показано, например, что в случае N -зонного потенциала функция $\ddot{E}$ имеет равно $6(N-1)$ нулей на $\mathbb{K}$. Причем $(N-1)$ простой нуль как на положительной, так и на отрицательной "полуоси" и $N-1$ нуль в каждом "квадранте". Далее показано, что функция $\dot{E}(k)$ на прямой $\mathrm{Im}\, k = 0$ между нулями имеет только один локальный максимум или минимум. В заключение получены соотношения, связывающие эффективные массы и нули функции $\ddot{E}$.

Автор благодарит П.П.Каргаева и Н.Е.Фирсову за советы и обсуждения.

§ I. Основные результаты

Рассмотрим самосопряженный оператор H. Без ограничения общности положим $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$. Известно, что спектр σ оператора Хилла абсолютно-непрерывный и состоит из отрезков

$\sigma(n)=[s(2n-1),\ s(2n)],\ s(2n-1)<s(2n)\leqslant s(2n+1),$ $n=1,2,\ldots$. Интервалы $\omega(0)=(-\infty,\ s(1))$, $\omega(n)=(s(2n),$ $s(2n+1))$, $n=1,2,\ldots$ называются лакунами в спектре оператора H. Если $s(2n)=s(2n+1)$, то будем говорить, что спектральные компоненты $\sigma(n),\sigma(n+1)$ сливаются и лакуна $\omega(n)$ вырождается. Спектр σ распадается на связные компоненты

$$\sigma_n=[s_{2n-1},s_{2n}],\ s_{2n-1}<s_{2n}<s_{2n+1},\ n=1,2,\ldots,\ s_1=s(1),$$

которые называются зонами спектра. Через $\mathbb{E}$ обозначим спектральную поверхность оператора H, которая получается склеиванием двух экземпляров спектральной плоскости $\mathbb{C}\setminus\sigma$, разрезанной по зонам спектра.

При этом верхний берег n-й зоны первого листа $\mathbb{E}_1$, отождествляется с нижним берегом n-й зоны второго листа $\mathbb{E}_2$ (он далее именуется просто верхним берегом σ_n^+). Нижний берег n-й зоны первого листа отождествляется с верхним берегом второго листа (его будем называть нижним берегом σ_n^-), $\sigma^+=\bigcup\sigma_n^+$.

Пусть $F(E)$ - функция Ляпунова, соответствующая оператору H. Напомним, что $F(E)$ - целая функция $E\in\mathbb{C}$, вещественная на вещественной оси. В каждой невырожденной лакуне $\omega(n)$ лежит равно один простой нуль $\xi(n)$ функции $F'(E)$. Если лакуна $\omega(n)$ вырождена, то нуль $\xi(n)=s(2n)=s(2n+1)$.

Введем риманову поверхность $\mathbb{K}$, которая представляет собой комплексную плоскость с вертикальными разрезами

$$\gamma_n=(\pi n-i\varepsilon_n,\pi n+i\varepsilon_n),\ \varepsilon_n=\varepsilon_{-n}\geqslant 0,\ n\in\mathbb{Z}_\pm.$$

Если лакуна $\omega(n)$ вырождена, то $\varepsilon_n=0$, разреза γ_n нет. Если лакуна $\omega(n)$ не вырождена, то $\varepsilon_n>0$. Левый берег разреза γ_n склеем с правым берегом γ_{-n}, $n\in\mathbb{Z}_\pm$. Введем множества

$$\gamma=\bigcup\gamma_n,\ K=\{\operatorname{Im}k=0\},\ \mathbb{K}_\pm=\{\pm\operatorname{Im}k>0,\ k\notin\gamma\},$$

$$E_+=\{E\in\mathbb{E}_1,\ \operatorname{Im}E>0\},\ K_\pm=\{k\in K,\ \pm k>0\}.$$

