И. Л. Гуревич, В. П. Житников, Обтекание весомой гибкой оболочки плоским потоком,
Тр. сем. по краев. задачам, 1991, выпуск 26, 109–114

https://www.mathnet.ru/kukz19

выполняться (в силу (25)) лишь при дополнительном ограничении $|\varepsilon| < \mathcal{E}_1$, где $\mathcal{E}_1$, как и $\mathcal{E}_0$, зависит от ν и m ($m > 0$).

В заключение дадим уравнение свободной границы с точностью до членов I-го порядка по ε:

$$z = \lambda\left(H - 2\pi\varepsilon X(2\pi H) \cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Литература

I. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977. - 815 с.

2. Щербаков В. А. Вариационный метод в задаче об осесимметричном кавитационном течении с учетом сил поверхностного натяжения // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1979. - Вып.40. - С. 99 - 113.

3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения Эллиптического типа. М., 1973. - 576 с.

4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973. - 736 с.

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. - 1100 с.

6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. - Т. I. - 615 с.

Доложено на семинаре 3 июня 1988 г.

И.Л.Гуревич, В.П.Житников

ОБТЕКАНИЕ ВЕСОМОЙ ГИБКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ

В [I] доказана разрешимость плоской задачи обтекания несжимаемой идеальной жидкостью замкнутой гибкой невесомой оболочки при $-\frac{\pi}{2} < \varkappa \leq \frac{\pi}{2}$, где $\varkappa$ - безразмерная кривизна в критической точке. В [2] получено численное решение этой задачи. Ниже аналогичные исследования проводятся в случае весомой оболочки.

В плоскости $z = x + iy$ рассматривается течение с вектором скорости ($v_0, 0$) в бесконечно удаленной точке A, ограниченное снизу отрезками AB и $B'A$ оси x и гибкой оболочкой (гладкой симметричной относительно оси y кривой BCB', где $x(C) =$

$= 0$, $x(B')=-x(B)>0$. Пусть $\theta(s)$ – угол между осью x и касательной к оболочке ($\theta(0) = \pi/2$, $\theta(L) = 0$; s – длина дуги на BC ($0 \le s \le L$); ν – удельный вес оболочки; $T = T(s)$ – сила натяжения ее ($T(0)=T_0$); v, ρ, p, p_0 – соответственно скорость, плотность, давление жидкости и давление торможения; p_1 – давление внутри оболочки. Из условия равновесия элемента оболочки получаются равенства

$$dT/ds = \nu \sin\theta , \quad T\, d\theta/ds = \nu \cos\theta + p - p_1 .$$

Отобразим область течения на верхний единичный полукруг в плоскости $\zeta = r e^{i\sigma}$, причем $\zeta(A) = 0$, $\zeta(B) = 1$, $\zeta(C) = i$. Для комплексного потенциала и функции Жуковского имеем: $W = -\varphi_0(\zeta + 1/\zeta)/2$, $\Omega(\zeta) = \ln(v_0^{-1} dW/dz) = \omega(\zeta) + \ln(1-\zeta^2)$, $\Omega(0) = \omega(0) = 0$, $\Omega(e^{i\sigma}) = \tau(\sigma) - i\theta(\sigma)$, $\omega(e^{i\sigma}) = \lambda(\sigma) - i\mu(\sigma)$,

$$\mu(0) = \mu(\pi/2) = \theta(\pi/2) = 0 , \ \theta(0) = \pi/2, \ e^{\tau} = 2\sin\sigma\, e^{\lambda}, \ \theta = \frac{\pi}{2} - \sigma + \mu . \quad (1)$$

Отметим, что $\omega(\zeta)$ непрерывна при $|\zeta| \le 1$. Используя эти соотношения и уравнение Бернулли, а также обозначения $I = L v_0/\varphi_0$, $\beta = \rho v_0 \varphi_0/(2T_0)$, $\delta = \nu L/T_0$, $æ = L(p_1 - p_0)/T_0$ (δ и $æ$ известны), получим следующие соотношения ($0 \le \sigma \le \pi/2$):

$$d\theta/d\sigma \equiv d\mu/d\sigma - 1 = g(\sigma) = (-æ + \delta\cos\theta) I^{-1} f e^{-\lambda}/2 - 2\beta f \sin^2\sigma\, e^{\lambda} , \quad (2)$$

$$f(\sigma) = \left[1 + \frac{\delta}{2I}\int_0^{\sigma} \sin\theta\, e^{-\lambda} d\sigma\right]^{-1}, \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda} d\sigma , \quad (3)$$

$$\beta = \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2I}\int_0^{\pi/2}(æ - \delta\cos\theta) f e^{-\lambda} d\sigma\right]\left[2\int_0^{\pi/2} \sin^2\sigma\, f e^{\lambda} d\sigma\right]^{-1}, \quad (4)$$

$$\theta = \int_0^{\sigma} g\, d\sigma . \quad (5)$$

Еще одно выражение для β выведем, умножая (2) на $\cos\theta$ и интегрируя от 0 до $\pi/2$:

$$\beta = \left[1 - \frac{1}{2I}\int_0^{\pi/2} f(æ - \delta\cos\theta)\cos\theta\, e^{-\lambda} d\sigma\right]\left[2\int_0^{\pi/2} f \sin^2\sigma \cos\theta\, e^{\lambda} d\sigma\right]^{-1}. \quad (6)$$

Функции $\lambda(\sigma)$ и $\mu(\sigma)$ связаны формулой Дини, преобразованной с учетом двойной симметрии $\omega(\zeta)$:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[g(t) + 1\right] \ln|\cos t - \cos\sigma|\, dt . \quad (7)$$

В [I] методом Лере – Шаудера доказано существование $\omega(\zeta)$, удовлетворяющей (I) – (7), в случае $\delta = 0$ при условии $-\frac{\pi}{2} < \varkappa \le \frac{\pi}{2}$. Это условие обеспечивало неотрицательность β, а при $0 \le \varkappa \le \pi/2$ – неравенство $d\theta/d\sigma \le 0$, то есть выпуклость оболочки. Ниже аналогичным методом получается близкий результат при $0 \le \varkappa \le \pi/2$ и достаточно малых δ (с самого начала требуем $\delta < \pi/2$).

