П. В. Крауклис, Л. А. Молотков, Низкочастотные волны Лэмба в цилиндрических и сферических слоях, расположенных в упругой среде, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1972, том 25, 101–110

П.В.Крауклис, Л.А.Молотков

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ВОЛНЫ ЛЭМБА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В настоящей работе рассматривается распространение азимутальных волн в цилиндрической оболочке и меридианальных волн в сферической оболочке. Упомянутые волны довольно хорошо исследованы в случае свободных оболочек и в случае, когда оболочки находятся в жидкой среде [1] . В отличие от этих случаев в настоящей статье рассматриваются оболочки, окруженные упругими средами, при этом на границах среды и оболочки имеет место контакт с проскальзыванием. Выбор нежесткого контакта обусловлен тем, что при таком контакте вдоль оболочки может распространяться низкочастотная волна, скорость которой близка к скорости волны в пластине. При жестком же контакте эта волна подавляется [2] .

Волна, распространяющаяся с пластинчатой скоростью, была исследована в случае плоского слоя на упругом полупространстве [3] и в случае цилиндрической оболочки в упругой среде (распространение волн вдоль образующей [4]). Указанные исследования установили дисперсию, затухание и амплитуды рассматриваемых волн, а также показали, что процессы распространения в связанных и свободных оболочках могут существенно отличаться в области низких частот. Полученные закономерности были подтверждены экспериментально модельными исследованиями [5] . Рассмотрение процессов распространения волн вдоль образующей цилиндрической оболочки позволило теоретически изучить волны-помехи при акустическом каротаже [6] и обосновать метод определения контакта обсадной каротажной трубы с цементным кольцом [7] . Указанный практический метод позволяет по амплитуде волны судить о качестве контакта и основан на том, что при жестком контакте и контакте с проскальзыванием волновые картины различные.

В отличие от перечисленных работ, где рассматривалось движение волн по прямому пути, в настоящей статье исследуется криволинейное распространение волны. Основная цель работы состоит в изучении влияния кривизны на характеристики распространения волны (дисперсию и затухание). Для простоты не ставится задача об источнике, а определяются собственные частоты азимутальных волн в цилиндрической оболочке и меридианальных волн в сферической оболочке. Исследования проводятся в предположениях, что длина волны λ много больше толщины оболочек и много меньше их радиусов.

I. Рассмотрим собственные частоты азимутальных волн в цилиндрической оболочке и меридианальных волн в сферической оболочке. Обе оболочки будем предполагать однородными и упругими. Внутренние границы считаем свободными от напряжений. С внешней стороны обе оболочки граничат с однородными упругими средами, при этом на границе упругих сред имеет место контакт с проскальзыванием (равенство нулю тангенциальных напряжений и непрерывность нормальных смещений и напряжений).

Обе оболочки характеризуются модулем сдвига μ_0 и скоростями a_0^{-1} и b_0^{-1} распространения продольных и поперечных волн, а окружающие их среды задаются соответствующими параметрами μ_1, a_1^{-1} и b_1^{-1}. Для описания процессов в цилиндрической оболочке вводится полярная система координат r, φ, в которой оболочка и окружающая ее среда расположены в областях $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $r \geqslant r_2$. В случае сферической оболочки используется сферическая система координат r, θ и φ, при этом области оболочки и окружающей среды задаются неравенствами $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $r \geqslant r_2$.

Для определения поля смещений как обычно вводятся потенциалы: Φ_i и $\Psi_i (i=1,2)$. В случае цилиндрической оболочки последние удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \varphi^2} = a_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \varphi^2} = b_i^2 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} \qquad i=(0,1) \qquad (\text{I.I})$$

при этом значки 0 и I относятся соответственно к оболочке и окружающей среде. Составляющие u_{r_i} и u_{φ_i} вектора смещения и компоненты t^i_{rr} и $t^i_{r\varphi}$ напряжений связаны равенствами

$$u^i_r = \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi}, \qquad u^i_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_i}{\partial r},$$

$$t^i_{rr} = \lambda_i a_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + 2\mu_i\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r \partial \varphi}\right), \qquad (\text{I.2})$$

$$t^i_{r\varphi} = \mu_i\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \varphi^2}\right)$$

