Д. В. Карпов, Минимальные двусвязные графы, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2013, том 417, 106–127

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 417, 2013 г.

Д. В. Карпов

МИНИМАЛЬНЫЕ ДВУСВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

§1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Для множества и количества рёбер графа G мы будем применять обозначения $E(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а максимальную степень вершины графа G – через $\Delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Индуцированный подграф графа G на множестве вершин $U \subset V(G)$ мы будем обозначать через $G(U)$.

Определение 1. *Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате стягивания ребра $e = xy$. Это означает, что граф $G \cdot e$ получается из графа $G - \{x, y\}$ добавлением новой вершины w, которая будет смежна в графе $G \cdot e$ со всеми вершинами графа G, смежными в G хотя бы с одной из вершин x и y.*

Для вершин этих графов мы будем применять обозначение $w = x \cdot y$.

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

Определение 2. *Пусть $H_1, \dots, H_n$ – графы с непересекающимися множествами вершин. Будем называть их объединением граф G с*

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{n} V(H_i), \quad \text{и} \quad E(G) = \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i).$$

Ключевые слова: связность, двусвязный граф, минимальный двусвязный граф.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-3229.2012.1 и гранта РФФИ No. 11-01-00760-а.

1.1. Основные результаты.

Определение 3. *k-связный граф G называется минимальным, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.*

Про минимальные двусвязные графы известно довольно много. Одними из первых работ, где такие графы изучались, были работы Дирака [1] и Пламмера [2]. Пламмер доказал, что при удалении всех вершин степени 2 из минимального двусвязного графа получается объединение нескольких (хотя бы двух) деревьев. Похожий результат есть и в работе Дирака. В теореме 2 мы сформулируем и докажем несколько более сильный результат.

Определение 4. *Для двусвязного графа G через $V_2(G)$ мы обозначим множество всех вершин степени 2, а через $V_3(G)$ – множество всех вершин степени не менее 3. Пусть $v_2(G) = |V_2(G)|$ и $v_3(G) = |V_3(G)|$.*

Из результата Пламмера легко следует, что

$$v_2(G) \geqslant \frac{v(G) + 4}{3} \tag{1}$$

для минимального двусвязного графа G. Позже Мадер [5, 6] доказал, что в минимальном k-связном графе G не менее чем $\frac{(k-1)v(G)+2k}{2k-1}$ вершин степени k и тем самым обобщил оценку (1). Оценка Мадера – точная, что подтверждается бесконечными сериями примеров.

В конце работы мы исследуем структуру минимальных двусвязных графов с наименьшим возможным числом вершин степени 2.

Определение 5. *Через $\mathcal{G}M(n)$ обозначим множество всех минимальных двусвязных графов на n вершинах, в которых ровно $\lceil \frac{v(G)+4}{3} \rceil$ вершин степени 2.*

Оксли в статье [7] исследовал структуру минимальных двусвязных графов из $\mathcal{G}M(n)$. Понятно, что равенство $v_2(G) = \frac{v(G)+4}{3}$ может достигаться только при $v(G) = 3k + 2$. Оксли доказал, что $\mathcal{G}M(3k + 2)$ состоит из графов, которые могут быть получены из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$. Для n сравнимых с 0 и 1 по модулю 3 в [7] доказано, что графы из $\mathcal{G}M(n)$ можно получить такими же операциями из одного из начальных графов, перечисленных в работе. Начальные графы – это K_3, три графа несколько более сложной структуры и две бесконечные серии графов.

Мы дадим другое описание минимальных двусвязных графов из $\mathcal{G}M(n)$. На наш взгляд, такое описание является более наглядным и показывает структуру этих графов. Мы докажем, что $\mathcal{G}M(3k+2)$ состоит из графов вида G_T, где T – произвольное дерево с $v(T) = k$ и $\Delta(T) \leqslant 3$. Граф G_T строится из двух копий дерева T, к парам соответствующих вершин которых добавляются смежные с ними новые вершины степени 2 так, чтобы степени всех вершин обеих копий T были равны 3 (см. определение 15 и рис. 3). Графы из $\mathcal{G}M(3k)$ и $\mathcal{G}M(3k+1)$ также описаны с помощью графов вида G_T.

§2. Дерево разбиения

Основным инструментом в наших доказательствах будет дерево разбиения двусвязного графа, определенное в [12]. Приступим к определению необходимых понятий. Во всей работе граф G будет двусвязным.

Определение 6. *Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.*

1) *Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.*

2) *Множество R называется разделяющим, если граф $G - R$ несвязен.*

3) *Набор из всех двухвершинных разделяющих множеств двусвязного графа G обозначим через $\mathfrak{R}_2(G)$.*

4) *Будем говорить, что множество R разделяет множество $X \subset V(G)$, если $X \not\subset R$ и не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

Определение 7. 1) *Два множества $S, T \in \mathfrak{R}_2(G)$ называются независимыми, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

2) *Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ называется одиночным, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G.*

В работах [8, 9] доказано, что для множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо они независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

Определение 8. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_2(G)$.

1) *Множество* $A \subset V(G)$ *назовем частью* $\mathfrak{S}$*-разбиения, если никакие две вершины из* A *нельзя разделить никаким множеством из* $\mathfrak{S}$*, но любая другая вершина графа* G *отделена от множества* A *хотя бы одним из множеств набора* $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей $\mathfrak{S}$*-разбиения мы будем обозначать через* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

В случае, когда неочевидно, какой граф разбивается, мы будем писать $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) *Вершины части* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *назовем внутренними, если они не входят ни в одно из множеств набора* $\mathfrak{S}$*. Множество таких вершин назовем внутренностью части* A *и будем обозначать через* $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ *мы будем называть граничными, а все их множество – границей и обозначать через* $\mathrm{Bound}(A)$.

Определение 9. 1) *Будем использовать обозначение* $\mathrm{Part}(G)$ *вместо* $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ *и называть части этого разбиения просто частями графа* G.

2) *Дерево разбиения двусвязного графа* G *– это граф* $\mathrm{BT}(G)$*, вершины которого соответствуют одиночным множествам и частям графа* G*. Вершины* $S \in \mathfrak{O}(G)$ *и* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *смежны в* $\mathrm{BT}(G)$ *если и только если* $S \subset A$*. Других рёбер в* $\mathrm{BT}(G)$ *нет.*

Частным случаем теоремы 1 из работы [12] является следующая лемма.

