Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

E. A. Bakin, G. S. Evseev, Remark on “On the capacity of a multiple-access vector adder channel” by A. A. Frolov and V. V. Zyablov,
Probl. Peredachi Inf., 2016, Volume 52, Issue 1, 3–7

https://www.mathnet.ru/eng/ppi2192

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.82
December 17, 2025, 09:03:14

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 52 2016 Вып. 1

УДК 621.391.1

© 2016 г. **Е.А. Бакин, Г.С. Евсеев**

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ А.А. ФРОЛОВА И В.В. ЗЯБЛОВА "О ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ВЕКТОРНОГО СУММИРУЮЩЕГО КАНАЛА"

Для векторного суммирующего канала приводится верхняя граница для пропускной способности, совпадающая с нижней границей, указанной в [1]. Таким образом, доказывается оптимальность равномерного распределения вероятности символов при $\gamma \in (0, \gamma^*]$ и перекошенного распределения при $\gamma \in (\gamma^*, \infty)$, где γ – отношение числа абонентов к количеству подканалов, а $\gamma^* = 1{,}3382$.

§ 1. Введение

В работе [1] исследовалась модель векторного суммирующего канала, предложенная в работе [2]. Согласно данной модели в системе одновременно передают данные S пользователей. Система работает в дискретном времени. В каждый момент каждый пользователь передает в канал множественного доступа Q-ичный символ. В канале сигналы от разных абонентов складываются таким образом, что на приемной стороне можно однозначно определить, сколько абонентов передали тот или иной символ. Такая модель описывает, например, случай, когда ресурсы канала разделены на Q подканалов ("частот"), а передача символа осуществляется путем формирования сигнала нормированной энергии в одном из подканалов. Тогда при когерентном сложении и отсутствии в канале замираний и аддитивного шума на приемной стороне можно достоверно определить, сколько сигналов присутствует на той или иной "частоте".

Отдельно выделяется случай *некоординированной передачи*, при которой распределения вероятностей передачи символов одинаковы для всех пользователей системы и не изменяются во времени. Показано, что взаимная информация между входным и выходным ансамблями сообщений в канале может быть получена из следующего выражения:

$$I(X;Y) = \sum_{j=1}^{Q} F_S(p_j),$$

где $F_S(p) = p \sum\limits_{i=0}^{S-1} \binom{S-1}{i} p^i (1-p)^{S-1-i} \log_2\left(\frac{i+1}{Sp}\right)$, а p_j – вероятность передачи пользователем j-го символа, $j = \overline{1, Q}$.

Основное внимание в работе [1] уделяется исследованию асимптотики вида $Q \to \infty$, $S = \gamma Q$, $0 < \gamma < \infty$. Для этого случая приводится следующая оценка для суммарной пропускной способности в расчете на один подканал:

$$C(\gamma) = \lim_{\substack{S=\gamma Q \\ Q\to\infty}} \frac{1}{Q} S \max I(X;Y) \geqslant \begin{cases} C_{\text{unif}}(\gamma) & \text{при } 0 < \gamma \leqslant \gamma^*, \\ C_* & \text{при } \gamma > \gamma^*. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $C_{\text{unif}}(\gamma) = \gamma \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma} \log_2\Big(\frac{i+1}{\gamma}\Big)$ – нижняя граница, обеспечиваемая при равномерном распределении вероятностей по подканалам ($p_1 = \ldots = p_Q = 1/Q$), $C_* = \max\limits_{\gamma>0} C_{\text{unif}}(\gamma) = 0{,}8371$, $\gamma^* = \arg\max\limits_{\gamma>0} C_{\text{unif}}(\gamma) = 1{,}3382$. Нижняя граница пропускной способности для случая $\gamma > \gamma^*$ обеспечивается при выборе перекошенного распределения, для которого $p_1 = \ldots = p_{Q-1} = \gamma^*/S$, а $p_Q = 1 - (Q-1)\gamma^*/S$.

Далее проведем отдельный анализ функций $F_S(p)$ и покажем, что правая часть выражения (1) определяет асимптотическую пропускную способность векторного суммирующего канала.

§ 2. Предварительный анализ

В этом параграфе сформулированы две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть на интервале* $[0,1]$ *задана функция* $f(x)$, *такая что*

- *Все производные функции до некоторого порядка* n *имеют разные знаки в точках* 0 *и* 1, *причем знаки производных в этих точках чередуются, т.е.* $\operatorname{sign} f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}$, $\operatorname{sign} f^{(k)}(1) = (-1)^k$, $k = \overline{1,n}$;
- *Производная порядка* n *имеет единственный корень.*

Тогда для $k = \overline{1, n-1}$ *функции* $f^{(k)}(x)$ *имеют единственный экстремум в точке* x_k *и единственный корень в точке* y_k, *причем* $y_k < x_k$ $(x_{k-1} = y_k)$.