с потенциалами Φ_i и Ψ_i. На свободной поверхности и на границе сред выполняются граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} t^0_{rr} &= 0 \\ t^0_{r\varphi} &= 0 \end{aligned}\right\} r = r_1 \qquad \left.\begin{aligned} t^0_{rr} &= t^1_{rr}, & t^1_{r\varphi} &= 0 \\ t^0_{r\varphi} &= 0, & u^0_r &= u^1_r \end{aligned}\right\} r = r_2. \qquad (\text{I.3})$$

Решение уравнения (I.I) можно искать в виде

$$\Phi_i = X_i\, e^{i(n\theta-\omega t)}, \quad \Psi_i = Y_i\, e^{i(n\theta-\omega t)}. \tag{I.4}$$

Тогда функции X_i и Y_i будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 X_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X_i}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} - a_i^2\omega^2\right) X_i = 0\,, \\ &\frac{\partial^2 Y_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Y_i}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} - b_i^2\omega^2\right) Y_i = 0\,. \end{aligned} \tag{I.5}$$

Решения уравнений (I.5) с учетом принципа излучения имеют вид

$$\begin{aligned} &X_0 = a_0^{(1)} H_n^{(1)}(a_0\omega r) + a_0^{(2)} H_n^{(2)}(a_0\omega r), \\ &Y_0 = b_0^{(1)} H_n^{(1)}(b_0\omega r) + b_0^{(2)} H_n^{(2)}(b_0\omega r), \\ &X_1 = a_1^{(1)} H_n^{(1)}(a_1\omega r), \qquad Y_1 = b_1^{(1)} H_n^{(1)}(b_1\omega r)\,. \end{aligned} \tag{I.6}$$

Величины $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$, $a_1^{(1)}$ и $b_1^{(1)}$ определяются из граничных условий (I.3), которые после подстановки (I.2),(I.4) и (I.6) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} &T_{r\varphi 0}^{(1)}(r_1) + T_{r\varphi 0}^{(2)}(r_1) = 0, \quad T_{rr0}(r_1) + T_{rr0}(r_1) = 0, \\ &T_{r\varphi 0}^{(1)}(r_2) + T_{r\varphi 0}^{(2)}(r_2) = 0, \quad T_{r\varphi 1}^{(1)}(r_2) = 0, \\ &T_{rr0}^{(1)}(r_2) + T_{rr0}^{(2)}(r_2) = T_{rr1}^{(1)}(r_2), \\ &U_{r0}^{(1)}(r_2) + U_{r0}^{(2)}(r_2) = U_{r1}^{(1)}(r_2) \end{aligned} \tag{I.7}$$

с использованием обозначений

$$\begin{aligned} &T_{rri}^{(k)} = \left[(q_i^2 + 2n^2) H_n^{(k)}(p_i) - 2p_i H_n^{(k)\prime}(p_i)\right] a_i^{(k)} + \\ &+ 2n\left[H_n^{(k)}(q_i) - q_i H_n^{(k)\prime}(q_i)\right] b_i^{(k)}, \\ &T_{r\varphi i}^{(k)} = -2n\left[H_n^{(k)}(p_i) + p_i H_n^{(k)\prime}(p_i)\right] a_i^{(k)} - \\ &- \left[(2n^2 + q_i^2) H_n^{(k)}(q_i) + 2q_i H_n^{(k)\prime}(q_i)\right] b_i^{(k)}, \\ &U_{ri}^{(k)} = p_i H_n^{(k)\prime}(p_i) a_i^{(k)} - n H_n^{(k)}(q_i) b_i^{(k)}, \\ &p_i = a_i\omega r, \quad q_i = b_i\omega r \qquad (k = 1, 2;\ i = 0, 1). \end{aligned} \tag{I.8}$$

Система уравнений (I.7) относительно $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$, $a_1^{(1)}$ и $b_1^{(1)}$ имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю

$$\mathcal{D} = 0. \tag{I.9}$$

Уравнение (I.9) является дисперсионным уравнением в случае распространения азимутальных волн в цилиндрической оболочке, находящейся в контакте с упругой средой.