Лемма 1. *Для двусвязного графа* G *выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{BT}(G)$ *– это дерево.*

2) *Для каждого множества* $S \in \mathfrak{O}(G)$ *выполняется* $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(S)|$*. Все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Множество* $S \in \mathfrak{O}(G)$ *разделяет в графе* G *части* $B, B' \in \mathrm{Part}(G)$ *тогда и только тогда, когда* S *разделяет* B *и* B' *в* $\mathrm{BT}(G)$.

Определение 10. *Часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *назовем крайней, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения* $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 1. Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ – крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ – одиночное множество графа G.

Определение 11. 1) *Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x,y\} \in \mathfrak{O}(G)\}$.*

2) *Назовём часть A циклом, если граф $G'(A)$ – простой цикл и блоком, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ длиной цикла A.*

Далее мы приведем необходимые нам результаты из работы [12]. В работе [12] (следствия 1 и 2, а также лемма 7) доказано следующее.

Лемма 2. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(G)$ *– либо цикл, либо блок.*

2) *Если часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ – цикл, то все вершины из $\mathrm{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G.*

3) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$ – цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа G.*

Следующая лемма – это лемма 4 из работы [12].

Лемма 3. *Пусть S – одиночное множество двусвязного графа G, а $x \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если одиночное множество S имеет степень $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, то $d_G(x) \geqslant d$. Если $d_G(x) = d$, то вершины множества S несмежны.*

2) $d_G(x) \geqslant 3$.

Определение 12. *Граф H' называется подразбиением графа H, если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все внутренние вершины добавляемых путей различны, имеют степень 2 и не содержатся в графе H.*

И, наконец, лемма 8 из работы [12].

Лемма 4. *Пусть G – двусвязный граф, $A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда G содержит подразбиение $G'(A)$.*

§3. Минимальные двусвязные графы

Перейдем к изучению структуры минимальных двусвязных графов. Сначала мы характеризуем такие графы с помощью их деревьев разбиения.

Теорема 1. *Двусвязный граф G является минимальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *Если $\{a,b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, то вершины a и b несмежны;*

(2) *Для любого блока A графа G граф $G(A)$ пуст (то есть, не имеет ни одного ребра).*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть G – минимальный двусвязный граф. Предположим, что $S = \{a,b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, $ab \in E(G)$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1,\dots,A_n\}$. Так как G двусвязен, обе вершины a и b смежны с $\mathrm{Int}(A_j)$. Граф $G(\mathrm{Int}(A_j))$ связен, поэтому существует ab-путь, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(A_j)$ и их множество непусто. Таким образом, в графе $G - ab$ существует $n \geqslant 2$ непересекающихся по внутренним вершинам ab-путей, откуда следует двусвязность графа $G - ab$. Противоречие с минимальностью G показывает, что условие (1) выполнено.

Пусть A – блок графа G; $x,y \in A$, $xy \in E(G)$. Граф $G'(A)$ трёхсвязен, следовательно, по теореме Менгера существует три xy-пути в графе G', не имеющие общих внутренних вершин. По лемме 4 граф G содержит подразбиение $G'(A)$, поэтому также содержит три xy-пути без общих внутренних вершин. Следовательно, граф $G - xy$ содержит два таких пути, а значит, он двусвязен. Противоречие с минимальностью G. Таким образом, условие (2) выполнено.

$\Leftarrow$. Пусть G – не минимальный граф, а ребро $xy \in E(G)$ таково, что граф $G - xy$ двусвязен. Понятно, что существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(G)$, что $x,y \in A$. Из условия (2) следует, что A – цикл. Пусть $z \in A \setminus \{x,y\}$. Тогда множество $T = \{z, xy\}$ делит цикл $G'(A)$ на две компоненты связности $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.

Докажем, что что x и y не связаны в $G' - T$. Предположим противное и рассмотрим кратчайший xy-путь P в $G' - T$. Понятно, что $V(P)$ содержит вершину $b \notin A$. Рассмотрим одиночное множество S, отделяющее b от A. Так как $x,y \in A$, при движении от b по пути P в обе стороны мы попадем в две разные вершины множества S. Эти вершины смежны в G', заменим участок пути P, содержащий b, на ребро e между двумя вершинами множества S и получим более короткий xy-путь P' в графе G'. Так как $V(P') \subset V(P)$ и ребро $e \notin T$ (из условия (1) следует, что $\{x,y\} \notin \mathfrak{R}_2(G)$, поэтому $e \neq xy$), путь P' соединяет x с y и в графе $G' - T$, противоречие с выбором пути P.

Следовательно, граф $G - T$ несвязен, а значит, граф $G - xy$ недвусвязен. Полученное противоречие показывает, что граф G минимален. $\square$

Далее отметим несколько свойств минимальных двусвязных графов.

Лемма 5. *Пусть G – минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если A – блок графа G, то $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.*

2) *Пусть A – крайняя часть графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A – цикл, а все его вершины, кроме двух вершин множества S, имеют степень 2.*

3) *Множество $V_3(G)$ состоит из всех вершин, входящих в одиночные множества графа G. Множество $V_2(G)$ состоит из всех внутренних вершин частей графа G.*

4) *Пусть $S \in \mathfrak{O}(G)$ — одиночное множество, не смежное в $\mathrm{BT}(G)$ с блоками. Тогда $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) \geqslant 3$.*

Доказательство. 1) Пусть $x \in \mathrm{Int}(A)$, рассмотрим ребро $xy \in E(G)$. Понятно, что $y \in A$, таким образом, граф $G(A)$ имеет ребро, что противоречит теореме 1.

2) Так как A – крайняя часть, то $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Значит, A – цикл и утверждение очевидно из леммы 2.

3) Прямое следствие леммы 3 и пункта 1.

4) Пусть это не так и $S = \{x, y\}$ смежно в $\mathrm{BT}(G)$ с двумя циклами B_1 и B_2. Выберем отличные от x, y вершины $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$. *Докажем, что $R = \{z_1, z_2\}$ отделяет x от y в графе $G' - xy$ (а следовательно, и в графе G — подграфе $G' - xy$.)*

Предположим противное и рассмотрим кратчайший xy-путь P в графе $G' - xy - R$. Предположим, что он содержит вершину $v \notin B_1 \cup B_2$. Тогда существует множество $T \in \mathfrak{O}(G)$, отделяющее z от $B_1 \cup B_2$. Очевидно, $T \neq S$. При движении от v в обе стороны по пути P мы попадем в вершины множества T, которые в графе $G' - xy - R$ смежны. Но тогда существует более короткий путь: можно заменить участок пути, содержащий v, на ребро между двумя вершинами множества T. Противоречие с выбором пути P показывает, что $V(P) \subset B_1 \cup B_2$, но такого xy-пути в $G' - xy - R$, очевидно, нет.