Рассмотрим теперь на верхнем берегу σ_1^+ функцию $k(E)=$ $=\arccos F(E)$. Оказывается (см. [I]) функцию $k(E)$ можно аналитически продолжить на $\mathbb{E}$ так, что $\mathbb{E}$ взаимоднозначно отображается на риманову поверхность $\mathbb{K}$. Функция $k(E)$ отображает $\mathbb{E}_1\setminus\{E>s_1\}$ на верхнюю "полуплоскость" $\mathbb{K}_+$. Второй лист $\mathbb{E}_2\setminus\{E>s_1\}$ отображается при этом на нижнюю "полуплоскость" $\mathbb{K}_-$. Спектр σ отображается на вещественную "ось" K. При этом верхние берега зон σ_n^+ переходят на положительную "полуось" K_+, а нижние σ_n^- на отрицательную. Пусть образы зон $\Delta_{\pm n} \equiv k(\sigma_n^{\pm}) \subset K_{\pm}$, $n=1,2,\ldots$. Заметим также, что верхняя полуплоскость $\mathbb{E}_+$ переходит в правую половину $\mathbb{K}_+$, т.е. на $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_+ \cap \{\operatorname{Re} k > 0\}$. Невырожденные лакуны обозначим через ω_n, $n=0,1,2\ldots$. Разрежем $\mathbb{E}_1$ по ω_n и пусть ω_n^+ – верхний берег разреза, $n=0,1,2\ldots$, $\omega^+ = \cup\,\omega_n^+$. Перейдем к основным результатам. Справедлива

ТЕОРЕМА I. Возьмем ветвь функции $k(E)$, определяемую условием $k=k(E)$, $E\in\omega^+\cup\sigma^+$. Пусть n и m – произвольные целые положительные числа. Тогда

1) все производные $k^{(2m-1)}(E)>0$, $E\in\sigma_n^+$; если зона σ_n^+ – полубесконечная, то $k^{(2m)}(E)<0$, $E\in\sigma_n^+$, если зона σ_n^+ – конечная, то $k^{(2m)}(E)$ имеет один простой нуль строго внутри σ_n^+.

2) функция $k^{(m)}(E)$, $E\in\omega^+$, – чисто мнимая, все четные производные $-i\,k^{(2m)}(E)<0$, $E\in\omega_n^+$, все нечетные производные $-i\,k^{(2m-1)}(E)$ имеют только один простой нуль внутри ω_n^+ и $-i\,k^{(2m-1)}(E)<0$, $E\in\omega_0$.

Справедливы равенства

$$\overline{E(k)} = E(-\bar{k}) = E(\bar{k}),\quad k\in\mathbb{K}, \tag{I.I}$$

которые следуют из вещественности функции $E(k)$ на вещественной и мнимой осях и из принципа симметрии. Предположим, что $q\in\mathbb{K}_+$ есть нуль производной функции $E^{(m)}(k)$, $m\geq 1$. Тогда из (I.I) следует, что точки $\pm q$, $\pm\bar{q}$ также являются нулями функции $E^{(m)}(k)$. Справедлива

ТЕОРЕМА II. 1). Пусть потенциал p является N-зонным. Тогда функция $\ddot{E}(k)$ имеет $6(N-1)$ нулей в $\mathbb{K}$, $N-1$ – простой нуль в $K_{\pm}$, по одному, строго внутри, в каждом конечном Δ_n, $\pm n=1,2,\ldots,N-1$, и $N-1$ нуль, с учетом кратности, в $\mathbb{K}_1$, $\ddot{E}(k)>0$ при $k\in\Delta_{\pm N}$.

2) Пусть потенциал p является бесконечно зонным. Тогда функция $\ddot{E}(k)$ в области $\{\operatorname{Re} k>0\}$ имеет бесконечное число нулей $\{k_n, k_{n1}, k_{n2}\}$, $n=1,2,\ldots$, где нуль k_n лежит строго внутри Δ_n, $\overline{k_{n2}} = k_{n1}\in\mathbb{K}_1$,

$$|k_n - k(s_{2n})| + |k_{n1} - k(s_{2n})| \longrightarrow 0,\quad n\longrightarrow\infty. \tag{I.2}$$

3) если $\gamma_n \neq \emptyset$, то $\ddot{E}(k)\neq 0$ при $k\in\gamma_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы II и из (I.I) следует, что каждой невырожденной лакуне ω_n соответствует три нуля k_n, k_{n1}, k_{n2} в правой полуплоскости и три нуля $-k_n, -k_{n1}, -k_{n2}$, $n=1,2,\dots$ в левой полуплоскости.

Пусть $\mu_n = E(k_n) \in \sigma_n^+$, $\mu_{n1} = E(k_{n1}) \in \mathbb{E}_+$, и пусть ξ_n нуль функции $F'(E)$ в невырожденной лакуне ω_n, $n=1,2,\dots$. Введем эффективные массы [3]

$$\varkappa_n = 1/\ddot{E}(k(s_n)),\ n=1,2,\dots$$

где $\varkappa_{2n} < 0$, $\varkappa_{2n-1} > 0$.