Аналогичным образом ставится и решается задача на распространение меридианальных волн в сферической оболочке. Потенциалы и в этом случае удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{ctg\,\theta}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{ctg\,\theta}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{\Psi}{r^2\sin^2\theta}=b^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{I.10}$$

и связаны с составляющими u_r и u_θ вектора смещения и компонентами t_{rr} и $t_{r\theta}$ напряжений равенствами

$$u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\Psi}{r}ctg\,\theta,$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{\Psi}{r}, \tag{I.11}$$

$$t_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right),$$

$$t_{rr}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{2\lambda}{r}u_r+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\lambda}{r}ctg\,\theta\cdot u_\theta .$$

Решение уравнений (I.10) с учетом принципа излучения ищется в виде

$$\Phi_0=P_n(\cos\theta)e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[a_0^{(1)}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(a_0\omega r)+a_0^{(2)}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(a_0\omega r)\right],$$

$$\Psi_0=P_n^1(\cos\theta)e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[b_0^{(1)}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(b_0\omega r)+b_0^{(2)}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(b_0\omega r)\right], \tag{I.12}$$

$$\Phi_1=P_n(\cos\theta)e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{r}}a_1^{(1)}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(a_1\omega r),$$

$$\Psi_1=P_n^1(\cos\theta)e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{r}}b_1^{(1)}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(b_1\omega r),$$

при этом $P_n(\cos\theta)$ и $P_n^1(\cos\theta)$ – функции Лежандра. Величины $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, b_0^{(1)}, b_0^{(2)}\, a_1^{(1)}$ и $b_1^{(1)}$ определяются из системы

$$T^{(1)}_{r\theta 0}(r_1)+T^{(2)}_{r\theta 0}(r_1)=0, \qquad T^{(1)}_{rr0}(r_1)+T^{(2)}_{rr0}(r_1)=0,$$

$$T^{(1)}_{r\theta 0}(r_2)+T^{(2)}_{r\theta 0}(r_2)=0, \qquad T^{(1)}_{r\theta 1}(r_2)=0, \tag{I.13}$$

$$T^{(1)}_{rr0}(r_2)+T^{(2)}_{rr0}(r_2)=T^{(1)}_{rr1}(r_2),$$

$$U^{(1)}_{r\theta 0}(r_2)+U^{(2)}_{r\theta 0}(r_2)=U^{(1)}_{r\theta 1}(r_2),$$

в которой введены обозначения

$$
\begin{aligned}
T^{(k)}_{rri}(r)=&\Big[\Big(\tfrac{1}{2}\bar q_i^{2}+N+1\Big)H^{(k)}_{n+\frac12}(\bar p_i)-2\bar p_i H^{(k)\prime}_{n+\frac12}(\bar p_i)\Big]a_i^{(k)}+\\
&+N\Big[\tfrac{3}{2}H^{(k)}_{n+\frac12}(\bar q_i)-\bar q_i H^{(k)\prime}_{n+\frac12}(\bar q_i)\Big]b_i^{(k)},\\
T^{(k)}_{r\theta i}=&\Big[-\tfrac{3}{2}H^{(k)}_{n+\frac12}(\bar p_i)+\bar p_i H^{(k)\prime}_{n+\frac12}(\bar p_i)\Big]a_i^{(k)}+\\
&+\Big[\Big(\tfrac{1}{2}-N-\tfrac{\bar q_i^{2}}{2}\Big)H^{(k)}_{n+\frac12}(\bar q_i)+\bar q_i H^{(k)\prime}_{n+\frac12}(\bar q_i)\Big]b_i^{(k)},\\
U^{(k)}_{ri}=&-\Big[\tfrac{1}{2}H^{(k)}_{n+\frac12}(\bar p_i)-\bar p_i H^{(k)\prime}_{n+\frac12}(\bar p_i)\Big]a_i^{(k)}-NH^{(k)}_{n+\frac12}(\bar q_i)\,b_i^{(k)},\\
\bar p_i=&\,a_i\omega r,\qquad \bar q_i=b_i\omega r,\qquad N=n(n+1).
\end{aligned}
\tag{I.14}
$$

Как и в случае цилиндрической оболочки, коэффициенты $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$, $a_1^{(1)}$ и $b_1^{(1)}$ отличны от тождественных нулей лишь при условии, когда определитель системы (I.13) обращается в нуль.

