И. П. Смирнов, Об оптимальном управлении линейной системой стохастических дифференциальных уравнений с квадратичным критерием качества, *Дифференц. уравнения*, 1982, том 18, номер 4, 607–614

4. Gamkrelidze R. V., Haratishivili G. L. A differential game of evasion with nonlinear control.—SIAM J. Control, 1974, vol. 12, N 2.
5. Никольский М. С. Некоторые задачи теории дифференциальных игр преследования—убегания.— Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— М., 1977.
6. Мищенко Е. Ф., Сатимов Н. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 10.
7. Сатимов Н. Об одном способе уклонения от встречи в дифференциальных играх.— Мат. сб., 1976, т. 99(141), вып. 3.
8. Сатимов Н. Нелинейная дифференциальная игра убегания.— Мат. заметки, 1977, т. 21, вып. 3.
9. Сатимов Н. О задаче убегания в линейных дифференциальных играх.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 6.
10. Сатимов Н. Задача убегания в нелинейных дифференциальных играх, близких к линейным.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 5.
11. Азимов А. Я. Линейная дифференциальная игра убегания с интегральными ограничениями.— ЖВМ и МФ, 1974, № 6.
12. Мезенцев А. В. Достаточные условия убегания для линейных игр с интегральными ограничениями.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5.
13. Гусятников П. Б., Мезенцев А. В. Дифференциальная игра убегания с интегральными ограничениями.— Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 3.
14. Сатимов Н., Рихсиев Б. Б. О квазилинейных дифференциальных играх убегания.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 6.

Институт математики АН УзССР

Поступила в редакцию 11 марта 1979 г.

УДК 517.977.55

И. П. СМИРНОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$d\eta=(A(t)\eta+B(t)a+f(t))\,dt+\sum_{j=1}^{m}(R^{(j)}(t)\eta+E^{(j)}(t)b+g^{(j)}(t))dw_j(t), \quad (1)$$

$$\eta(t_0)=\eta_0,\ t_0\leqslant t\leqslant 1,$$

где η — n-мерный фазовый вектор, a, b — управляющие векторные параметры. Пусть критерием качества управления служит величина функционала

$$J(t_0,\ \eta_0;\ u)=M\int_{t_0}^{1}(\eta_u'C\eta_u+a'D_aa+b'D_bb)\,ds, \quad (2)$$

где $\eta_u(s)$ — решение уравнения (1), отвечающее управлению $u(s)\equiv\equiv(a(s),\ b(s))$ (штрих означает транспонирование), и требуется минимизировать функционал (2) на заданном классе допустимых управлений.

Задачам оптимизации линейных управляемых систем с квадратичными критериями качества посвящено значительное число работ (см., например, [1—9]). При управлении по полным данным подобные задачи обычно исследуются методами динамического программирования [1—3; 8, 9]; в случае неполной информации применяется редукция к вспомогательным задачам управления по полным данным [4, 8].

Для исследования задач управления по неполным данным, задач со случайными коэффициентами и т. д. удобными оказываются также методы стохастического принципа максимума [5—7, 10—13], позволяющие в ряде случаев получить решение, не прибегая к построению вспомогательных задач (см. [5—7]). В настоящей работе критерий оптимальности в форме локального стохастического принципа максимума применяется для решения двух задач оптимального управления системой (1) — задачи программного управления и задачи управления по полным данным.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство; $w(t, \omega) \equiv \{w_1(t, \omega), \ldots, w_m(t, \omega)\}$, $t \in [0, 1]$, $\omega \in \Omega$ — m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\{\mathcal{F}_t\}$ — порождаемый этим процессом поток σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Через $M\xi$ и $M\{\xi | \mathcal{A}\}$ будем обозначать соответственно безусловное и условное по отношению к σ-алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ математические ожидания случайной величины $\xi(\omega)$ по вероятности P.

Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим требованиям: $A(t)$, $R^{(j)}(t)$, $B(t)$, $E^{(j)}(t)$, $j=1, 2, \ldots, m$,— матрицы размера $n \times n$, $n \times n$, $n \times n_a$, $n \times n_b$ соответственно с детерминированными (т. е. не зависящими от случая ω), борелевскими компонентами; компоненты матрицы $A(t)$ суммируемы по мере Лебега, матриц $R^{(j)}(t)$ суммируемы с квадратом, а матриц $B(t)$, $E^{(j)}(t)$ равномерно ограничены при $t \in [0, 1]$; $f(t)$, $g^{(j)}(t)$ — n-мерные вектор-функции с детерминированными, суммируемыми и соответственно суммируемыми с квадратом на $[0, 1]$ компонентами.

Матрицы $C(t)$, $D_a(t)$, $D_b(t)$ в (2) являются симметрическими и имеют соответственно размеры $n \times n$, $n_a \times n_a$, $n_b \times n_b$. Для почти всех $t \in [0, 1]$ матрицы $D_a(t)$, $D_b(t)$ положительно, а матрицы $C(t)$ неотрицательно определены. Компоненты этих матриц, а также компоненты матриц $D_a^{-1}(t)$, $D_b^{-1}(t)$ являются функциями детерминированными, борелевскими, равномерно ограниченными на отрезке $[0, 1]$.

Для $t_0 \in [0, 1)$ обозначим $U^a(t_0)$ гильбертово пространство прогрессивно измеримых относительно потока $\{\mathcal{F}_t\}$ случайных n_a-мерных вектор-фукций $a(t, \omega)$, $t \in [t_0, 1]$, $\omega \in \Omega$ со скалярным произведением $(a^{(1)}, a^{(2)}) = M \times \times \int_{t_0}^{1} a^{(1)\prime}(s) D_a(s) a^{(2)}(s) ds$.

Пусть $U_1^a(t_0)$ — подпространство $U^a(t_0)$, состоящее из детерминированных вектор-функций. Аналогично введем пространство $U^b(t_0)$ и его подпространство $U_1^b(t_0)$. Пусть $U(t_0) = U^a(t_0) \times U^b(t_0)$, $U_1(t_0) = U_1^a(t_0) \times U_1^b(t_0)$.

Обозначим $L_2(t)$ пространство $\mathcal{F}_t$-измеримых n-мерных случайных векторов с квадратично суммируемыми на Ω компонентами. При заданных $t_0 \in [0, 1)$, $\eta_0 \in L_2(t_0)$ рассмотрим задачи минимизации функционала $J(t_0, \eta_0; u)$ по всем $u \in U(t_0)$ (задача управления по полным данным) и по всем $u \in U_1(t_0)$ (задача программного управления). Заметим, что при принятых выше предположениях любому $u \in U(t_0)$ отвечает единственное сильное (непрерывное) решение η_u уравнения (1) [9]; при этом $0 \leqslant J(t_0, \eta_0; u) < \infty$.

§ 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Введем формальные обозначения: $Q^{(j)}(t, \Lambda) \equiv (D_b(t) + \sum_{i=1}^{m} E^{(i)\prime}(t) \times \times \Lambda E^{(i)}(t))^{-1} E^{(j)\prime}(t) \Lambda$, $S^{(ij)}(t, \Lambda) \equiv \Lambda \delta_{ij} - \Lambda E^{(i)}(t) Q^{(j)}(t, \Lambda)$, $\Gamma(t) \equiv \equiv B'(t) D_a^{-1}(t) B(t)$, где Λ — $n \times n$-матрица, δ_{ij}, i, $j = 1, 2, \ldots, m$, — символ Кронекера.

