



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев,
Полное описание решений “sin-Gordon” уравнения,
Докл. АН СССР, 1974, том 219, номер 6, 1334–1337

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.211.24.175

9 ноября 2024 г., 13:15:16



В. Е. ЗАХАРОВ, Л. А. ТАХТАДЖЯН, Л. Д. ФАДДЕЕВ

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ «SIN-GORDON» УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 25 XII 1973)

Уравнение, упомянутое в названии, имеет вид

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (1)$$

Оно встречается во многих разделах теоретической физики и прикладной математики. В частности, в форме

$$\sigma_{\xi\tau} = \sin \sigma, \quad (2)$$

где $\xi = 1/2(x+t)$, $\tau = 1/2(x-t)$, $\sigma(\xi, \tau) = u(x, t)$ оно возникает в задачах нелинейной оптики (см. (1)). В первоначальной форме оно может служить как нетривиальная модель теории поля (2-4).

Естественные граничные условия для уравнений (1) и (2) имеют вид соответственно

$$u(x, t) = 0 \pmod{2\pi}, \quad (3)$$

$|x| \rightarrow \infty$

$$u(\xi, \tau) = 0 \pmod{2\pi}, \quad (4)$$

$|\xi| \rightarrow \infty$

откуда видно, что задача (2), (4) содержит, грубо говоря, половину решений задачи (1), (4).

Рассмотрим задачу

$$J\psi_x + A\psi + \frac{1}{\lambda} H\psi = \lambda\psi, \quad (5)$$

где ψ — вектор из двух компонент, а J , H и A — матрицы 2×2 , элементы которых выражаются через решение $u(x, t)$ уравнения (1):

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} e^{iu} & 0 \\ 0 & e^{-iu} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$w = u_x + u_t$.

Из явного вида этих матриц следуют соотношения (черта — знак комплексного сопряжения)

$$\bar{A} = -A, \quad TAT = A = JAJ, \quad THT = \bar{H} = -JHJ, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Уравнение (1) в терминах матриц A и H имеет вид

$$A_t = A_x + 2[H, J], \quad H_t = -H_x + 2(AJH - HJA). \quad (8)$$

Можно проверить, что если ψ меняется со временем согласно уравнению

$$\psi_t = \psi_x - \frac{2}{\lambda} H\psi, \quad (9)$$

то оно удовлетворяет уравнению (5) при одном и том же значении параметра λ при всех t .

Уравнения (5), (8), (9) играют роль уравнений $L\psi = \lambda\psi$, $L_t = [AL]$, $\psi_t = A\psi$, возникающих в предыдущих случаях, решаемых методом обратной задачи (см. (5-7)).

Рассмотрим матрицу

$$E(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e_+(x, \lambda) & e_-(x, \lambda) \\ ie_+(x, \lambda) & -ie_-(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_+(x, \lambda) &= e^{i(\lambda - 1/16\lambda)x}, \\ e_-(x, \lambda) &= e_+(x, \lambda), \end{aligned}$$

удовлетворяющую уравнению

$$JE_x = \left(\lambda - \frac{1}{16\lambda} \right) E, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в которое уравнение (5) переходит при $|x| \rightarrow +\infty$, и соотношению

$$JE = -iES, \quad (10)$$

которое проверяется непосредственно.

Определим матричные решения F и G уравнения (5) заданием их асимптотик при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$ соответственно;

$$\begin{aligned} F(x, \lambda, t) - E(x, \lambda) &= 0(1), & x \rightarrow \infty, \\ G(x, \lambda, t) - E(x, \lambda) &= 0(1), & x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

В силу уравнения (5)

$$\det F = \det G = \det E = -i. \quad (11)$$

Матрицы F и G связаны линейным соотношением

$$G(x, \lambda, t) = F(x, \lambda, t)T(\lambda, t).$$

Вследствие (7), (10), (11) матрица $T(\lambda, t)$ удовлетворяет соотношениям

$$T(\lambda, t) = -J\bar{T}(\lambda, t)J, \quad S\bar{T}(-\lambda, t)S = T(\lambda, t), \quad \det T(\lambda, t) = 1,$$

а уравнение (9) позволяет утверждать, что

$$T(\lambda, t) = e^{i(\lambda + 1/16\lambda)tS} T(\lambda, 0) e^{-i(\lambda + 1/16\lambda)tS}.$$

