Д. П. Желобенко, Универсальные модули класса 0 над полупростыми алгебрами Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1980, том 14, выпуск 3, 81–82

Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 3, 1980, 81—82.

УДК 519.46

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МОДУЛИ КЛАССА 0 НАД ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Д. П. Желобенко

В заметке предложена конструкция неприводимых модулей Хариш-Чандры над полупростыми вещественными алгебрами Ли, основанная на рассмотрении универсальных модулей; при этом модуль M называется универсальным в некотором классе модулей, если каждый модуль этого класса изоморфен фактор-модулю модуля M. Принципиальным моментом является существование универсальных модулей «класса 0», обладающих простым явным описанием.

1. Определение модуля $\mathscr{P}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная вещественная алгебра Ли с разложением Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{k}$ — инволютивная подалгебра), $\mathfrak{g}_C = \mathfrak{k}_C \oplus \mathfrak{p}_C$ — ее комплексификация. Условимся говорить, что алгебра $\mathfrak{g}$ стандартна, если она обладает точным линейным представлением таким, что $aba \in \mathfrak{p}_C$ для всех $a, b \in \mathfrak{p}_C$; при этом алгебра $\mathfrak{g}$ отождествляется с данным представлением.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — стандартная алгебра Ли и ∂ — формальная матрица частных производных по переменным $x \in \mathfrak{p}_C$, определяемая таким образом, чтобы* $\operatorname{tr}(a\partial)\, x = a$ *для каждого $a \in \mathfrak{p}_C$. Тогда операторы*

$$T_y = \operatorname{tr}(xy) - \operatorname{tr}(x\partial y\partial), \qquad y \in \mathfrak{p}_C,$$
$$T_u = \operatorname{tr}([u,x]\partial), \qquad u \in \mathfrak{k}_C,$$

образуют представление алгебры $\mathfrak{g}_C$.

Доказательство сводится к явной проверке, причем условие стандартности приводит к равенству $[B_y, B_z] = 0$, где B_y — второе слагаемое оператора T_y. Легко проверить, что полупростые алгебры Ли классического типа либо стандартны (например, $\mathfrak{so}(p, q)$), либо обладают стандартным центральным расширением $\tilde{\mathfrak{g}}$ (например, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$) с разложением Картана $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \tilde{\mathfrak{p}}$.

В дальнейшем предполагается, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли классического типа. Символом $\mathscr{P}$ обозначается алгебра всех полиномов над векторным пространством $\tilde{\mathfrak{p}}_C$. Пространство $\mathscr{P}$ рассматривается как $\mathfrak{g}_C$-модуль относительно операторов T_y, T_u. Заметим, что действие подалгебры $\mathfrak{k}_C$ сопряжено каноническому действию $\mathfrak{k}_C$ в $\tilde{\mathfrak{p}}_C$.

2. Универсальность модуля $\mathscr{P}$. Категорию $\mathfrak{g}$-модулей мы отождествляем, как обычно, с категорией $U(\mathfrak{g})$-модулей, где $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. $U(\mathfrak{g})$-модуль V называется *модулем класса* 0, если он порождается вектором e_0 таким, что $\mathfrak{k}e_0 = 0$. Каждый модуль класса 0 есть прямая сумма примарных $\mathfrak{k}$-подмодулей. В частности, $\mathscr{P}$ является модулем класса 0 с порождающим вектором $\varphi_0(x) \equiv 1$.

Модуль V условимся называть *центральным, типа* ε, если $z\xi = \varepsilon(z)\xi$ для всех $\xi \in V$, $z \in Z(\mathfrak{g})$, где $Z(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $U(\mathfrak{g})$, ε — характер алгебры $Z(\mathfrak{g})$. Если V — центральный модуль класса 0, то каждое неприводимое представление δ алгебры $\mathfrak{k}$ содержится в нем с кратностью $n(V, \delta) \leqslant n(\delta)$, причем константы $n(\delta)$ можно определить таким образом, чтобы $n(V, \delta) = n(\delta)$ для характеров ε общего положения [1]. Условимся говорить, что модуль V максимален, если $n(V, \delta) = n(\delta)$ для всех δ.

Теорема 1. *Для каждого характера ε алгебры $Z(\mathfrak{g}_C)$ фактор-модуль $\mathscr{P}_\varepsilon = \mathscr{P}/I_\varepsilon\mathscr{P}$, где I_ε — идеал $U(\mathfrak{g}_C)$, порожденный элементами $z - \varepsilon(z)$, $z \in Z(\mathfrak{g}_C)$, является максимальным $\mathfrak{g}$-модулем типа ε.*

Доказательство основано на разложении $\mathscr{P} = H \oplus I_+\mathscr{P}$, где H — подпространство $\mathfrak{k}$-гармонических полиномов, I_+ — подпространство $\mathfrak{k}$-инвариантных полиномов без свободного члена [2]. Отсюда выводится разложение $\mathscr{P} = H \oplus I_\varepsilon\mathscr{P}$, которое влечет изоморфизм $\mathfrak{k}$-модулей H, $\mathscr{P}_\varepsilon$ и максимальность $\mathscr{P}_\varepsilon$. При этом используется сюръективность канонического отображения $Z(\mathfrak{g}_C) \to I_+$, имеющая место для алгебр Ли классического типа [4].

Следствие. *Модуль $\mathscr{P}$ универсален в следующих классах: а) среди максимальных $\mathfrak{g}$-модулей класса* 0, *б) среди центральных $\mathfrak{g}$-модулей класса* 0, *в) среди неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей класса* 0.