Введем функции

$$T_n(E) = (\xi_n - E)^3/(\mu_n - E)|\mu_{n1} - E|^2,$$

$$Q_n(E) = (\xi_n - E)^2/(s_{2n} - E)(s_{2n+1} - E),\ n=1,2,\dots.$$

В настоящей работе получено точное выражение для эффективной массы через нули функции $\ddot{E}$ и нули функции $F'(E)$. Справедлива

ТЕОРЕМА Ш. Имеют место равенства

$$2\varkappa_m = \prod_{n\geqslant 1} T_n(s_m),\quad m=1,2,\dots, \tag{I.3}$$

где произведения сходятся абсолютно.

Приведем равенства, полученные в [4],

$$2\varkappa_1 = \prod_{n\geqslant 1} Q_n(s_1), \tag{I.4}$$

$$2\varkappa_\ell = \frac{(\xi_m - s_\ell)^2(-1)^\ell}{(s_1 - s_\ell)(s_{2m+1} - s_{2m})} \prod_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} Q_n(s_\ell). \tag{I.5}$$

где $\ell = 2m, 2m+1$ и произведения сходятся абсолютно. Из теоремы Ш и из (I.4), (I.5) вытекает

СЛЕДСТВИЕ IУ. Справедливы равенства

$$1 = \prod_{n\geqslant 1} T_n(s_1)\, Q_n^{-1}(s_1) \tag{I.6}$$

$$1 = T_m(s_\ell)\,\frac{(s_\ell - s_1)(s_{2m+1} - s_{2m})}{(\xi_m - s_\ell)^2(-1)^\ell} \prod_{\substack{n\geqslant 1\\ n\neq m}} T_n(s_\ell)\, Q_n^{-1}(s_\ell), \tag{I.7}$$

где $\ell = 2m, 2m+1$ и произведения сходятся абсолютно.

§ 2. Свойства квазиимпульса

Сначала приведем необходимые сведения. Функция Ляпунова имеет асимптотику [5]

$$F(E)=\cos\tau+O(\exp(|\mathrm{Im}\,\tau|)/E),\ |E|\longrightarrow\infty, \qquad (2.1)$$

где $\tau=\sqrt{E},\ \sqrt{1+i0}=1$. Асимптотику (2.1) можно дифференцировать любое число раз. Далее потребуются равенства и асимптотика из [1]

$$\cos k=F(E), \qquad (2.2)$$

$$\dot{E}(k)=-\sin k/F'(E), \qquad (2.3)$$

$$\ddot{E}(k)=-(F(E)+F''(E)\dot{E}(k)^2)/F'(E), \qquad (2.4)$$

$$E(k)=k^2(1+O(k^{-1/3})),\ |k|\longrightarrow\infty. \qquad (2.5)$$

Рассмотрим квазиимпульс $k(E)$ как функцию спектрального параметра $E\in\mathbb{E}_+$. Функция $k(E)$ отображает $\mathbb{E}_+$ на $\mathbb{K}_1$, при этом граница переходит в границу, т.е.

$$\left.\begin{aligned} &k(\sigma_n^+)=\Delta_n,\ k(\omega_n^+)=\gamma_n\cap\{\mathrm{Im}\,k>0\},\ n=1,2,\dots\\ &k(\omega_0^+)=\{\mathrm{Re}\,k=0,\ \mathrm{Im}\,k>0\}\end{aligned}\right\}. \qquad (2.6)$$

Введем вещественные гармонические функции $\alpha(E),\beta(E),\lambda(k),\nu(k)$,

$$k(E)=\alpha(E)+i\beta(E),\ E(k)=\lambda(k)+i\nu(k),\ k\in\mathbb{K},$$

$$A(E)\equiv\alpha(E),\ B(E)\equiv\beta(E),\ E\in\omega^+\cup\sigma^+.$$

Из (2.6) получаем, что

$$\left.\begin{aligned} &k(E)=i\beta(E),\ E\in\omega^+,\ \mathrm{supp}\,B=\omega^+,\\ &k(E)=\alpha(E),\ E\in\sigma^+,\ \mathrm{supp}\,A'=\sigma^+.\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Далее нам потребуется связь между производными

$$\dot{E}(k)=1/k'(E), \qquad (2.8)$$

$$\ddot{E}(k)=-(\dot{E}(k))^3\,k''(E). \qquad (2.9)$$

Из (2.7), (2.5) вытекает справедливость формулы Дирихле для функции $\beta(E)$,

$$\beta(E)=\frac{\nu}{\pi}\int_{\omega^+}|E-t|^{-2}B(t)dt,\ E\in\mathbb{E}_+.$$

Отсюда и из условий Коши-Римана следует, что

$$\beta'_\nu(E)=\alpha'_\lambda(E)=A'(E)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega^+}|E-t|^{-2}B(t)dt>0,$$