Теорема 1. *а) При любом $t_0 \in [0, 1)$ задача программного управления имеет единственное решение. Оптимальное программное управление имеет вид*

$$a(t) = D_a^{-1}(t) B'(t) p(t), \; b(t) = -\sum_{j=1}^{m} Q^{(j)}(t, \Lambda_1(t)) [R^{(j)}(t) m(t) + g^{(j)}(t)], \quad (3)$$

где симметрическая, неотрицательно определенная $n \times n$-матрица Λ_1 является единственным абсолютно непрерывным решением линейной задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\Lambda_1 + A'(t)\Lambda_1 + \Lambda_1 A(t) + C(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} R^{(j)'}(t)\Lambda_1 R^{(j)}(t) = 0, \quad \Lambda_1(1) = 0, \tag{4}$$

а (p, m) — единственное абсолютно непрерывное решение краевой задачи

$$\frac{d}{dt}p = -A'(t)p + \Big[C(t) + \sum_{i,j=1}^{m} R^{(i)'}(t)S^{(ij)}(t, \Lambda_1(t))R^{(j)}(t)\Big]m +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m} R^{(i)'}(t)S^{(ij)}(t, \Lambda_1(t))g^{(j)}(t), \ p(1) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}m = A(t)m + \Gamma(t)p + f(t), \ m(t_0) = M\eta_0.$$

б) Пусть в дополнение к условиям § 2 компоненты всех матриц в (1) ограничены на $[0, 1]$. Тогда при любом $t_0 \in [0, 1)$ задача управления по полным данным имеет единственное решение. Оптимальная пара (η, u), $\eta \equiv \eta_u$ и только она почти всюду на $[t_0, 1] \times \Omega$ удовлетворяет соотношениям

$$a(t, \omega) = -D_a^{-1}(t)B'(t)[\Lambda(t)\eta(t, \omega) + Z(t)],$$

$$b(t, \omega) = -\sum_{j=1}^{m} Q^{(j)}(t, \Lambda(t))[R^{(j)}(t)\eta(t, \omega) + g^{(j)}(t)], \tag{6}$$

где симметрическая, неотрицательно определенная $n \times n$-матрица Λ является единственным абсолютно непрерывным решением нелинейной задачи Коши

$$-\frac{d}{dt}\Lambda = A'(t)\Lambda + \Lambda A(t) - \Lambda\Gamma(t)\Lambda + C(t) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m} R^{(i)'}(t)S^{(ij)}(t, \Lambda)R^{(j)}(t), \ \Lambda(1) = 0, \tag{7}$$

а Z — единственное абсолютно непрерывное решение задачи Коши,

$$-\frac{d}{dt}Z = (A'(t) - \Lambda(t)\Gamma(t))Z + \Lambda(t)f(t) + \sum_{i,j=1}^{m} R^{(i)'}(t)S^{(ij)}(t, \Lambda(t))g^{(j)}(t)$$

$Z(1) = 0$.

§ 4. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Доказательство теоремы 1 основано на использовании следующего критерия оптимальности.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}_t \equiv \{\varnothing, \Omega\}$ ($\varnothing$ — пустое множество) в задаче программного управления и $\mathscr{A}_t \equiv \mathscr{F}_t$ в задаче управления по полным данным. Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t) = (a(t), b(t))$ в каждой из этих задач необходимо и достаточно, чтобы для него было выполнено следующее соотношение локального принципа минимума: для почти всех $t \in [t_0, 1]$ почти наверное по ω*

$$\min_{a \in \mathbf{R}^{n_a}, b \in \mathbf{R}^{n_b}} M\{H(t, a, b) \mid \mathscr{A}_t\} = M\{H(t, a(t), b(t)) \mid \mathscr{A}_t\}. \tag{8}$$

Здесь

$$H(t,\ a,\ b)=[\theta'(t)\,B(t)+a'(t)\,D_a(t)]\,a+\Big[\sum_{j=1}^{m}\varkappa'_{(j)}(t)\,E^{(j)}(t)+$$

$$+\,b'(t)\,D_b(t)\Big]b,\ \theta(t)=\Phi^{-1\prime}(t)\,M\Big\{\int_t^1\Phi'(s)\,C(s)\ \eta(s)\,ds\,|\mathscr{F}_t\Big\}, \tag{9}$$

$\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы (1), $\varkappa_{(j)}(t,\ \omega)\equiv\mu^{(j)}(t,\ t,\ \omega)$, функции $\mu^{(j)}(t,\ \tau,\ \omega)$ однозначно определены для $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant 1$ из равенств

$$\theta(t)=M\{\theta(t)\,|\,\mathscr{F}_{t_0}\}+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\mu^{(j)}(t,\ \tau,\ \omega)\,dw_j(\tau). \tag{10}$$