Доказательство. Покажем, что это утверждение верно для $k = n-1$. Не уменьшая общности, будем полагать, что $f^{(n)}(0) > 0$, $f^{(n)}(1) < 0$, и в силу единственности корня функции $f^{(n)}(x)$ функция $f^{(n-1)}(x)$ содержит единственную стационарную точку x_{n-1}, являющуюся точкой максимума. Так как на интервале $(x_{n-1}, 1]$ функция $f^{(n-1)}(x)$ убывает, а $f^{(n-1)}(1) > 0$, то $f^{(n-1)}(x_{n-1}) > 0$. Далее, так как на интервале $[0, x_{n-1})$ функция $f^{(n-1)}(x)$ монотонно возрастает, а $f^{(n-1)}(0) < 0$, то $f^{(n-1)}(x)$ содержит единственный корень на этом интервале. Дальнейшее доказательство по индукции очевидно. ▲

Следствие. *Функция* $f(x)$, *соответствующая условиям леммы* 1, *обладает следующими дополнительными свойствами*:

1. *Функция* $f(x)$ *содержит единственную стационарную точку* x^* *на интервале* $[0,1]$, *причем эта точка является максимумом функции*;
2. *Функция* $f(x)$ *является вогнутой на интервале* $[0, x^*]$.

Лемма 2. *Для любого* $S \geqslant 2$ *функция* $F_S(p)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1.

Доказательство. Для упрощения доказательства введем следующее удобное представление для функции $F_S(p)$, воспользовавшись интегралом Фруллани [3]:

$$F_S(p) = \frac{p}{\ln(2)} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-x}(1 - p + pe^{-x})^{S-1}}{x} dx - \frac{p}{\ln(2)} \ln(Sp). \tag{2}$$

При проведении доказательства опустим незначащий в данном случае множитель $\frac{1}{\ln(2)}$ в формуле (2). Выпишем в явном виде выражение для k-й производной $F_S(p)$, $2 \leqslant k \leqslant S-1$:

$$F_S^{(k)}(p) = (-1)^{k+1} p \frac{(S-1)!}{(S-1-k)!} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}(1-p+pe^{-x})^{S-k-1}(1-e^{-x})^k}{x} dx +$$

$$+ k(-1)^k \frac{(S-1)!}{(S-k)!} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}(1-p+pe^{-x})^{S-k}(1-e^{-x})^{k-1}}{x} dx + (-1)^{k+1} \frac{(k-2)!}{p^{k-1}}. \quad (3)$$

Так как при $p \to 0$ первые два слагаемых в данном выражении ограничены, а модуль третьего стремится к бесконечности, то $\operatorname{sign} F_S^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}$.

При $p = 1$ имеем

$$F_S^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} \frac{(S-1)!}{(S-1-k)!} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x(S-k)}(1-e^{-x})^k}{x} dx +$$

$$+ k(-1)^k \frac{(S-1)!}{(S-k)!} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x(S-k+1)}(1-e^{-x})^{k-1}}{x} dx + (-1)^{k+1}(k-2)!.$$

Вынося за скобки общие сомножители и перегруппировывая слагаемые, получаем

$$F_S^{(k)}(1) = (-1)^k (k-2)! \left[\frac{(S-1)!}{(S-k)!(k-2)!} \left(k \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x(S-k+1)}(1-e^{-x})^{k-1}}{x} dx - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (S-k) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x(S-k)}(1-e^{-x})^k}{x} dx \right) - 1 \right].$$

Для доказательства того, что $\operatorname{sign} F_S^{(k)}(1) = (-1)^k$, необходимо доказать, что выражение в квадратных скобках положительно. Воспользовавшись табличным интегралом (3.411.19) из [4], получим

$$k \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x(S-k+1)}(1-e^{-x})^{k-1}}{x} dx - (S-k) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x(S-k)}(1-e^{-x})^k}{x} dx =$$

$$= k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \ln(S-j) + (S-k) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \ln(S-j) =$$

$$= S \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{j}{S}\right) \ln(S-j).$$

Таким образом,

$$F_S^{(k)}(1) = (-1)^k (k-2)! \left[\frac{S!}{(S-k)!(k-2)!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{j}{S}\right) \ln(S-j) - 1 \right].$$

Рассмотрим отдельно сумму в данном выражении. Из формулы (0.154) в [4] следует, что

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{j}{S}\right) \ln(S-j) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{j}{S}\right) \ln\left(1 - \frac{j}{S}\right).$$

После разложения логарифма в ряд Тейлора и повторного применения формулы (0.154) из [4] получаем

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\Big(1-\frac{j}{S}\Big)\ln\Big(1-\frac{j}{S}\Big)=-\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\Big(1-\frac{j}{S}\Big)\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t}\Big(\frac{j}{S}\Big)^{t}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t(t+1)}\Big(\frac{j}{S}\Big)^{t+1}=k!\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t(t+1)S^{t+1}}\left\{{t+1 \atop k}\right\}.$$