Значит, R разделяет в G множество $S = \{x, y\}$, то есть, S и R зависимы, а значит, S — множество неодиночное. Противоречие. $\square$

Следующая теорема охарактеризует минимальные двусвязные графы в терминах стягивания рёбер.

Лемма 6. *Пусть G – минимальный двусвязный граф, все части которого — циклы, $w \in V(G)$, $d_G(w) \geqslant 4$. Тогда существует минимальный двусвязный граф H и вершины $w_1, w_2 \in V_3(H)$ такие, что $G = H \cdot w_1w_2$ и при этом $w = w_1 \cdot w_2$.*

Доказательство. 1. По лемме 5 вершина w входит в одиночное множество $R = \{w, u\}$ графа G. Окрестность $N = N_G(w) \not\ni u$, а значит, все (хотя бы четыре) вершины из N – это внутренние вершины частей $\mathrm{Part}(R)$, а этих частей по лемме 5 хотя бы три. Значит, можно так разбить части $\mathrm{Part}(R)$ на две группы, чтобы части из каждой группы содержали хотя бы две вершины множества N. Пусть N_1 и N_2 – вершины множества N, содержащиеся в частях первой и второй групп соответственно. Тогда $N = N_1 \cup N_2$.

Мы изменим наш граф: заменим вершину w на две смежные вершины w_1 и w_2 (см. рис. 1a). В новом графе H вершина w_1 будет смежна со всеми вершинами из N_1 и с w_2, а вершина w_2 будет смежна со всеми вершинами из N_2 и с w_1. Тогда $d_H(w_1) \geqslant 3$ и $d_H(w_2) \geqslant 3$. Очевидно, $G = H \cdot w_1w_2$ и $w = w_1 \cdot w_2$.

2. *Докажем, что граф H двусвязен.*
Предположим, что это не так. Рассмотрим (классические) блоки графа H. Их хотя бы два. Один из них – назовем его B – содержит ребро w_1w_2. При стягивании ребра w_1w_2 отличные от B блоки не меняются, но получается двусвязный граф G. Значит, у графа H всего два блока, причём блок B состоит из двух вершин w_1 и w_2 и ребра между ними. Тогда одна из вершин w_1 и w_2 должна иметь степень 1 в H, что не так. Полученное противоречие показывает, что граф H двусвязен.

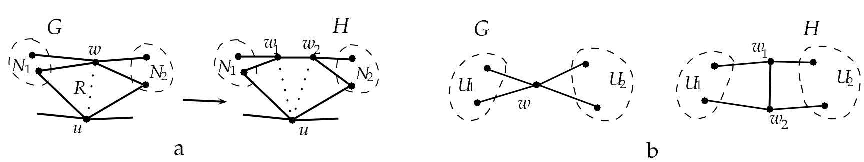

Рис. 1. Преобразование вершины w.

3. *Докажем, что H – минимальный двусвязный граф.*

Отметим, что граф $H - w_1w_2$ не двусвязен: он имеет точку сочленения u. (В графе $H-\{w_1, w_2, u\} = G-\{u, w\}$ вершины из N_1 не связаны с вершинами из N_2. Добавив в этот граф вершину w_1 (не связанную с N_2) и вершину w_2 (не связанную с N_1) без ребра w_1w_2, мы не сделаем граф связным.)

Пусть $e \neq w_1w_2$. Так как граф G минимален, в графе $G - e$ есть точка сочленения a. Если $a \neq w$, то w смежна только с одной частью разбиения $\mathrm{Part}(G - e; \{a\})$, поэтому a – точка сочленения и в $H - e$.

Пусть $a = w$, а $\mathrm{Part}(G - e; \{w\}) = \{U_1, \dots U_k\}$. Тогда граф $H - e$ будет двусвязным если и только если обе вершины w_1 и w_2 смежны с каждой из частей $U_1, \dots, U_k$ (см. рис. 1b). Но тогда граф $H - w_1w_2$ двусвязен, так как в этом графе существует $k \geqslant 2$ путей между w_1 и w_2: по каждой из частей $U_1, \dots, U_k$. Противоречие завершает доказательство. □

Определение 13. *Обозначим через $V_2'(G)$ множество всех вершин степени 2, входящих в крайние части графа G.*

В работе [2] доказано, что граф $G - V_2(G)$ – это объединение нескольких деревьев. С помощью дерева разбиения двусвязного графа мы докажем более сильное утверждение для двусвязного графа.

Теорема 2. *Пусть G – минимальный двусвязный граф, $H = G - V_2'(G)$, а $A_1, \dots, A_k$ – все некрайние части* $\mathrm{Part}(G)$. *Положим $s(A_i) = |A_i|$, если A_i – блок и $s(A_i) = d_{\mathrm{BT}(G)}(A_i)$, если A_i – цикл.*

Тогда выполняются следующие утверждения.

1) *Граф H – лес с*

$$c = \left(\sum_{i=1}^{k} s(A_i)\right) - 2k + 2 \tag{2}$$

компонентами связности.

2) *Для любого одиночного множества S две его вершины принадлежат разным компонентам связности H.*

3) *Если все некрайние части графа G – четырёхугольники без внутренних вершин и имеют степень 2 в* $\mathrm{BT}(G)$, *то H – объединение двух изоморфных деревьев F_1 и F_2. Более того, существует такой изоморфизм деревьев F_1 и F_2, что каждое одиночное множество графа G состоит из вершин деревьев F_1 и F_2, соответствующих друг другу при этом изоморфизме.*

Доказательство. Пронумеруем все вершины дерева $T = \mathrm{BT}(G)$ (как соответствующие частям, так и соответствующие одиночным множествам) таким образом: $a_1, ..., a_m$, чтобы для всех ℓ граф $T(\{a_1, \dots, a_\ell\})$ был деревом, а a_ℓ – его висячей вершиной. Не умаляя общности будем считать, что некрайние части $\mathrm{Part}(G)$ в нумерации $A_1, \dots, A_k$ идут в том же порядке, как в нумерации всех вершин дерева T. Пусть $W_\ell = \bigcup\limits_{i=1}^{\ell} A_i$, $H_\ell = H(W_\ell)$. Тогда понятно, что $W_k = V(H)$ и, следовательно, $H_k = H$.