Из написанных формул видно, что матрица $T(\lambda, t)$ может быть выражена через 2 комплекснозначные функции

$$T(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda, t) & b(\lambda, t) \\ -\bar{b}(\lambda, t) & a(\lambda, t) \end{pmatrix},$$

причем при всех t

$$a(-\lambda) = \bar{a}(\lambda), \quad b(-\lambda) = -\bar{b}(\lambda), \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (12)$$

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0); \quad b(\lambda, t) = \exp \left\{ 2i \left(\lambda + \frac{1}{16\lambda} \right) t \right\} b(\lambda, 0).$$

Решения F и G имеют интегральные представления (при каждом t)

$$F(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_x^\infty K_1(x, y) E(y, \lambda) dy + \frac{1}{\lambda} \int_x^\infty K_2(x, y) E(y, \lambda) dy, \quad (13)$$

$$G(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x L_1(x, y) E(y, \lambda) dy + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^x L_2(x, y) E(y, \lambda) dy, \quad (13')$$

где матрицы-ядра K_1, K_2 удовлетворяют соотношениям

$$K_1 = -J\bar{K}_1J = T\bar{K}_1T, \quad K_2 = -J\bar{K}_2J = -T\bar{K}_2T$$

и, таким образом, могут быть представлены через скалярные ядра в виде

$$K_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{pmatrix}, \quad K_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & N \\ \bar{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные соотношения и представления имеют место и для матриц-ядер L_1 и L_2 .

Среди условий совместности уравнения (5) и интегральных представлений (13), (13') имеются соотношения

$$JK_2(x, x) - 16H(x)K_2(x, x)J = H(x) - 1/16J.$$

Аналогичные соотношения имеются и для матриц-ядер L_1 и L_2 . Из последнего соотношения следует, в частности, что $u(x, t)$ явно выражается через $N(x, x, t)$

$$u(x, t) = -i \ln \frac{1 + 16i\bar{N}(x, x, t)}{1 - 16iN(x, x, t)}. \quad (14)$$

Из (13) и (13') следует, что первый столбец f_1 матрицы F и второй столбец g_2 матрицы G имеют аналитическое продолжение и верхнюю полуплоскость переменной λ , а дополнительные столбцы продолжаются в нижнюю полуплоскость. Коэффициент перехода $a(\lambda)$ явно выражается через $f_1(x, \lambda)$ и $g_2(x, \lambda)$:

$$a(\lambda) = (Jf_1(x, \lambda), g_2(x, \lambda))$$

и, таким образом, также продолжается в верхнюю полуплоскость. Последнее условие вместе с (12) позволяет восстановить его по заданному $b(\lambda)$ и распределению нулей в верхней полуплоскости. Эти нули располагаются симметрично относительно мнимой оси, и, вообще говоря, могут накапливаться к вещественной оси. В дальнейшем мы будем исключать последнюю возможность и для простоты будем считать, что эти нули простые; случай кратных нулей можно рассмотреть предельным переходом.

Данные рассеяния, однозначно определяющие коэффициенты w и u уравнения (5), состоят из набора коэффициентов перехода $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и нормирующих множителей m_j , расположенных симметрично относительно мнимой оси, где j пробегает множество нулей коэффициента $a(\lambda)$. Зависимость $b(\lambda, t)$ от t дается формулой (12), а для m_j нетрудно получить, используя (9), что

$$m_j(t) = \exp \left\{ 2i \left(\lambda_j + \frac{1}{16\lambda_j} \right) t \right\} m_j(0), \quad j=1, \dots, N, \quad (15)$$

где λ_j — нули коэффициента $a(\lambda)$.

Формализм обратной задачи позволяет восстановить ядра K_1 и K_2 , а с ними и решение $u(x, t)$ уравнения (1) по данным рассеяния посредством линейных интегральных уравнений. Приведем вид этих уравнений в терминах скалярных ядер $M(x, y)$ и $N(x, y)$

$$M(x, y) + F_1(x+y) + \int_x^\infty M(x, z)F_1(z+y)dz + \int_x^\infty N(x, z)F_2(z+y)dz = 0, \quad (16)$$

$$16N(x, y) - F_2(x+y) - \int_x^\infty M(x, z)F_2(z+y)dz + \int_x^\infty N(x, z)F_3(z+y)dz = 0,$$