Отметим основные моменты доказательства теоремы 2. Используя формулу Коши [14] для решения уравнения (1), получаем явное представление функционала $J(u)$ на множестве $U(t_0)$. Нетрудно проверить теперь, что этот функционал является строго выпуклым и имеет производную $\delta J(u;\ v)$ в любой точке u пространства $U(t_0)$ по любому направлению v. Как хорошо известно (см., например, [8]), при этих условиях существует не более одной точки, в которой $J(u)$ достигает своего минимума на $U(t_0)$ $(U_1(t_0))$, и критерием оптимальности точки w является условие $\delta J(w;\ v)\geqslant 0$, $v\in U(t_0)$ $(v\in U_1(t_0))$.

Последнее условие для задачи более общего вида, чем (1), (2), получено в [10] в интегральной форме. Учитывая вид множеств допустимых управлений, в рассматриваемом случае нетрудно привести это интегральное условие к локальной форме (8). Набор функций $\{\theta,\ \varkappa_{(j)}\}$, входящих в состав «гамильтониана» H, удовлетворяет сопряженной задаче Бисмута [6, 11] в стохастических дифференциалах. Решение этой задачи для функции θ приведено в (9), а для функций $\varkappa_{(j)}$ указана их непосредственная связь (10) с функцией θ через стохастические ядра $\mu^{(j)}$, установленная в [13]. Заметим, что возможность представления функции $\theta(t)$ в виде (10) при каждом $t\in[t_0,\ 1]$ с некоторыми функциями $\mu_t^{(j)}(\tau,\ \omega)\equiv\mu^{(j)}(t,\ \tau,\ \omega)$ вытекает из известного результата Кларка [9] о представлении функционалов от винеровского процесса. В [12, 13] дополнительно показано, что эти функции могут быть выбраны измеримыми по совокупности переменных $(t,\ \tau,\ \omega)$, причем функции $\mu^{(j)}(t,\ t,\ \omega)$ при этом выборе прогрессивно измеримы относительно потока $\{\mathscr{F}_t\}$.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

1. Доказательство утверждения (б) теоремы 1 проведем в два этапа. На первом этапе покажем, что уравнение (7) имеет локальное решение, определенное на некотором интервале $(\tau_1,\ 1]$, и при $t_0\in(\tau_1,\ 1)$ существует единственное управление из $U(t_0)$, для которого выполнены соотношения (6) и которое удовлетворяет принципу минимума (8), а значит, оптимально. Используя это, докажем на втором этапе, что решение уравнения (7) может быть продолжено на весь отрезок $[0,\ 1]$.

Обозначим $\|A\|$ спектральную норму квадратной матрицы A: $\|A\|=$ $=r^{1/2}(A'A)$, где $r(B)$ — спектральный радиус матрицы B [15]. Заметим, что если матрица A имеет размеры $n\times n$, а матрица B — размеры $n\times m$, то $\|B'AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B'B\|$. Пусть $\alpha=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|D_b^{-1}(t)\|\,\|\sum\limits_{j=1}^{m}E^{(j)\prime}(t)E^{(j)}(t)\|$, S_1 — открытый шар радиуса $1/(2\alpha)$ с центром в нуле пространства $n\times n$-матриц, снабженного спектральной нормой, ∂S_1 — его граница. Нетрудно проверить, что на множестве $[0,\ 1]\times S_1$ правая часть уравнения (7) является функцией ограниченной и липшицевой по Λ равномерно относительно t. Следовательно, по теореме Каратеодори существует единственное абсолютно непрерывное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\Lambda(1)=0$, определенное на некотором интервале $(\tau_1, 1]$, где либо $\tau_1=0$, либо $\tau_1>0$ и $\Lambda(\tau_1)\equiv\lim_{t\to\tau_1}\Lambda(t)\in\partial S_1$.