Индукцией по ℓ мы докажем, что H_ℓ – *объединение*

$$c_\ell = \left(\sum_{i=1}^{\ell} s(A_i)\right) - 2\ell + 2$$

деревьев, а также выполнены утверждения 2 *и* 3 *для частей* $A_1, ..., A_\ell$ *и одиночных множеств, содержащихся в* W_ℓ.

База $\ell = 1$. Если A_1 – блок, то граф $G(A_1)$ по теореме 1 не имеет рёбер, а значит, есть объединение $s(A_1) = |A_1|$ одновершинных деревьев.

Пусть часть A_1 – цикл. Тогда $G'(A_1)$ – это цикл, причем две вершины любого одиночного множества, лежащего в A_1 – соседние в этом цикле и по теореме 1 они несмежны в G. Поэтому $H_1 = H(A_1)$ – объединение $s(A_1) = d_{\mathrm{BT}(G)}(A_1)$ деревьев, причем вершины каждого одиночного множества принадлежат разным деревьям.

Если часть A_1 – четырёхугольник без внутренних вершин и имеет степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$, то граф H_1 – это два ребра без общих концов. Таким образом, все доказываемые утверждения для графа H_1 выполнены.

Переход $\ell \to \ell + 1$.
Мы так пронумеровали некрайние части, что $A_{\ell+1}$ является висячей вершиной в некотором поддереве T' дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$, причем $V(T')$ содержит все части $A_1, \dots, A_\ell$. Тогда $A_{\ell+1}$ смежна в T' ровно с одной вершиной, и эта вершина соответствует одиночному множеству – назовем его S. По лемме 1 множество S отделяет $A_{\ell+1}$ от $A_1, \dots, A_\ell$.

Таким образом, ровно две вершины части $A_{\ell+1}$ входят в $W_\ell = V(H_\ell)$ – это две вершины множества S и они принадлежат разным компонентам связности H_ℓ в силу утверждения 2. Разберем два случая.

а. *Часть* $A_{\ell+1}$ – *блок.*

Все вершины блока $A_{\ell+1}$ в графе $H_{\ell+1}$ попарно несмежны. В $V(H_{\ell+1})$ добавятся $s(A_{\ell+1}) - 2 = |A_{\ell+1}| - 2$ вершины части $A_{\ell+1}$, не входящие в S, каждая из них представляет собой новую одновершинную компоненту связности. Отсюда немедленно следуют все доказываемые утверждения (то есть, утверждения 1 и 2 для графа $H_{\ell+1}$, частей $A_1, \dots, A_\ell, A_{\ell+1}$ и входящих в них одиночных множеств).

b. *Часть* $A_{\ell+1}$ *– цикл.*

Граф H_ℓ – лес. Пусть U_1 и U_2 – компоненты связности H_ℓ, которые содержат вершины множества S (по утверждению 2 они различны). Остальные компоненты связности H_ℓ будут компонентами связности $H_{\ell+1}$. Пусть $F_i = H_\ell(U_i)$.

Как показано выше, $H(A_{\ell+1})$ – объединение $s(A_{\ell+1})$ деревьев, причем вершины каждого одиночного множества (в том числе, вершины S) принадлежат разным деревьям (см. рис. 2a). Значит, вершины деревьев F_1 и F_2 попадают в разные компоненты связности графа $H_{\ell+1}$. Остальные $s(A_{\ell+1}) - 2$ компоненты связности графа $H(A_{\ell+1})$ – это компоненты связности графа $H_{\ell+1}$. Отсюда следуют утверждения 1 и 2 для графа $H_{\ell+1}$, частей $A_1, \dots, A_\ell, A_{\ell+1}$ и входящих в них одиночных множеств.

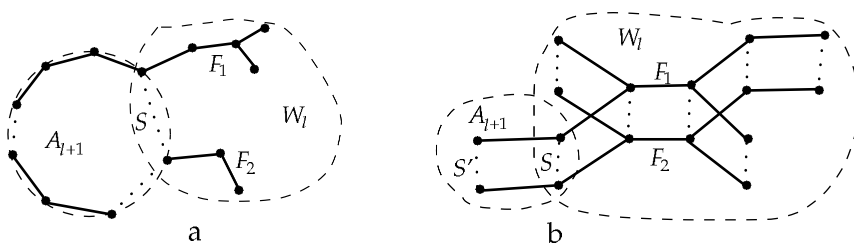

Рис. 2. Шаг с частью $A_{\ell+1}$.

Остается доказать утверждение 3. Итак, пусть все некрайние части, включая $A_{\ell+1}$ – четырехугольники без внутренних вершин и имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$. Тогда по индукционному предположению H_ℓ – объединение двух изоморфных деревьев F_1 и F_2.

В границу части $A_{\ell+1}$ входят ровно два одиночных множества, пусть это $S = \{w_1, w_2\}$ (определенное выше) и S', причем $w_1 \in V(F_1)$ и $w_2 \in V(F_2)$. Тогда при изоморфизме деревьев F_1 и F_2 вершина w_1

переходит в w_2. В графе $H_{\ell+1}$ добавились две новые вершины (это вершины множества S'). Понятно, что одна из вершин множества S' соединена с w_1, а другая – с w_2 (см. рис. 2б), откуда очевидно следует доказываемое утверждение об изоморфизме деревьев. □

Следствие 1. *Пусть G – минимальный двусвязный граф, $H = G - V_2'(G)$, причем в графе H ровно c компонент связности. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если G имеет хотя бы один блок, то $c \geqslant 4$.*

2) *Если G имеет часть-цикл A степени $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = d$, то $c \geqslant d$.*

3) *Если $c = 3$, то все части графа G – циклы, ровно одна из них имеет степень 3 в $\mathrm{BT}(G)$, а остальные – степень 2.*

Доказательство. 1) В блоке A графа G хотя бы четыре вершины, а граф $G(A)$ пуст. Следовательно, блок графа G – его некрайняя часть. По формуле (2) тогда $c \geqslant |A| \geqslant 4$.

2) Утверждение непосредственно следует из формулы (2).

3) Утверждение непосредственно следует из формулы (2) и пунктов 1 и 2. □

Лемма 7. *Пусть G – минимальный двусвязный граф, t – количество крайних частей графа G, $s = 2e(G) - 2v(G)$, а c – количество компонент связности графа H. Тогда $2t = s + 2c$.*

Доказательство. Посмотрим на рёбра, соединяющие вершины из $V_3(G)$ с внутренними вершинами крайних частей графа G. Пусть их количество равно q. Для каждой крайней части A от ее внутренности $\mathrm{Int}(A)$ выходит ровно два ребра в $V_3(G)$ (к вершинам из $\mathrm{Bound}(A)$). Поэтому $q = 2t$.