при $E\in\sigma^+$. Дифференцируя еще два раза по $E\in\sigma^+$ получаем, что

$$A''(E)=\frac{2}{\pi}\int_{\omega^+}(t-E)^{-3}B(t)dt,\ E\in\sigma^+, \tag{2.10}$$

$$A'''(E)=\frac{6}{\pi}\int_{\omega^+}(t-E)^{-4}B(t)dt>0,\ E\in\sigma^+. \tag{2.11}$$

Более того производная порядка m

$$A^{(m)}(E)=\frac{m!}{\pi}\int_{\omega^+}(t-E)^{-m-1}B(t)dt,\ E\in\sigma^+. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что $A^{(2m+1)}(E)>0,\ E\in\sigma^+,\ m\geqslant 1$. Если E принадлежит полубесконечной зоне (в конечнозонном случае) σ^+_N, то $A^{(2m)}(E)<0$.

Далее нам потребуются некоторые свойства $\dot{E}$, $\ddot{E}$ из [1] при $n=1,2,\ldots,$

$$\dot{E}(\kappa(E))>0,\ E\in\sigma^+,\ E\neq s_n, \tag{2.13}$$

$$\dot{E}(\kappa(s_n))=0. \tag{2.14}$$

$$\ddot{E}(\kappa(s_{2n}))<0,\ \ddot{E}(\kappa(s_{2n-1}))>0. \tag{2.15}$$

Из (2.13), (2.15), (2.9) следует, что при $E\in\sigma^+_n,\ n=1,2,\ldots$

$$\left.\begin{aligned} &A''(E)\to-\infty,\ E\downarrow s_{2n-1},\\ &A''(E)\to\infty,\ E\uparrow s_{2n}.\end{aligned}\right\}. \tag{2.16}$$

Отсюда и из (2.11) получаем, что у функции $\kappa''(E)$ существует нуль μ_n строго в σ^+_n. Аналогичным образом доказывается, что у функции $\kappa^{(2m)}(E)$, $E\in\sigma^+_n$, существует один нуль, лежащий строго в σ^+_n. Для гармонической функции $\alpha'_\lambda(E)$ справедлива формула Дирихле

$$\alpha'_\lambda(E)=\frac{\nu}{\pi}\int_{\sigma^+}|E-t|^{-2}A'(t)dt,\ E\in\mathbb{E}_+. \tag{2.17}$$

Дифференцируя по ν и используя условие Коши-Римана получаем, что

$$\alpha''_{\lambda\nu}(E) = -\beta''_{\lambda\lambda}(E) = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma^+} (t-E)^{-2} A'(t)\,dt > 0, \tag{2.18}$$

при $E \in \omega^+$, т.к. $A'(E) = \dot{E}(\kappa)^{-1} > 0$. Дифференцируя (2.18) любое число раз имеем, что

$$B^{(m)}(E) = -\frac{(m-1)!}{\pi}\int_{\sigma^+} (t-E)^{-m} A'(t)\,dt,\ E \in \omega^+. \tag{2.19}$$

Из (2.19) вытекает в частности, что $B^{(2m)}(E) < 0,\ E \in \omega^+$. Рассмотрим нечетное m. Если $E \in \omega_0^+$, то $B^{(m)}(E) < 0$. Пусть $E \in \omega_n^+,\ n \geq 1$. Далее потребуются свойства функции Ляпунова (см. напр. [5])

$$F^2(s_n) = 1,\ F^2(\xi_n) > 1,\ F'(\xi_n) = 0,\ F''(\xi_n) \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

Отсюда и из (2.2), (2.3) следует, что

$$K'(E) = \frac{ic}{\sqrt{E - s_{2n}}} + \ldots,\ E \in \omega_n^+,\ E \longrightarrow s_{2n}. \tag{2.21}$$

$$K'(E) = \frac{-ic_1}{\sqrt{s_{2n+1} - E}} + \ldots,\ E \in \omega_n^+,\ E \longrightarrow s_{2n+1}, \tag{2.22}$$