Пусть $t_0\in(\tau_1, 1)$. Очевидно, что соотношение (8) эквивалентно условию $M\{H(t, a(t), b(t))|\mathscr{A}_t\}=0$, $t\in[t_0, 1]$. Следовательно, для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче управления по полным данным необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $t\in[t_0, 1]$ почти наверное выполнялись равенства

$$a(t) = -D_a^{-1}(t)\,B'(t)\,M\{\theta(t)\,|\,\mathscr{A}_t\} = -D_a(t)\,B'(t)\,\theta(t),$$

$$b(t) = -D_b^{-1}(t)\sum_{j=1}^{m} E^{(j)'}(t)\,M\{\varkappa_{(j)}(t)\,|\,\mathscr{A}_t\} = -$$

$$-D_b^{-1}(t)\sum_{j=1}^{m} E^{(j)'}(t)\,\varkappa_{(j)}(t). \tag{11}$$

Проверим, что соотношениям (6) удовлетворяет единственное управление $u(t)\in U(t_0)$, и для этого управления выполнены равенства (11). Поскольку $\|\Lambda(t)\|$, $\|Q^{(j)}(t, \Lambda(t))\|$ равномерно ограничены на $[t_0, 1]$, то, подставляя (6) в (1), получаем линейное уравнение относительно $\eta(t)$, удовлетворяющее условиям теоремы существования и единственности сильного решения [9]. Отсюда вытекает первое из сделанных утверждений; для доказательства второго — вычислим функции $\theta(t)$, $\varkappa_{(j)}(t)$, отвечающие управлению (6).

Пусть $\varphi^{(k)}(t)$ — k-ый столбец матрицы $\Phi(t)$, $X^{(k)}(t)=\varphi^{(k)}(t)\otimes\eta'(t)$, где $\otimes$ — прямое произведение матрицы [15]. Применяя формулу дифференцирования Ито, получаем из (1)

$$dX^{(k)} = (X^{(k)}\tilde{A}' + AX^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} R^{(j)}X^{(k)}\tilde{R}^{(j)'})\,dt +$$

$$+\Big\{\sum_{j=1}^{m}[(X^{(k)}\tilde{R}^{(j)'} + R^{(j)}X^{(k)} + \varphi^{(k)}\otimes\tilde{g}^{(j)'})\,dw_j + (R^{(j)}\varphi^{(k)})\otimes$$

$$\otimes\,\tilde{g}^{(j)'}\,dt] + \varphi^{(k)}\otimes\tilde{f}'dt\Big\}, \tag{12}$$

где $\tilde{A} = A - BD_a^{-1}B'\Lambda$, $\tilde{R}^{(j)} = R^{(j)} - E^{(j)}\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}(t, \Lambda)\,R^{(i)}$, $\tilde{f} = f -$ $- BD_a^{-1}B'Z$, $\tilde{g}^{(j)} = g^{(j)} - E^{(j)}\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}(t, \Lambda)\,g^{(i)}$.

Пусть $W(t)$ — — фундаментальная $n^2\times n^2$-матрица решений линейной системы $\dfrac{d}{dt}k = (I\otimes\tilde{A} + A\otimes I + R^{(j)}\otimes\tilde{R}^{(j)})\,k$.

Тогда, применяя к (12) формулу Коши, получим для матрицы $X^{(k)}$, рассматриваемой как n^2-вектор $\{X_{11}^{(k)}, \ldots, X_{1n}^{(k)}, X_{21}^{(k)}, \ldots, X_{nn}^{(k)}\}$, тождество

$$X^{(k)}(t) = W(t)\Big\{W^{-1}(t_0)\,(I^{(k)}\otimes\eta_0') + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)\,d\xi(s)\Big\},$$

где $d\xi(t)$ — стохастический дифференциал, заключенный в (12) в фигурные скобки, $I^{(k)}$ — k-й столбец единичной матрицы I.