Поскольку H – объединение c деревьев, то $e(H) = v(H) - c$. Очевидно, $V_3(G) \subseteq V(H)$. Множество $W = V(H) \setminus V_3(G)$ состоит из вершин множества $V_2(G)$, входящих в некрайние части – то есть, по лемме 5, из внутренних вершин некрайних частей. Поэтому каждая вершина множества W имеет степень 2 в графе H, а значит,

$$\sum_{x \in V_3(G)} d_H(x) = 2(v_3(G) - c).$$

Теперь посчитаем q с другой стороны:

$$q = \sum_{x \in V_3(G)} (d_G(x) - d_H(x)) = \sum_{x \in V_3(G)} d_G(x) - 2v_3(G) + 2c = s + 2c. \quad \square$$

Определение 14. *Для любой вершины $x \in V(G)$ назовем ее уменьшенной степенью величину $d'_G(x) = d_G(x) - 2$.*

Замечание 2. 1) Очевидно, уменьшенная степень любой вершины из $V_3(G)$ не менее 1.

2) Сумма уменьшенных степеней графа G – это $s = 2e(G) - 2v(G)$.

Для минимального двусвязного графа G определим

$$f(G) = 3v_2(G) - (v(G) + 4) = 2v_2(G) - v_3(G) - 4.$$

Теперь докажем частный случай теоремы Мадера.

Следствие 2. *Пусть G – минимальный двусвязный граф. Тогда $v_2(G) \geqslant \frac{v(G)+4}{3}$.*

Доказательство. Утверждение эквивалентно тому, что $f(G) \geqslant 0$. Так как уменьшенная степень каждой вершины из $V_3(G)$ не менее 1, мы имеем $v_3(G) \leqslant s$. Так как каждая крайняя часть графа G содержит хотя бы одну вершину из $V_2(G)$, мы имеем $v_2(G) \geqslant t$. Поэтому из леммы 7 следует, что

$$f(G) = 2(v_2(G) - t) + 2(c - 2) + (s - v_3(G)) \geqslant 0. \tag{3}$$

□

Следующая лемма поможет классифицировать графы с малым значением $f(G)$.

Лемма 8. *Пусть G – минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если $v_2(G) - t = 0$, то все крайние части графа G – треугольники, а все некрайние части имеют пустую внутренность.*

2) *Если $c-2 = 0$, то все некрайние части графа G – циклы и имеют степень 2 в дереве $\mathrm{BT}(G)$.*

3) *Если $s - v_3(G) = 0$, то все одиночные множества имеют степень 3 в графе $\mathrm{BT}(G)$ и не имеют общих вершин.*

Доказательство. 1) Если $v_2(G) - t = 0$, то некрайние части не содержат вершин степени 2 (и следовательно, по лемме 5 имеют пустую внутренность), а каждая крайняя часть содержит ровно одну вершину степени 2 (то есть, является треугольником).

2) Прямое следствие пунктов 1 и 2 следствия 1 и пункта 4 леммы 5.

3) По замечанию 2, равенство $s = v_3(G)$ означает, что все вершины из $V_3(G)$ имеют степень 3. Если какое-то одиночное множество имеет

степень 4 в $\mathrm{BT}(G)$, то по лемме 3 его вершины имеют степень хотя бы 4. Значит, все одиночные множества имеют степень 3 в графе $\mathrm{BT}(G)$.

Предположим, что какие-то два одиночных множества S и S' графа G пересекаются по вершине a. Мы знаем, что

$$|\mathrm{Part}(S)| = d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = 3$$

(по лемме 1 и доказанному выше). Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A\}$, причем $S' \subset A$. Аналогично можно считать, что $\mathrm{Part}(S') = \{A'_1, A'_2, A'\}$, причем $S \subset A'$. Тогда внутренности $\mathrm{Int}(A_1)$, $\mathrm{Int}(A_2)$, $\mathrm{Int}(A'_1)$, $\mathrm{Int}(A'_2)$ попарно не пересекаются. Так как $a \in S$, то a смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_1)$ и хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_2)$. Так как $a \in S'$, то a смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A'_1)$ и хотя бы одной с вершиной из $\mathrm{Int}(A'_2)$. Таким образом, $d_G(a) \geqslant 4$, противоречие. □

Для каждого $n \geqslant 5$ мы опишем графы из $\mathcal{G}M(n)$ (см. определение 5) с помощью их деревьев разбиения.

Замечание 3. Пусть $G \in \mathcal{G}M(n)$, $n \geqslant 5$. Тогда $f(G)$ равняется остатку от деления $n + 4$ на три.

Итак, равенство $v_2(G) = \frac{v(G)+4}{3}$ возможно только при $v(G)$, дающем остаток 2 от деления на 3. Поэтому мы начнем исследования с графов из $\mathcal{G}M(3k + 2)$.

Определение 15. *Пусть T – дерево, $\Delta(T) \leqslant 3$. Построим двусвязный граф G_T следующим образом. Рассмотрим две копии T_1 и T_2 дерева T с непересекающимися наборами вершин и изоморфизмы деревьев $\varphi_i : V(T) \to V(T_i)$. Пусть каждой вершине $x \in V(T)$ соответствует двухвершинное разделяющее множество $R_x = \{x_1, x_2\}$ графа G_T, где $x_i = \varphi(x) \in V(T_i)$. Для каждой вершины $x \in V(T)$ степени $d_T(x) = 3 - k$ добавим k вершин степени 2, смежных с x_1 и x_2 (то есть, с вершинами R_x).*

Пример дерева T и соответствующего ему графа G_T изображен на рис. 3.

Замечание 4. Пусть $v(T) = k$.

1) В графе G_T все вершины двух копий дерева T имеют степень 3, а остальные вершины – степень 2. Таким образом, нетрудно понять, что $v(G_T) = 3k + 2$ и $v_2(G_T) = k + 2$.

2) Граф G_T – минимальный двусвязный.

3) Из пунктов 1 и 2 следует, что $G_T \in \mathcal{G}M(3k + 2)$.