для некоторых $c,\ c_1 > 0$. Из (2.21), (2.22) получаем, что

$$B'(E) \longrightarrow \infty,\ E \in \omega_n^+,\ E \longrightarrow s_{2n},$$

$$B'(E) \longrightarrow -\infty,\ E \in \omega_n^+,\ E \longrightarrow s_{2n+1}.$$

Отсюда и из того, что $B''(E) < 0,\ E \in \omega_n^+$, получаем наличие простого нуля ξ_n у функции $B'(E),\ E \in \omega_n^+$, (этот нуль сопадает с нулем функции F'). Дифференцируя асимптотики (2.21), (2.22), $(2m-2)$ раза и используя $B^{(2m)}(E) < 0$, получаем наличие единственного простого нуля у функции $B^{(2m-1)}(E), E \in \omega_n^+$. Теорема I полностью доказана.

§ 3. О числе нулей

Из Теоремы I и из (2.9), (2.13) следует, что нули μ_n функции $K''(E), E \in \sigma_n^+$ соответствуют нулям $K_n = K(\mu_n)$

функции $\ddot{E}(k)$, лежащим строго в Δ_n. Докажем, что они однократные. Действительно, из (2.9), (2.13) и из Теоремы I получаем, что

$$\dddot{E}(k_n) = -3(\dot{E})^2 \ddot{E} k'' - \dot{E}^4 k''' \Big|_{k_n} = -\dot{E}^4 k''' \Big|_{k_n} < 0 .$$

Из (2.9), (2.13) и из п.I Теоремы I вытекает, что $\ddot{E}(k) > 0$, $k \in \Delta_N$ в случае N - зонного потенциала.

Из (2.9), (2.3) и из п.2 Теоремы I получаем, что $\ddot{E}(k) \neq 0$, $k \in \gamma_n \neq \emptyset$.

Введем функцию $f(E) = \ddot{E}(k(E))$ и целую функцию $g = F(F')^2 + F''(1-F^2)$. Из (2.2)-(2.4) видно, что $f = -g/(F')^3$. Нули функции f совпадают с нулями функции g вне множества $\{\xi(m),\ m = 1, 2, \ldots\}$.

Пусть $\xi(m) \in \sigma_n$. Выше, в этом параграфе показано, что функция f имеет на σ_n один простой нуль μ_n. Если $\xi(m) \neq \mu_n$, то функция g имеет в точке $\xi(m)$ нуль третьего порядка, что следует из аналитичности функций f и g в окрестности точки $\xi(m)$ и из свойств (2.20) функции F.

Если $\xi(m) = \mu_n$, то функция g имеет в точке $\xi(m)$ нуль четвертого порядка.

Пусть $\xi(m) = \xi_n \in \omega_n$. Согласно основным свойствам функции Ляпунова (2.20) из представления

$$f = -F/F' - F''(1-F^2)/(F')^3,$$

получаем, что функция f имеет в точке ξ_n полюс третьего порядка и функция $g(\xi_n) \neq 0$.

Найдем асимптотику функции g при $|E| \longrightarrow \infty$. Из (2.1) следует, что

$$4Eg(E) = 4E(\cos\tau + O(w))(-\sin\tau + O(w))^2 +$$
$$(-\cos\tau + \frac{\sin\tau}{\tau} + O(w))(1 - (\cos\tau + O(w))^2) = \frac{\sin\tau}{\tau} +$$
$$+ O(w),\ |E| \longrightarrow \infty,\ \text{где}\ w = \exp(|\mathrm{Im}\,\tau|)/E.$$

Окончательно получаем, что

$$(2\tau)^3 g(E) = 2\sin^3\tau + O(e^{|\mathrm{Im}\,\tau|}/\tau),\ |E| \longrightarrow \infty. \qquad (3.1)$$

Воспользуемся теперь теоремой Руше, выбрав в плоскости $E \in \mathbb{C}$ контур проходящий через точку $E = \pi^2(n + \frac{1}{2})^2$ и совпадающей с образом границы правой половины прямоугольника в плоскости τ, стороны которого параллельны координатным осям. Мы обнаружим при этом, что функция g имеет внутри данного контура то же число нулей, что и функция $(\sin\tau/\tau)^3$; последняя не имеет нуля в точке нуль и трехкратные нули в точках $(\pi m)^2$, $m=1,2,\ldots$

Общее число нулей, таким образом равно $3n$. Из асимптотики (3.I) видно, что наибольшие три нуля функции g приближенно равны $(\pi n)^2$. Отсюда следует, что число нулей f с учетом кратности, равно

$$3n-3n_1=3n_2,$$

где n_1 - число вырожденных лакун, n_2 - число невырожденных лакун. Сейчас учтем, что в каждой зоне существует только один простой нуль функции f. Из вида f следует, что если q нуль функции f, то и $\bar{q}$ тоже нуль. Следовательно, в верхней и в нижней частях имеется по n_2 нуля. Теорема II доказана.