Отсюда, используя также тождества $\Phi(t) = \Psi(t)\Big\{\Psi^{-1}(t_0) + \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\Psi^{-1}\times$

$\times R^{(j)}\Phi dw_j\Big\}$, $M\{\varphi^{(k)}(s)|\mathscr{F}_t\} = \Psi(s)\,\Psi^{-1}(t)\,\varphi^{(k)}(t)$, $s \geqslant t$, где $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\frac{d}{dt}x = Ax$, получаем при $s \geqslant t$

$$M\{X^{(k)}(s) \mid \mathscr{F}_t\} = W(s)\,W^{-1}(t)\,X^{(k)}(t) + W(s)\int_t^s W^{-1}(\tau)\Big[\sum_{j=1}^m R^{(j)}(\tau)\Psi(\tau)\times$$
$$\times\ \Psi^{-1}(t)\,\varphi^{(k)}(t) \otimes \tilde{g}^{(j)'}(\tau) + \Psi(\tau)\,\Psi^{-1}(t)\,\varphi^{(k)}(t) \otimes \tilde{f}'(\tau)\Big]d\tau.$$

Подставляя это выражение в формулу для i-ой компоненты вектор-функции $\theta(t)$ и учитывая определения матриц W, Λ, Φ и вектор-функции Z, получаем

$$\theta_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_t^1 \operatorname{Sp} C(s)\,M\{X^{(k)}(s) \mid \mathscr{F}_t\}\,ds\,(\Phi^{-1}(t))_{ki} = (\Lambda(t)\,\eta(t))_i + Z_i(t). \quad (13)$$

Из (13), далее, используя тождество

$$\eta(t) = \tilde{\Psi}(t)\Big\{\tilde{\Psi}^{-1}(t_0)\,\eta_0 + \int_{t_0}^t \tilde{\Psi}^{-1}\tilde{f}\,ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t \tilde{\Psi}^{-1}(\tilde{R}^{(j)}\eta + \tilde{g}^{(j)})\,dw_j\Big\},$$

где $\tilde{\Psi}$ — фундаментальная матрица решений системы $\frac{d}{dt}x = \tilde{A}x$, имеем

$$\varkappa_{(j)}(t) = \mu^{(j)}(t,\ t) = \Lambda(t)\,[\tilde{R}^{(j)}(t)\,\eta(t) + \tilde{g}^{(j)}(t)]. \quad (14)$$

Подставляя (14) и (13) в (11) и замечая, что $\sum_{j=1}^m D_b^{-1}(t)\,E^{(j)'}(t)\,S^{(ij)}(t,\ \Lambda(t)) \equiv Q^{(i)}(t,\ \Lambda(t))$, убедимся в том, что управление (6) действительно обращает (11) в тождества, т. е. оптимально.

Покажем, что при $\tau_1 > 0$ возможно продолжение решения уравнения (7) на весь отрезок $[0,\ 1]$. Рассмотрим тот частный случай, когда в (1) $f \equiv g^{(j)} \equiv 0$. Подставляя (6) в (1) и (2), легко получить, что в этом случае $J(t_0,\ \eta_0;\ u) = \frac{1}{2}M\eta_0'\,\Lambda(t_0)\,\eta_0$.

В частности, при неслучайном $\eta_0(\omega) \equiv x$ имеем

$$J(t_0,\ x;\ u) = \frac{1}{2}x'\Lambda(t_0)\,x. \quad (15)$$

Транспонируя уравнение (7) и учитывая единственность локального решения, убедимся в том, что $\Lambda(t) = \Lambda'(t)$ при $t \in [\tau_1,\ 1]$. Поскольку $J \geqslant 0$, то из (15) получаем, что матрица $\Lambda(t)$ неотрицательно определена для всех $t \in [\tau_1,\ 1]$.

Пусть $u^0 \equiv 0$. Имеем $u^0 \in U(t_0)$ и $J(t_0,\ x;\ u^0) = \frac{1}{2}x'N(t_0)x$, где $N(t)$ — неотрицательно определенная, непрерывная при $t \in [0,\ 1]$ матрица (которую легко найти в явном виде). Так как управление (6) оптимально, то при $t \in (\tau_1,\ 1]$ $0 \leqslant x'\Lambda(t)x \leqslant x'N(t)x$.