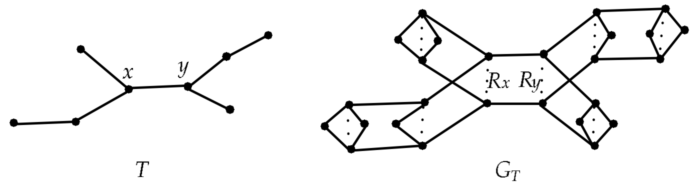

Рис. 3. Дерево T и минимальный двусвязный граф G_T.

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 1$. Тогда $\mathcal{G}M(3k+2)$ состоит из графов вида G_T, где T – дерево с $v(T) = k$ и $\Delta(T) = 3$.*

Доказательство. Из леммы 8 следует, что все некрайние части графа G – четырёхугольники без внутренних вершин и имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$. Тогда по пункту 3 теоремы 2 граф $H = G - V_2'(G)$ – объединение двух изоморфных деревьев (пусть одно из них T). Понятно, что $\Delta(T)$ не превосходит степени одиночных множеств графа G в $\mathrm{BT}(G)$, то есть, по пункту 3 леммы 8 мы имеем $\Delta(T) \leqslant 3$. Наконец, из пункта 1 леммы 8 все крайние части графа G – треугольники, а степень каждой вершины из $V_3(G)$ в графе G равна 3. Поэтому из определения графа G_T следует, что $G = G_T$. Из замечания 4 теперь понятно, что $v(T) = k$. □

Теорема 4. *Пусть $k \geqslant 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$\mathcal{G}M(3k+1)$ состоит из графов вида $G_T \cdot xy$, где T – дерево с $v(T) = k$ и $\Delta(T) = 3$, $x, y \in V_3(G_T)$ и $xy \in E(G_T)$.*

2) *Для любого графа $G \in \mathcal{G}M(3k+1)$ представление в виде $G_T \cdot xy$ из пункта 1 единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. 1) Если $G = G_T \cdot xy$ для дерева T с $v(T) = k$ и $\Delta(T) = 3$, то по теореме 1 граф G – минимальный двусвязный, $v(G) = 3k + 1$ и $v_2(G) = k + 2$, поэтому $G \in \mathcal{G}M(3k + 1)$.

Пусть $G \in \mathcal{G}M(3k + 1)$. Тогда $v_2(G) = k + 2$. По замечанию 3 мы имеем $f(G) = 1$, что ввиду формулы (3) означает $v_2(G) = t$, $c = 2$, $s - v_3(G) = 1$. По лемме 8, условия $c = 2$ и $v_2(G) = t$ означают, что все части графа G — циклы. Условие $s - v_3(G) = 1$ означает, что в графе G есть вершина степени 4. Тогда по лемме 6 существует минимальный двусвязный граф H и вершины $w_1, w_2 \in V_3(H)$ такие, что $G = H \cdot w_1 w_2$.

Понятно, что $v_2(H) = v_2(G) = k+2$, $v(H) = v(G)+1 = 3k+2$. Это означает, что $H \in \mathcal{G}M(3k+2)$, откуда следует утверждение 1 теоремы.

2) Как мы доказали, существует представление $G = G_T \cdot w_1w_2$, где $w_1, w_2 \in V_3(G_T)$, пусть $w = w_1 \cdot w_2$. Граф $G_T - V_2'(G_T)$ – это объединение двух деревьев T_1 и T_2, изоморфных T. Понятно, что вершины w_1 и w_2 принадлежат одному и тому же дереву, пусть это T_1. Пусть u_1 и u_2 – вершины дерева T_2, соответствующие w_1 и w_2 при изоморфизме деревьев. Тогда граф $G - V_2'(G)$ – это объединение двух деревьев $T_1' = T_1 \cdot w_1w_2$ и T_2 (см. рис. 4б). Таким образом, дерево T в представлении $G = G_T \cdot w_1w_2$ изоморфно тому из двух деревьев графа $G - V_2'(G)$, что содержит больше вершин.

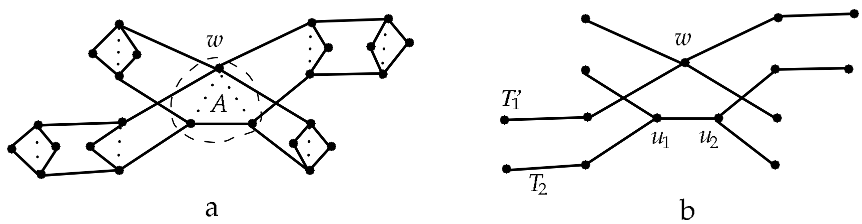

Рис. 4. Графы $G \in \mathcal{G}M(3k+1)$ и $G - V_2'(G)$.

Итак, мы уже определили дерево T. У графа G есть ровно одна некрайняя часть-треугольник $A = \{w, u_1, u_2\}$ (см. рис. 4а). Деревья разбиения у графов G_T и $G = G_T \cdot w_1w_2$, очевидно, изоморфны. Определим в $\mathrm{BT}(G_T)$ часть A', соответствующую A при изоморфизме деревьев разбиения (это можно сделать с точностью до автоморфизма графа G_T). Вершины w_1 и w_2 – это две смежные вершины части A' (можно выбрать любую из двух таких пар). $\square$

Замечание 5. Таким образом, если $G \in \mathcal{G}M(3k+1)$, то у него k одиночных множеств и степень каждого из них в $\mathrm{BT}(G)$ равна 3. Все крайние части – треугольники, все некрайние части имеют пустую внутренность. Ровно одна некрайняя часть графа G – треугольник, это как раз часть с границей из двух одиночных множеств, имеющих общую вершину. Остальные части – четырёхугольники. Пример такого графа изображен на рисунке 4а.

Перейдем к самому сложному случаю: исследованию графов из $\mathcal{G}M(3k)$. В этом множестве есть графы с параметром $c = 3$. Поэтому нам потребуется определение еще одной серии графов.

Определение 16. *Пусть T – дерево с $\Delta(T) = 3$ и $a \in V(T)$ – вершина степени $d_T(a) = 3$. Пусть $\mathrm{N}_T(a) = \{x, y, z\}$. Рассмотрим граф G_T: пусть R_a, $R_x = \{x_1, x_2\}$, $R_y = \{y_1, y_2\}$, $R_z = \{z_1, z_2\}$ – его одиночные множества, соответствующие вершинам a, x, y, z. Положим*

$$G_{T,a} = (G_T - R_a) + x_1y_2 + y_1z_2 + z_1x_2$$

(см. рис. 5).