Здесь $\left\{{n \atop k}\right\}$ обозначает число Стирлинга второго рода. Учитывая, что $\left\{{n \atop k}\right\}=0$ при $n<k$ и $\left\{{n \atop k}\right\}>0$ при $n\geqslant k$, оценим сумму снизу первым ненулевым слагаемым. Тогда

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\Big(1-\frac{j}{S}\Big)\ln\Big(1-\frac{j}{S}\Big)>\frac{k!}{(S)_k},$$

где $(S)_k$ – убывающая факториальная степень. Следовательно,

$$\frac{S!}{(S-k)!\,(k-2)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\Big(1-\frac{j}{S}\Big)\ln(S-j)-1>0.$$

Таким образом, $\operatorname{sign}F_S^{(k)}(1)=(-1)^k$. Для доказательства последнего условия леммы 1 выпишем выражение для производной порядка S (здесь множитель $1/\ln 2$ также опущен):

$$F_S^{(S)}(p)=(-1)^S S!\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}(1-e^{-x})^{S-1}}{x}dx+(-1)^{S+1}\frac{(S-2)!}{p^{S-1}}. \tag{4}$$

Видно, что данная функция монотонна и $\operatorname{sign}F_S^{(S)}(0)=(-1)^{S+1}$. При анализе функции в точке $p=1$ заметим, что $1-e^{-x}\geqslant xe^{-x}$ и

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}(1-e^{-x})^{S-1}}{x}dx>\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}(1-e^{-x})^{S-2}\,dx=\frac{1}{S(S-1)}.$$

Значит, первое слагаемое в (4) по модулю превосходит $(S-2)!$ и $\operatorname{sign}F_S^{(S)}(1)=$ $=(-1)^S$. ▲

§ 3. Верхняя граница для пропускной способности

Введем следующую вспомогательную функцию:

$$\widehat{F}_S(p)=\begin{cases}F_S(p) & \text{при } 0\leqslant p\leqslant p_S^*,\\ F_S(p_S^*) & \text{при } p>p_S^*,\end{cases} \tag{5}$$

где $p_S^*=\arg\max\limits_{p\in[0,1]}F_S(p)$. По следствию из леммы 1 функция $\widehat{F}_S(p)$ является вогнутой на всем интервале $p\in[0,1]$. Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{Q}F_S(p_j)\leqslant\sum_{j=1}^{Q}\widehat{F}_S(p_j). \tag{6}$$

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема. *Правая часть неравенства* (1) *определяет пропускную способность векторного суммирующего канала.*

Доказательство. Из выражения (6), свойства вогнутости функции $\widehat{F}_S(p)$ и неравенства Йенсена следует, что

$$C(\gamma) \leqslant \lim_{\substack{S=\gamma Q \\ Q\to\infty}} \max S \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \widehat{F}_S(p_j) \leqslant \lim_{\substack{S=\gamma Q \\ Q\to\infty}} S\widehat{F}_S\Big(\frac{1}{Q}\Big). \tag{7}$$

Предельный переход при $Q \to \infty$ дает в точности выражение из правой части неравенства (1). Применение теоремы о пределе промежуточной функции довершает доказательство. ▲

В заключение можно отметить тот интересный факт, что пара “равномерное распределение/перекошенное распределение” для векторного суммирующего канала является асимптотически оптимальной, так же как и для векторного дизъюнктивного канала [5]. При этом пропускная способность достигает максимального значения, равного 0,837, при $\gamma \geqslant 1{,}3382$.

Авторы выражают свою искреннюю признательность участникам математического интернет-сообщества `dxdy.ru` и лично Александру Супову за ценные советы при подготовке данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фролов А.А., Зяблов В.В.* О пропускной способности многопользовательского векторного суммирующего канала // Пробл. передачи информ. 2014. Т. 50. № 2. С. 20–30.
2. *Chang S.C., Wolf J.K.* On the T-User M-Frequency Noiseless Multiple-Access Channels with and without Intensity Information // IEEE Trans. Inform. Theory. 1981. V. 27. № 1. P. 41–48.
3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
4. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. Amsterdam: Academic Press, 2007.
5. *Гобер П., Хан Винк А.* Замечание к статье Л. Вильхельмссона и К.Ш. Зигангирова “Об асимптотической пропускной способности одного многопользовательского канала” // Пробл. передачи информ. 2000. Т. 36. № 1. С. 21–25.

Бакин Евгений Александрович
Евсеев Григорий Сергеевич
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
`jenyb@vu.spb.ru`
`egs@vu.spb.ru`

Поступила в редакцию
30.04.2015
После переработки
09.09.2015