3. Связь с элементарными $\mathfrak{g}$-модулями. Пусть $G = \exp \mathfrak{g}$ — линейная группа Ли с максимальной компактной подгруппой $K = \exp \mathfrak{k}$. Модуль V над алгеброй $\mathfrak{g}$ мы называем *элементарным*, если он определяется дифференциалом элементарного представления (представления основной серии) группы G в классе K-финитных векторов. В частности, в [3] исследовано семейство элементарных $\mathfrak{g}$-модулей X^λ, $\lambda \in \mathfrak{a}_C^*$ ($\mathfrak{a}_C$ — подпространство Картана в $\mathfrak{p}_C$), содержащих ненулевые инварианты относительно алгебры $\mathfrak{k}$; все такие модули центральны, типа $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$.

Предложение 2. *Имеет место изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей $\mathcal{P}_\varepsilon$, $\bar{X}^\lambda$ при $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda \in (-\overline{C}_+)$, где $\overline{C}_+$ — доминантная камера Вейля.*

Отсюда сравнительно просто получаются критерии максимальности и неприводимости модулей X^λ, принадлежащие Б. Костанту [3]. Для комплексного случая аналогичный вывод имеется в [1], причем роль универсального $\mathfrak{g}$-модуля играет $\mathfrak{g}$-бимодуль $U(\mathfrak{g})$.

4. Модули Хариш-Чандры. Модуль V мы называем *модулем Хариш-Чандры*, если он является прямой суммой неприводимых конечномерных $\mathfrak{k}$-подмодулей, интегрируемых на группу $K = \exp \mathfrak{k}$. Категория модулей Хариш-Чандры замкнута относительно взятия прямых сумм и тензорных произведений. В частности, пусть F — прямая сумма попарно неизоморфных неприводимых конечномерных модулей Хариш-Чандры. Тогда модуль $\mathcal{M} = \mathcal{P} \otimes F$ также является модулем Хариш-Чандры.

Теорема 2. *Модуль $\mathcal{M}$ универсален в классе элементарных $\mathfrak{g}$-модулей.*

Следствие. *Модуль $\mathcal{M}$ универсален в классе неприводимых модулей Хариш-Чандры.*

5. Алгебры ранга 1. Для классических алгебр Ли расщепимого ранга 1 рассмотрение модуля $\mathcal{P}$ позволяет чрезвычайно просто описать строение элементарных модулей класса 0. Базисные операции модуля $\mathcal{P}$ записываются в виде:

$$\text{I. } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1),\ n \geqslant 2: e_i = x_i + \partial_{-i} e,\ r_{ij} = x_i \partial_j - x_{-j}\partial_{-i},$$

$$\text{II. } \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1),\ n \geqslant 2: \quad e_i = x_i - \bar{\partial}_i \bar{e}, \quad \bar{e}_i = \bar{x}_i - \partial_i e, \quad r_{ij} = x_i\partial_j - \bar{x}_j \bar{\partial}_i + \delta_{ij}(e - \bar{e}),$$

в независимых переменных x_i, $i = -p, -p+1, \ldots, p$, $p = [n/2]$ (случай I), $x_i, \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (случай II), где положено $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $e = x_1\partial_1 + \ldots x_n\partial_n$ (аналогично для $\bar{\partial}_i$, $\bar{e}$). Примарные компоненты $\mathfrak{k}$-модуля H однократны, со старшими векторами $\varphi_k(x) = x_p^k$ (случай I), $\varphi_{kl}(x) = x_1^k \bar{x}_n^l$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ (случай II), причем

$$e_p \varphi_k = \varphi_{k+1}, \quad e_1 \varphi_{kl} = \varphi_{k+1, l}, \quad \bar{e}_n \varphi_{kl} = \varphi_{k, l+1},$$

и существуют модульные операции d, $\bar{d} \in U(\mathfrak{g}_C)$ такие, что

$$d\varphi_k = k[\Delta + k^2 + k(n-3)]\varphi_{k-1},$$

$$d\varphi_{kl} = k[\Delta - k(n + k - l)]\varphi_{k-1, l}, \quad \bar{d}\varphi_{kl} = l[\Delta - l(n + l - k)]\varphi_{k, l-1},$$

где $\Delta \in Z(\mathfrak{g}_C)$ — квадратичный элемент. Факторизация $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_\varepsilon$ сводится к замене Δ на число $\varepsilon(\Delta) = \varepsilon$. Соответственно модуль $\mathcal{P}_\varepsilon$, неприводимый в общем положении, содержит 2 неприводимых подфактора в случае I, 4 — в случае II. Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, 1)$ рассматривается аналогично случаю II.

6. Замечания. Операторы модуля $\mathcal{P}$ могут быть заданы также в следующем более общем виде:

$$T_y = \alpha \operatorname{tr}(xy) + \beta \operatorname{tr}(\partial y) + \gamma \operatorname{tr}(x \partial y \partial),$$

где α, β, γ — фиксированные константы с условием $\alpha\gamma = -1$ (операторы T_u имеют прежний вид). Замена символов x и ∂ приводит к двойственному представлению алгебры $\mathfrak{g}$, в котором операторы T_y являются дифференциальными операторами первого порядка, квадратично зависящими от аргумента $x \in \mathfrak{p}_C$.

Метод, предложенный в этой статье, может быть использован также для вычисления матричных элементов модулей класса 0; при этом особенно просто рассматриваются алгебры ранга 1.

Университет Дружбы Народов
им. Патриса Лумумбы

Поступило в редакцию
14 декабря 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры. М., «Мир», 1978. 2. Kostant B., Rallis S., Amer. J. Math. 93 (1971), 753—809. 3. Kostant B., Summer School in Math., 1971, Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, 1975, 231—329. 4. Helgason S., Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 367—371.