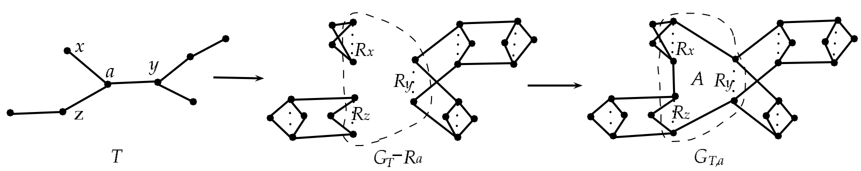

Рис. 5. Построение графа $G_{T,a}$.

Замечание 6. Пусть T – дерево с $v(T) = k$, $\Delta(T) = 3$.

1) Нетрудно понять, что граф $G_{T,a}$ двусвязен.

2) Вершине a соответствует часть-шестиугольник, остальные некрайние части графа $G_{T,a}$ – четырёхугольники, а все крайние части – треугольники. Одиночные множества графа $G_{T,a}$ соответствуют отличным от a вершинам дерева T, две вершины каждого одиночного множества несмежны. Значит, по теореме 1 граф $G_{T,a}$ минимален.

3) $v(G_{T,a}) = v(G_T) - 2 = 3k$, $v_2(G_{T,a}) = v_2(G_T) = k + 2$. Поэтому $G_{T,a} \in \mathcal{G}M(3k)$.

4) При построении графа $G_{T,a}$ можно несколькими способами соединить в графе $G_T - R_a$ вершины из R_x, R_y, R_z так, чтобы получилась часть-шестиугольник. Однако несложно понять, что все полученные таким образом графы будут изоморфны друг другу.

Теорема 5. *Пусть $k \geqslant 2$. Тогда $\mathcal{G}M(3k)$ состоит из графов трёх перечисленных ниже видов.*

1° *Графы $G_T \cdot xy \cdot zt$, где T – дерево с $v(T) = k$ и $\Delta(T) \leqslant 3$, xy, $zt \in E(G_T)$ – два различных ребра, концы которых имеют в графе G_T степень 3 (у выбранных рёбер могут быть совпадающие концы).*

2° *Графы, полученные из графов вида* $G_T - xy$ *где* T – *дерево с* $v(T) = k-1$ *и* $\Delta(T) \leqslant 3$, *а* $xy \in E(G_T)$, *добавлением новой вершины степени* 2, *смежной с* x *и* y.

3° *Графы вида* $G_{T,a}$, *где* T – *дерево с* $v(T) = k$ *и* $\Delta(T) = 3$, *а* $a \in V(T)$ – *вершина степени* 3.

Доказательство. Несложно убедиться с помощью теоремы 1, что все описанные в условии графы принадлежат $\mathcal{G}M(3k)$. Пусть $G \in \mathcal{G}M(3k)$. Тогда $v_2(G) = k+2$. По замечанию 3 мы имеем $f(G) = 2$, что ввиду формулы (3) возможно в трёх случаях:

1. $c = 2$, $v_2(G) = t$, $s = v_3(G) + 2$;

2. $c = 2$, $v_2(G) = t+1$, $s = v_3(G)$;

3. $c = 3$, $v_2(G) = t$, $s = v_3(G)$.

Разберём эти случаи.

1. По лемме 8 условия $c = 2$ и $v_2(G) = t$ означают, что все части графа G — циклы. Условие $s - v_3(G) = 2$ означает, что в графе G есть вершина степени не менее 4. Тогда по лемме 6 существует минимальный двусвязный граф H, и вершины $w_1, w_2 \in V_3(H)$ такие, что $G = H \cdot w_1w_2$. Понятно, что $v_2(H) = v_2(G) = k+2$, $v(H) = v(G)+1 = 3k+1$. Это означает, что $H \in \mathcal{G}M(3k+1)$. Теперь с помощью теоремы 4 понятно, что выполняется условие 1°.

2. В этом случае количество вершин степени 2 больше количества крайних частей на 1, поэтому существует либо крайняя часть-четырёхугольник, либо некрайняя часть с внутренней вершиной. Пусть A – такая часть, а $v \in V_2(G) \cap \mathrm{Int}(A)$. Очевидно, часть A – цикл. Тогда $\mathrm{N}_G(v) = \{x, y\}$ является неодиночным разделяющим множеством графа G. Понятно, что вершины x и y несмежны, а граф $H = G - a + xy$ двусвязен. Более того, у H те же одиночные множества, что у G и почти что те же части: единственное отличие в том, что часть A заменена на цикл меньшей длины. Таким образом, граф H по теореме 1 минимален.

Поскольку $v_2(H) = v_2(G) - 1 = k+1$, $v(H) = v(G) - 1 = 3k-1$, то $H \in \mathcal{G}M(3k-1)$. Теперь из теоремы 3 следует, что выполняется условие 2°.

3. Так как $c = 3$, по следствию 1 у графа G есть часть A степени $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = 3$, а остальные части – циклы и имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$. Из $s = v_3(G)$ по лемме 8 следует, что никакие два одиночных множества графа G не пересекаются, и каждое из них имеет степень ровно 3 в $\mathrm{BT}(G)$. Из $v_2(G) = t$ следует, что все некрайние части имеют пустую внутренность. Следовательно, часть A – шестиугольник, причем границу части A образуют три непересекающихся одиночных множества – пусть это $R_x = \{x_1, x_2\}$, $R_y = \{y_1, y_2\}$, $R_z = \{z_1, z_2\}$. Нумерация вершин выбрана так, что $x_1y_1, y_2z_2, x_2z_1 \in E(G)$.

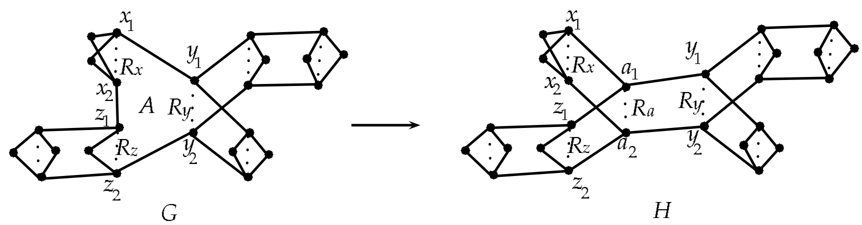

Рис. 6. Графы G и H.