Таким образом, задача об определении собственных частот азимутальных волн в цилиндрической оболочке и меридиальных волн в сферической оболочке сводится к решению дисперсионных уравнений вида (I.9). Левые части этих уравнений являются определителями систем (I.7) и (I.13), относящихся соответственно к азимутальным и меридианальным волнам.

2. Так как приближенное вычисление определителей для обеих оболочек проводится одинаковыми методами, то остановимся подробно на случае сферической оболочки. Используя общие свойства определителей, запишем равенство

$$\mathcal{D}=A_1B_1-\sigma_{10}A_2B_2\,, \tag{2.1}$$

в котором определитель $\mathcal{D}$ шестого порядка выражается через определители A_1, A_2, B_1 и B_2 более низких порядков. При этом A_1, A_2, B_1 и B_2 являются определителями соответствующих систем

$$
\left.\begin{aligned}
T^{(1)}_{rr0}(r_1)+T^{(2)}_{rr0}(r_1)&=0\\
T^{(1)}_{r\theta0}(r_1)+T^{(2)}_{r\theta0}(r_1)&=0\\
T^{(1)}_{r\theta0}(r_2)+T^{(2)}_{r\theta0}(r_2)&=0\\
U^{(1)}_{r0}(r_2)+U^{(2)}_{r0}(r_2)&=0
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
T^{(1)}_{rr0}(r_1)+T^{(2)}_{rr0}(r_1)&=0\\
T^{(1)}_{r\theta0}(r_1)+T^{(2)}_{r\theta0}(r_1)&=0\\
T^{(1)}_{r\theta0}(r_2)+T^{(2)}_{r\theta0}(r_2)&=0\\
T^{(1)}_{rr0}(r_2)+T^{(2)}_{rr0}(r_2)&=0
\end{aligned}\right\}
\tag{2.2}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
T^{(1)}_{r\theta1}(r_2)&=0\\
T^{(1)}_{rr1}(r_2)&=0
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
T^{(1)}_{r\theta1}(r_2)&=0\\
U^{(1)}_{r1}(r_2)&=0
\end{aligned}\right\}
\tag{2.3}
$$

Вычисление величины $\mathcal{D}$ будем производить в области

$$a\omega(r_2-r_1)\ll 1\,, \tag{2.4}$$

где толщина много меньше длины волны. Для определения $\mathfrak{D}$ в нулевом приближении достаточно $A_1(r_2)$ и $A_2(r_2)$ представить приближенными равенствами

$$A_1(r_2) = A_1'(r_2)(r_2 - r_1)$$
$$A_2(r_2) = 0, \tag{2.5}$$

в которых $A_1'(r_2)$ является определителем системы

$$\begin{aligned} &T^{(1)}_{rr0}(r_2) + T^{(2)}_{rr0}(r_2) = 0, \\ &T^{(1)'}_{r\theta 0}(r_2) + T^{(2)'}_{r\theta 0}(r_2) = 0, \\ &T^{(1)}_{r\theta 0}(r_2) + T^{(2)}_{r\theta 0}(r_2) = 0, \\ &u^{(1)}_{r0}(r_2) + u^{(2)}_{r0}(r_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для вычисления определителя $A_1'(r_2)$ удобно выразить производные $T^{(\kappa)'}_{r\theta 0}(r_2)$

$$T^{(\kappa)'}_{r\theta 0}(r) = \frac{a_i^{(\kappa)}}{r}\left[(\bar{p}_i^2 + N + \tfrac{1}{2})H^{(\kappa)}_{n+\frac{1}{2}}(\bar{p}_i) - \tfrac{3}{2}\bar{p}_i H^{(\kappa)'}_{n+\frac{1}{2}}(\bar{p}_i)\right] + \frac{b_i^{(\kappa)}}{r}\left[(N + \tfrac{1}{4})H^{(\kappa)}_{n+\frac{1}{2}}(\bar{q}_i) + \bar{q}_i(\tfrac{1}{2} - N - \tfrac{\bar{q}_i^2}{2})H^{(\kappa)'}_{n+\frac{1}{2}}(\bar{q}_i)\right] \tag{2.7}$$