где ядра F_1 , F_2 и F_3 строятся через данные рассеяния по формулам

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r(\lambda) e^{i(\lambda-1/16\lambda)z} d\lambda + \sum_{j=1}^N m_j e^{i(\lambda_j-1/16\lambda_j)z}, \\ F_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda)}{\lambda} e^{i(\lambda-1/16\lambda)z} d\lambda + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\lambda_j} e^{i(\lambda_j-1/16\lambda_j)z}, \\ F_3(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda)}{\lambda^2} e^{i(\lambda-1/16\lambda)z} d\lambda + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\lambda_j^2} e^{i(\lambda_j-1/16\lambda_j)z} \end{aligned} \quad (17)$$

и $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, а зависимость ядер F_1, F_2 и F_3 от t определяется формулами (12), (15).

Приведем сразу выражение для решения $u(x, t)$ уравнения (1): при $b(\lambda, t) = 0$

$$u(x, t) = -2i \ln \frac{\det(I+V(x, t))}{\det(I-V(x, t))}, \quad (18)$$

где $V(x, t)$ — матрица $N \times N$ с элементами

$$V_{jk}(x, t) = \frac{im_j}{\lambda_j + \lambda_k} e^{i(\mu_j + \mu_k)x + i(\lambda_j + 1/16\lambda_j)t}, \quad (19)$$

$$\mu_j = \lambda_j - \frac{1}{16\lambda_j}.$$

В частности, при $N=1$ получим известную формулу для решения уравнения (1):

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x-vt-x_0)}, \quad (20)$$

$$v = \frac{1-16a_1^2}{1+16a_1^2}, \quad \lambda_1 = -ia_1, \quad x_0 = \ln \frac{|m_1|}{2a_1} \sqrt{1-v^2},$$

а знак в (20) противоположен знаку m_1 .

Полученное решение естественно называть солитоном для (1) уравнения.

В случае $N=2$ и $\lambda_1 = -\lambda_2^*$, получим, что

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{|c_1| \operatorname{ch} \left[\frac{a_1}{|\lambda_1|} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (x-vt-\gamma_0) \right]}{a_1 \cos \frac{c_1}{|\lambda_1|} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (t-vx+\beta_0)} \right\},$$

$$v = \frac{1-16|\lambda_1|^2}{1+16|\lambda_1|^2}, \quad \lambda_1 = c+ia_1,$$

$$\beta_0 = \frac{|\lambda_1|}{c_1} \sqrt{1-v^2} \operatorname{arg} \frac{m_1}{\lambda_1}, \quad \gamma_0 = \frac{|\lambda_1|}{a_1} \sqrt{1-v^2} \ln \left| \frac{c_1 m_1}{2a_1 \lambda_1} \right|.$$

Полученное решение мы будем называть двойным солитоном для «sin-Gordon» уравнения. Решение уравнения (1), определяемое формулой (18), естественно называть N -солитонным решением «sin-Gordon» уравнения. Оказывается, что в общем случае N -солитонные решения при больших $|t|$ распадаются на l солитонов и p двойных солитонов, где $l+2p=N$; здесь l — количество чисел λ_i , лежащих на мнимой оси, а p — количество расположенных симметрично относительно мнимой оси пар чисел $(\lambda_j, -\lambda_j)$. Отметим, что, таким образом, N -солитонное решение описывает процесс упругого рассеяния солитонов и двойных солитонов.

Укажем, наконец, что, отправляясь от развитой схемы, можно показать, что «sin-Gordon» уравнение является вполне интегрируемой гамильтоновой системой (ср. (8)).

Новосибирский государственный университет

Поступило
6 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. L. Lamb jr., Rev. Mod. Phys., v. 43, № 2, 99 (1971). ² T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A, v. 262, 237 (1971). ³ J. K. Perring, T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys., v. 31, 55 (1962). ⁴ D. Finkelstein, C. V. Misner, Ann. Phys. (N. Y.), v. 6, 230 (1959). ⁵ G. S. Gardner, J. Green et al., Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095 (1967). ⁶ П. Д. Лэкс, Сборн. Математика, т. 13, № 6, 128 (1969). ⁷ В. Е. Захаров, А. Б. Шафар, ЖЭТФ, т. 61, 118 (1971). ⁸ В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Функциональн. анализ и его прилож., т. 5, 4, 18 (1971).