Изменим граф G: удалим рёбра x_1y_1, y_2z_2 и x_2z_1, добавим вершины множества $R_a = \{a_1, a_2\}$ и рёбра a_1x_1, a_2x_2, a_1y_1, a_2y_2, a_1z_1, a_2z_2 (см. рис. 6). Полученный граф H, очевидно, двусвязен, вместо части A добавилось новое одиночное множество R_a и три части-четырёхугольника. Поэтому граф H минимален. Кроме того, $v_2(H) = v_2(G) = k+2$, $v(H) = v(G) + 2 = 3k + 2$. Поэтому $H \in \mathcal{G}M(3k+2)$, а следовательно, $H = G_T$ для дерева T с $v(T) = k$ и $\Delta(T) \leqslant 3$. Каждому одиночному множеству графа H соответствует вершина дерева T. Пусть для множеств R_a, R_x, R_y, R_z это вершины a, x, y, z соответственно. Тогда $\mathrm{N}_T(a) = \{x, y, z\}$. Теперь из построения графа $G_{T,a}$ и из построения графа H по графу G следует, что $G = G_{T,a}$. $\square$

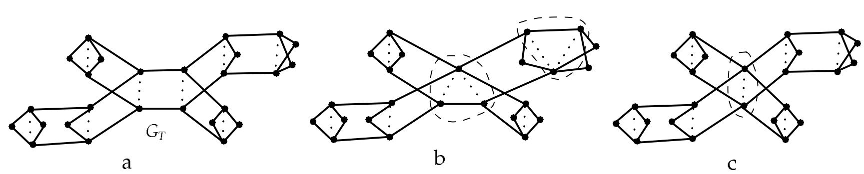

Рис. 7. Графы из $\mathcal{G}M(3k)$, полученные из $G_T \in \mathcal{G}M(3k+2)$ стягиванием двух рёбер.

Замечание 7. Пусть $G \in GM(3k)$ – граф, полученный из $G_T \in \mathcal{G}M(3k+2)$ стягиванием двух рёбер, каждое из которых соединяет вершины степени 3.

1) Тогда в графе G все крайние части – треугольники, все некрайние части имеют пустую внутренность.

2) Если стянутые рёбра графа G_T лежали в разных частях, то ровно две некрайних части графа G – треугольники: это части, полученные из частей G_T, содержащих стянутые рёбра. Остальные части – четырёхугольники. Граф G в этом случае имеет ровно k одиночных множеств и степень каждого из них в $\mathrm{BT}(G)$ равна 3. Пример такого графа изображен на рисунке 7b. Аналогично пункту 2 теоремы 4 можно показать, что для такого графа G граф $G_T \in \mathcal{G}M(3k+2)$ единственен.

3) Если стянутые рёбра графа G_T лежали в одной части-четырёхугольнике A, то эта часть исчезнет, а одиночные множества R_x и R_y, составляющие границу A, склеятся в одно множество, которое будет иметь в $\mathrm{BT}(G)$ степень 4. Все некрайние части графа G в таком случае – четырёхугольники. Пример такого графа изображен на рисунке 7c. Для такого графа G граф $G_T \in \mathcal{G}M(3k+2)$ неединственен.

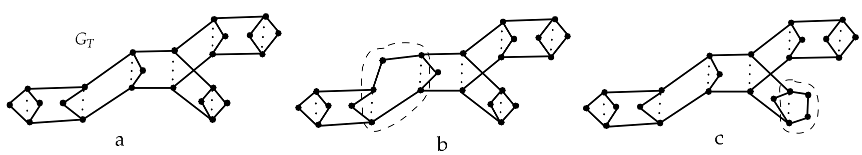

Рис. 8. Графы из $\mathcal{G}M(3k)$, полученные из $G_T \in \mathcal{G}M(3k-1)$ добавлением вершины степени 2.

Замечание 8. Пусть $G \in \mathcal{G}M(3k)$ – граф, полученный из $G_T \in \mathcal{G}M(3k-1)$ заменой ребра на путь длины 2, проходящий через новую вершину степени 2.

1) Тогда в графе G ровно $k-1$ одиночное множество, все они имеют степень 3.

2) Если вершина степени 2 добавлена в некрайнюю часть графа G_T, то в графе G получается некрайняя часть-пятиугольник, а добавленная вершина – единственная внутренняя вершина этой части. Остальные некрайние части графа G – четырёхугольники, имеют пустую

внутренность. Все крайние части графа G – треугольники. Пример такого графа изображен на рисунке 8b.

3) Если вершина степени 2 добавлена в крайнюю часть графа G_T, то в графе G получается крайняя часть-четырёхугольник с двумя внутренними вершинами. Остальные крайние части графа G – треугольники, а все некрайние части G – четырёхугольники без внутренних вершин. Пример такого графа изображен на рисунке 8c.

4) В обоих случаях граф G_T для графа G единственен.

Литература

1. G. A. Dirac, *Minimally 2-connected graphs.* — J. reine and angew. Math. **268** (1967), 204–216.
2. M. D. Plummer, *On minimal blocks.* — Trans. Amer. Math. Soc. **134** (1968), 85–94.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
4. W. T. Tutte, *A theory of 3-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
5. W. Mader, *On vertices of degree n in minimally n-connected graphs and digraphs.* —- Combinatorics, Paul Erdös is Eighty, Budapest. Vol. 2 (1996), 423–449.
6. W. Mader, *Zur Struktur minimal n-fach zusammenhängender Graphen.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
7. J. G. Oxley, *On some extremal connectivity results for graphs and matroids.* — Discrete Math. **41** (1982), 181–198.
8. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
9. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
10. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
11. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
12. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 87–106.

Karpov D. V. Minimal biconnected graphs.

A biconnected graph is called minimal, if it becomes not biconnected after deleting any edge. We consider minimal biconnected graphs that have minimal number of vertices of degree 2. Denote the set of all such graphs on n vertices by $\mathcal{G}M(n)$. It is known that a graph from $\mathcal{G}M(n)$ contains exactly $\lceil \frac{n+4}{3} \rceil$ vertices of degree 2. We prove that for $k \geqslant 1$ the set $\mathcal{G}M(3k+2)$ consists of all graphs of type G_T, where T is a tree on k vertices which vertex degrees do not exceed 3. The graph G_T is constructed of two copies of the tree T: to each pair of correspondent vertices of these

two copies that have degree j in T we add $3 - j$ new vertices of degree 2 adjacent to this pair. Graphs of the sets $\mathcal{G}M(3k)$ and $\mathcal{G}M(3k+1)$ are described with the help of graphs G_T.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
Математико-механический факультет
СПбГУ Университетский пр., 28, 198504,
Санкт-Петербург, Старый Петергоф
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 5 ноября 2013 г.