через функции Ханкеля и их первые производные. Из выражений для элементов определителя $A_1'(r_2)$ исключаются функции Ханкеля и их производные при использовании соотношения

$$\det A_{i\kappa} = -\frac{4}{\pi^2 xy}\det a_{i\kappa}, \tag{2.8}$$

в котором

$$\begin{aligned} A_{i1} &= a_{i1}H^{(1)}_p(x) + a_{i2}H^{(1)'}_p(x), \\ A_{i2} &= a_{i3}H^{(1)}_p(y) + a_{i4}H^{(1)'}_p(y), \\ A_{i3} &= a_{i2}H^{(2)}_p(x) + a_{i2}H^{(2)'}_p(x), \\ A_{i4} &= a_{i3}H^{(2)}_p(y) + a_{i4}H^{(2)'}_p(y) \qquad (i = 1,2,3,4). \end{aligned} \tag{2.9}$$

После этого упрощения определитель $A_1'(r_2)$ вычисляется элементарно и его выражение дается равенством

$$A_1'(r_2) = -\frac{\bar{q}_2^2}{2\pi^2\gamma_0^2}\left[\bar{q}_2^2 + 2 - 4N(1 - \gamma_0^2)\right]. \tag{2.10}$$

Вычисление величины B_1 будем производить при предположениях

$$a\omega r_2 \gg 1, \quad n \gg 1, \quad n \sim a\omega r_2, \tag{2.11}$$

которые выполняются, когда длина окружности большого круга много больше длины волны. В области (2.II) для первой функции Ханкеля и ее производной справедливы асимптотические равенства

$$
\begin{aligned}
H_p^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{p^2-x^2}}\,e^{\sqrt{n^2-p^2}-i\,n\arccos(np^{-1})}\\
H_p^{(1)\prime}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt[4]{p^2-x^2}}{x}\,e^{\sqrt{n^2-p^2}-i\,n\arccos(np^{-1})}.
\end{aligned}
\qquad (2.12)
$$

С учетом (2.12) выражение для $B_1(r_2)$ в области (2.II) задается равенством

$$
B_1(r_2) = A\left[\left(2-\frac{\bar{q}_1^2}{n^2}\right)^2 - 4\sqrt{1-\frac{\bar{p}_1^2}{n^2}}\,\sqrt{1-\frac{\bar{q}_1^2}{n^2}}\,\right], \qquad (2.13)
$$

в котором через A обозначен некоторый отличный от нуля множитель.

На основании проведенных исследований уравнение частот (I.9) имеет при условиях (2.4) и (2.II) два ненулевых решения

$$
\omega = \frac{2n\sqrt{1-\gamma_0^2}}{b_0 r_2}, \qquad (2.14)
$$

$$
\omega = \frac{n\tau}{b_0 r_2}, \qquad (2.15)
$$

в которых τ является корнем уравнения $(2-\delta_0^2\tau^2)^2-4\sqrt{1-\delta_0^2\tau^2}\sqrt{1-\gamma_1^2\delta_0^2\tau^2}=0$ в интервале $0<\tau<1$. Полученные корни (2.14)и (2.15) являются корнями дисперсионных уравнений как в случае сферической оболочки, так и в случае цилиндрической оболочки. Для перехода от собственных частот к соответствующим фазовым скоростям волн следует использовать соотношение

$$
v_\phi = \omega r_2 n^{-1}, \qquad (2.16)
$$

которое очевидно для цилиндрической оболочки и доказывается в случае сферической оболочки с использованием асимптотики

$$
P_n^\mu(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{n^{\mu+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi\cos\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right].
$$

Соответствующие (2.14) и (2.15) фазовые скорости имеют выражение

$$
v_\phi = 2b_0^{-1}\sqrt{1-\gamma_0^2} \qquad (2.17)
$$

$$
v_\phi = v_{R_1}, \qquad (2.18)
$$

при этом v_{R_1} – скорость распространения волны Рэлея в первой среде. Фазовая скорость, определяемая (2.17), совпадает со скоростью волны в свободных пластине и оболочке с упругими параметрами среды 0.