§ 4. Доказательство равенств

Далее нам потребуется формула Иенсена (см. напр.[6]). Пусть функция $h(z)$- мероморфная в круге $|z|<R_1$, $R_1>0$, и пусть $h(0)\neq 0$. Пусть q_n - нули и t_n - полюса функции h причем нуль или полюс считается столько раз каков его порядок, $n=1,2,\ldots$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \ln|h(0)|=\int_0^{2\pi}\ln|h(Re^{i\varphi})|\,d\varphi/2\pi - \\ \sum_{|q_n|<R}\ln|R/q_n|+\sum_{|t_n|<R}\ln|R/t_n|,\ R<R_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (4.\text{I})$$

Функция $f(E)=\ddot{E}(K(E))$- мероморфная по $E\in\mathbb{C}$. Напомним, что μ_n, μ_{n1}, $\overline{\mu_{n1}}$ - нули функции f соответствующие n-й лакуне и ξ_n - полюса в n-й лакуне. В § 3 показано, что других особенностей функция f не имеет.

Введем в $\mathbb{E}$ множества для $\delta>0$

$$\mathbb{E}(\delta)=\{E\in\mathbb{E},\ |E-s(n)|\geqslant n^{\delta-1},\ n=1,2,\ldots\},$$

$$E_\delta=\{E\in\mathbb{E},\ |E-s_n|^2\geqslant|E|^{\delta-1},\ n=1,2,\ldots\}.$$

Из (2.I), (3.I) получаем асимптотику

$$f(E)=2+O(1/E),\ |E|\to\infty,\ E\in\mathbb{E}(\delta). \qquad (4.2)$$

Отметим, что в окрестностях слияния компонент $\sigma(n)$, $\sigma(n+1)$ асимптотика (4.2) также верна. Действительно, представим функцию $f(E)$ интегралом Коши, так чтобы на контуре была верна асимптотика (4.2). Отсюда сразу получим справедливость асимптотики в окрестности точек $s(2n)$, т.к.

$$f(E)=2+O(1/E),\ |E|\to\infty,\ E\in E_\delta. \qquad (4.3)$$

Применим формулу (4.I) к функции $f(z+s_1)$ и пусть радиус $R=\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$. Тогда из (4.I) и из Теоремы II получаем, что

$$\ln|f(s_1)|=\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi}+s_1)|\frac{d\varphi}{2\pi}-\sum_{|\mu_m-s_1|<R,\,|\tilde{\mu}_{m1}-s_1|<R}\ln|T_m(s_1)|.$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, используя (4.3) и то, что $f(s_1)>0$ получаем равенство

$$\ln f(s_1)=\ln 2-\sum\ln T_m(s_1).$$

Это равенство эквивалентно (I.3). Таким же образом доказываются остальные формулы в (I.3). Действительно, напишем, например, формулу Иенсена (4.I) для функции $f(z+s_{2n})$. Тогда аналогичным образом получаем, что

$$\ln|f(s_{2n})|=\ln 2-\sum\ln T_m(s_{2n}).$$

Отсюда, учитывая, что $f(s_{2n})<0$ получаем (I.3).

Литература

1. Фирсова Н.Е. Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла. - Мат.сб., 1986, т.130, № 3, с.349-385.
2. Korotyaev E.L., Firsova N.E. On the propagation of the heat in the laminated materials when $t\to\infty$. - Report of the thirteen Conference on Operator Theory. Romania, Predel, June 4-9, 1990.
3. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М. 1974.
4. Фирсова Н.Е. Об эффективной массе одномерного оператора Хилла. - Вестник ЛГУ, сер.физика, т.10, № 2, 1979, с.13-18.
5. Титчмарш Е. Разложения по собственным функциям связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.2. М. 1961.
6. Титчмарш Е. Теория функций. М. 1951.