Переходя в этих неравенствах к пределам при $t \to \tau_1$, установим их выполнение и при $t = \tau_1$. Поэтому

$$\max_{\tau_1 \leqslant t \leqslant 1} \|\Lambda(t)\| \leqslant \max_{\tau_1 \leqslant t \leqslant 1} \|N(t)\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|N(t)\| < \infty. \quad (16)$$

Сделаем также оценку нормы матрицы $Q^{(i)}$. Имеем в силу неотрицательной определенности матрицы Λ на $[\tau_1,\ 1]$ $r\Big(D_b + \sum_{j=1}^m E^{(j)'}\Lambda E^{(j)}\Big) \geqslant$ $\geqslant r(D_b)$. Поэтому равномерно на $[\tau_1,\ 1]$

$$\left\| \left(D_b + \sum_{j=1}^{m} E^{(j)'} \Lambda E^{(j)}\right)^{-1} \right\| \leqslant \max_{\tau_1 \leqslant t \leqslant 1} r\,(D_b^{-1}(t)) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} r\,(D_b^{-1}(t)) = N_1 < \infty. \quad (17)$$

Используя полученные оценки, построим продолжение решения уравнения (7). Так как $\|D_b(t) + \sum_{j=1}^{m} E^{(j)'}(t) \Lambda(\tau_1) E^{(j)}(t)\| \geqslant \|D_b(t)\|$, то правая часть этого уравнения ограничена и удовлетворяет условию Липшица по Λ равномерно относительно t на множестве $[0, 1] \times S_2$, где $S_2 = \{\Lambda : \|\Lambda - \Lambda(\tau_1)\| < 1/(2\alpha)\}$. Следовательно, существует решение этого уравнения, проходящее через точку $(\tau_1, \Lambda(\tau_1))$, определенное на некотором интервале $(\tau_2, \tau') \ni \tau_1$ и совпадающее при $t \in [\tau_1, \tau')$ с ранее построенным решением. При этом либо $\tau_2 = 0$, либо $\tau_2 > 0$ и $\Lambda(\tau_2) \equiv \lim_{t \to \tau_2} \Lambda(t) \in \partial S_2$.

Аналогично изложенному выше показывается, что при любом $t_0 \in (\tau_2, 1)$ управление (6) является оптимальным. Но это позволяет продолжить решение уравнения (7) далее на некоторый интервал (τ_3, τ_2) и т. д.

Покажем, что на некотором этапе $\tau_n = 0$. Имеем на любом отрезке $[\tau_k, \tau_{k-1}]$ в силу (17), (16) из (7) $\left\| \frac{d}{dt} \Lambda \right\| \leqslant \left(2 \|A\| + \sum_{j=1}^{m} \|R^{(j)}\|^2\right) \|\Lambda\| +$

$$+ \left(\|\Gamma\| + N_1 \sum_{i,j=1}^{m} \|R^{(j)}\| \cdot \|E^{(j)'} E^{(i)}\| R^{(i)}\|\right) \|\Lambda\|^2 + \|C\| \leqslant N_2 < \infty.$$

Так как постоянная N_2 и радиус шара S_k не зависят от номера продолжения k, то величина шага $\tau_{k-1} - \tau_k$ равномерно ограничена снизу. Это доказывает наше утверждение.

2. Для доказательства утверждения (а) теоремы покажем, что при любом $t_0 \in [0, 1)$ задачи (4), (5) имеют единственные решения, а определяемое ими управление (3) принадлежит классу $U_1(t_0)$ и удовлетворяет соотношению принципа минимума (8).