Для определения последующих приближений собственных частот и фазовых скоростей необходимо вычислить определитель B_2 и полученные выражения упростить, используя асимптотические формулы (2.12). Кроме того, нужно уточнить формулы (2.5), добавив следующие члены разложения в ряды Тейлора. Коэффициенты этого разложения в ряды Тейлора. Коэффициенты этого разложения выражаются через определители системы типа (2.6). Эти определителя вычисляются с использованием формул (2.8), (2.9), и в полученные выражения также, как и в (2.10), цилиндрические функции не входят. Указанным путем могут быть определены любые приближения для определителя $\mathcal{D}$. Из этих приближенных равенств элементарным образом устанавливаются уточненные формулы для собственных частот и фазовых скоростей. Окончательно для фазовых скоростей волн в сферической ($v_{фс}$) и цилиндрической ($v_{фц}$) оболочках можно написать следующие выражения

$$v_{фс}=2\sqrt{1-\gamma_0^2}\,b_0^{-1}\Big\{1-\frac{5-12\gamma_0^2+8\gamma_0^4}{4(1-\gamma_0^2)}\,\frac{\Delta r}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{r}-\frac{4\pi^2(1-2\gamma_0^2)^2}{6}\Big(\frac{\Delta r}{\lambda}\Big)^2+$$

$$+\frac{(3-4\gamma_0^2)^2}{4\pi}\mu_{01}\delta_0^2 i\,\frac{m^*}{n^*}\Big(\frac{\Delta r}{\lambda}\Big)\Big(\frac{\lambda}{r}\Big)^2+O\Big(\frac{\Delta r}{\lambda}\Big)^3\Big\}, \tag{2.19}$$

$$v_{фц}=2\sqrt{1-\gamma_0^2}\,b_0^{-1}\Big\{1-(1-\gamma_0^2)\frac{\Delta r}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{r}-\frac{4\pi^2(1-2\gamma_0^2)^2}{6}\Big(\frac{\Delta r}{\lambda}\Big)^2+$$

$$+\frac{(1-\gamma_0^2)^2\delta_0^2}{\pi}\mu_{01}\,i\,\frac{m^*}{n^*}\Big(\frac{\Delta r}{\lambda}\Big)\Big(\frac{\lambda}{r}\Big)^2+O\Big(\frac{\Delta r}{\lambda}\Big)^3\Big\}, \tag{2.20}$$

где введены следующие обозначения

$$\gamma_0=\frac{a_0}{b_0};\quad \gamma_1=\frac{a_1}{b_0};\quad \delta_1=\frac{b_1}{b_0};\quad \mu_{01}=\frac{\mu_0}{\mu_1}$$

$$\left.\begin{aligned} m^*&=\sqrt{4(1-\gamma_0^2)\gamma_1^2-1}\\ n^*&=(1-2\delta_1^{-2}(1-\gamma_0^2))^2-\sqrt{4(1-\gamma_0^2)\gamma_1^2-1}\sqrt{4(1-\gamma_0^2)\delta_1^2-1}\end{aligned}\right\}\text{при } 2\sqrt{1-\gamma_0^2}>\gamma_1^{-1}, \quad (a)$$

$$\left.\begin{aligned} m^*&=(1-4(1-\gamma_0^2)\gamma_1^2)\sqrt{4(1-\gamma_0^2)\delta_1^{-2}-1}\\ n^*&=(1-2\delta_1^2(1-\gamma_0^2))^4+(4(1-\gamma_0^2)\delta_1^{-2}-1)(1-\gamma_1^2 4(1-\gamma_0^2))\end{aligned}\right\}\text{при } 2\sqrt{1-\gamma_0^2}<\delta_1^{-1}. \quad (b)$$

В формулах (2.19) и (2.20) в членах порядка $\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2$ удержаны лишь мнимые части, характеризующие затухание волны.