Проверка последнего свойства управления (3) может быть выполнена по той же схеме, что и в случае (б). Доказательство существования и единственности в классе абсолютно непрерывных матричных функций решения задачи Коши (4) трудности не вызывает вследствие линейности этой задачи. Как и в п. (б), можно показать, что матрица $\Lambda_1(t)$ неотрицательно определена при любом t. Для того чтобы доказать существование и единственность решения краевой задачи (5), рассмотрим следующие три задачи Коши:

$$\frac{d}{dt} Y + A'Y + YA - Y\Gamma Y + C +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} R^{(i)'} S^{(i,j)}(t, \Lambda_1, (t)) R^{(j)} = 0, \; Y(1) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \xi + (A' - Y\Gamma) \xi + Yf +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} R^{(i)'} S^{(ij)}(t, \Lambda_1(t)) g^{(j)} = 0, \; \xi(1) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} m_1 = (A - \Gamma Y) m_1 + \Gamma \xi + f, \; m(t_0) = M\eta_0.$$

Решение первой из этих задач для матричного уравнения Риккати, а с ним и решения двух оставшихся существуют и единственны в классах абсолютно непрерывных функций [3, 8]. Но, как легко проверить непосредственной подстановкой, пара функций $m \equiv m_1$ и $p \equiv -Ym_1 + \xi$ есть решение краевой задачи (5). Сверх того, если (m, p) — некоторое решение этой задачи, то непосредственно проверяется, что функция $\xi_1 \equiv p +$

$+Ym$ является решением второй из задач (18) и, значит, совпадает с ξ. Подставляя при этом $p \equiv \xi_1 - Ym$ во второе из уравнений (5), получаем $m \equiv m_1$, $p \equiv \xi - Ym_1$, что показывает единственность решения задачи (5). Теорема 1 доказана.

Литература

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, I—IV.— Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4, с. 436—441; № 5, с. 561—568; № 6, с. 661—665; 1961, т. 22, № 4, с. 425—435.
2. Куржанский А. Б. Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой, зависящей от управления.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 2, с. 204—213.
3. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации.— М.: Советское радио, 1976.— 184 с.
4. Wonham W. M. On the separation theorem of stochastic control.— SIAM J. Control. 1968, vol. 6. N 1, p. 312—326.
5. Bismut J.-M. Controle des systemes lineaires quadratiques: applications l'integrale stochastique.— Lect. Notes Math., 1978, N 649, p. 180—264.
6. Bismut J.-M. Linear-quadratic optimal stochastic control with random coefficients.— SIAM J. Control and Optimiz., 1976, vol. 14, N 3, p. 419—444.
7. Смирнов И. П. Об оптимальном управлении динамической системой со случайными параметрами при неполной информации.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 621—628.
8. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М.: Мир, 1978.— 318 с.
9. Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы.— Киев: Наукова думка, 1977.— 251 с.
10. Морозов С. Ф., Смирнов И. П. Об одной задаче оптимального управления стохастическим процессом.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 5, с. 943—944.
11. Bismut J.-M. Conjugate convex functions in optimal stochastic control.—J. Math. Anal. and Appl., 1973, vol. 44, N 2, p. 384—404.
12. Морозов С. Ф., Смирнов И. П. Принципы минимума в задачах оптимального управления случайными процессами.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 233—244.
13. Морозов С. Ф., Смирнов И. П. Структура операторов стохастического интегрирования на пространствах суммируемых случайных функций.—М., 1980.— 28 с. Деп. в ВИНИТИ, № 397—80.
14. Садовяк А. М., Царьков Е. Ф. Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, т. 18, вып. 2, с. 415—417.
15. Ланкастер Л. С. Теория матриц — М.: Наука, 1978.— 280 с.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию 3 декабря 1980 г.

УДК 517.977

Ю. С. ЭЙДЕЛЬМАН

ОДНА ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей работе рассматривается задача линейного управления для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \ x(1) = x_1, \quad (2)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (3)$$

Здесь функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна при $t \in [0, 1]$, $x \in R^n$, $u \in R^n$ и принимает значения в пространстве R^n. $u(t)$ — линейная функция, $u(t) = a + bt$, где a и b — векторные n-мерные параметры. Доказывается, что при некоторых указанных ниже условиях существуют такие значения параметров, при которых уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям (2), (3).

При доказательстве полученных результатов используются результаты и методы, изложенные А. В. Кибенко и А. И. Перовым в [1].