3. При анализе формул (2.19) и (2.20) естественно рассматривать два случая соотношений между Δr , λ и r :

$$1.\ \frac{\lambda}{r} > \frac{\Delta r}{\lambda}\ ,\quad 2.\ \frac{\lambda}{r} < \frac{\Delta r}{\lambda}\ . \qquad (3.1)$$

При выполнении неравенства I основное влияние на дисперсию и затухание оказывает кривизна оболочек. Нетрудно убедиться, что в сферическом слое дисперсия сильнее, чем в цилиндрическом. Это следует из неравенства

$$5 - 12\gamma_0^2 + 8\gamma_0^4 > 4(1-\gamma_0^2)^2,$$

которое приводится к очевидному $(1-2\gamma_0^2)^2 > 0$.

При своем распространении вдоль оболочек, волна Лэмба будет затухать вследствие излучения в окружающую среду поперечной (если $\delta_1^{-1} < 2\sqrt{1-\gamma_0^2} < \gamma_1^{-1}$) или поперечной и продольной волн (если $2\sqrt{1-\gamma_0^2} > \gamma_1^{-1}$). Затухание, обусловленное излучением, можно охарактеризовать множителем

$$A = e^{-\mathcal{D}\frac{\Delta r}{r}\theta}\ ,\text{где}\ \mathcal{D} = \frac{(3-4\gamma_0^2)\mu_{01}\delta_1^2}{2}\ \frac{m^*}{n^*}\ . \qquad (3.2)$$

Функции m^* и n^* определяются формулами a и b в зависимости от соотношений между скоростями в окружающей среде и слое.

В таблице I приводятся значения $\mathcal{D}$ для некоторых параметров среды при $\gamma_0 = 0,6$ и значений плотности $\rho_1 = 2\frac{2}{см^3}$, $\rho_1 = 2.5\frac{2}{см^3}$ для сферической оболочки.

Таблица I.

δ_1	γ_1	$\mathcal{D}(\rho_1 = 2)$	$\mathcal{D}(\rho_1 = 2.5)$
4,167	2,500	11,649	9,295
3,000	1,500	6,938	5,536
1,429	0,857	4,092	3,270
1,111	0,667	3,047	2,438

Из таблицы видно, что с увеличением скоростного и плотностного перепадов коэффициент излучения растет. Для случая высокоскоростной среды, когда излучается только поперечная волна, значения коэффициентов излучения оказываются примерно на порядок меньшими. Чтобы получить значения $\mathcal{D}$ для цилиндрической оболочки и тех же параметров среды, следует значения $\mathcal{D}$ из таблицы увеличить в $C=4\left(\frac{1-\gamma^2}{3-4\gamma^2}\right)^2$ раз. Значения C для всех реальных сред меньше единицы и, следовательно, затухание в цилиндрическом слое меньше, чем в сферическом.

При выполнении неравенства $\frac{\lambda}{r}<\frac{\Delta r}{\lambda}$, т.е. для пологих оболочек, кривизна последних уже мало сказывается и основное влияние на дисперсию и затухание оказывают члены разложения, сохраняющиеся для случая плоской пластины. Дисперсия фазовой скорости пропорциональна $\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right)^2$, а затухание $\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right)^3$. Выражение для члена, характеризующего затухание и пропорционального $\left(\frac{\Delta r}{\lambda}\right)^3$, приводится в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. Москва, Из-во "Наука", 1966.
2. Молотков Л.А. О распространении низкочастотных колебаний в жидких полупространствах, разделенных упругим тонким слоем. Сб. "Вопросы дин.теории распр. сейсм.волн".Т.У. 1961.
3. Крауклис П.В., Молотков Л.А. О низкочастотных колебаниях пластины на упругом полупространстве ПММ, 1963, т.XXУП, вып.5, 947-951.
4. Молотков Л.А. Крауклис П.В. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью и помещенной в упругую среду. ПММ, 1967, т.31, № 5, 910-913.
5. Шамина О.Г. Затухание головных волн от тонких слоев при жестком и скользящем контакте. Физика Земли, 1962, № 3, 11-21.
6. Крауклис П.В., Молотков Л.А. К теории сейсмического каротажа в обсаженных скважинах. Известия АН СССР, "Физика Земли", 1968, № 9, 39-46.
7. Крауклис П.В., Булатова Ж.М. Кинематические особенности волнового поля при акустическом каротаже цементного кольца. Методика и техника разведки, 1970, сб.70, 10-13.