Пусть $u = (\theta, \lambda)$, C и C_α – соответственно пространства непрерывных и гёльдеровых функций на $[0, \pi/2]$. Пусть для $x_1 < x_2$ функция $\Phi(x, x_1, x_2)$ определена условиями: $\Phi = x_1$ при $x < x_1$, $\Phi = x$ при $x_1 \le x \le x_2$, $\Phi = x_2$ при $x > x_2$. Введем преобразование A на $E = C \times C$ следующим образом. Для $u_1 = (\theta_1, \lambda_1) \in E$ находим $\theta_0 = \Phi(\theta_1, -\varepsilon, \pi/2 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – малое число. Затем последовательно (с заменой θ, λ на θ_0, λ_1) находим I, f, β, g из (3), (4). В итоге с помощью (5), (7) получаем $u_2 = (\theta_2, \lambda_2) = A u_1$.

Учитывая, что $(1+\delta)^{-1} < f < (1-\delta\varepsilon)^{-1}$, легко доказать, что при малых ε оператор A вполне непрерывен в E, причем $Au \in C_\alpha \times C_\alpha$ с некоторым показателем $\alpha \in (0,1)$. Введем множество $E_0 = E_0(N_1, N_2, \varepsilon)$, состоящее из таких $u = (\theta, \lambda)$, что $-\frac{\varepsilon}{2} \le \theta \le \frac{\pi + \varepsilon}{2}$, $-N_1 \le \lambda \le N_2$. Докажем, что при некоторых N_1, N_2, ε на границе E_0 нет решений уравнения $u = Au$. Пусть $u \in E_0$, $u = Au$. Тогда $\theta_0 = \theta$, выполняются (I) – (7), и, как легко видеть, $d\theta/d\sigma \in C$. Получим некоторые оценки этого решения.

I°. Прежде всего с помощью неравенства Иенсена имеем

$$I \geqslant \frac{1}{2} \exp\left(- \int_0^{\pi/2} \lambda \, d\sigma \right) = \frac{1}{2} .$$

2°. Пусть $\max \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi+\varepsilon}{2}\right]$ достигается при $\sigma = \sigma_0 > 0$; тогда здесь $d\theta/d\sigma = 0$, $\cos\theta \le 0$. С другой стороны, здесь

$$\frac{d\theta}{d\sigma} < -\frac{2\varkappa}{\pi(1+\delta)} e^{N_1 - N_2} - 2\beta f(\sigma_0) \sin^2\sigma_0 \, e^{\lambda(\sigma_0)} ,$$

причем β представимо в виде

$$\beta = \left[\frac{\pi}{2} - f(\sigma_1)(\varkappa - \delta\cos\theta(\sigma_1))\right]\left[\frac{\pi}{2} f(\sigma_2) e^{\lambda(\sigma_2)}\right]^{-1}, \ \sigma_{1,2} \in (0, \pi/2) .$$

Если $\varkappa \le 1/2$, то $\beta > 0$ при $\varepsilon < \varepsilon_1(N_1, N_2)$. Если $\frac{1}{2} < \varkappa \le \frac{\pi}{2}$, то $\beta > -\varepsilon M(N_1, N_2)$ при $\varepsilon < \varepsilon_1$. В обоих случаях $d\theta/d\sigma < 0$. Из этого противоречия заключаем, что $\theta < \pi/2$ на $(0, \pi/2]$, $f \le 1$ и $\beta \ge 0$ ($\beta = 0$ лишь при $\sigma = 0$, $\varkappa = \pi/2$).

3^0. Пусть $1/2 \le \varkappa \le \pi/2$, $\varkappa - \delta \ge c > 0$. В силу (3) $d\theta/d\sigma \le 0$ (а значит, $0 \le \theta \le \pi/2$),

$$\frac{d\mu}{d\sigma} < f_1 = 1 - \frac{c}{2(1+\delta)} e^{-\lambda}, \mu \le \int_0^{\sigma} f_1\, d\sigma = F(\sigma) \le \sigma, F(0) = 0, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_1 = \frac{\pi - c}{2}.$$

Так как $d\mu/d\sigma < 1$, то из (7) вытекает $\lambda > -\ln 2$, и $f_1 > a_2 = 1 - 2c/(1+\delta)$. Из этих соотношений легко получить оценку $\mu < \gamma_0 < \pi/2$, где (σ_0 , γ_0) – точка пересечения кривой $\gamma = F(\sigma)$ и прямой $\gamma = a_1 + a_2(\sigma - \pi/2)$. Аналогично выводится $\mu > -\gamma_0$. Кроме того, из $\lambda > -\ln 2$ и (4) выводится оценка $\beta < 12$. Применение к (3) теоремы Зигмунда ([2], с. 110) и неравенства Гёльдера дает $\|\mu\|_\alpha < M_1$ ($\alpha = \alpha(c)$, $M_1 = M_1(c)$), откуда, в частности, $\lambda < M_2(c)$.

4^0. Пусть $0 \le \varkappa \le 1/2$. Так как

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^2\sigma\, e^{\lambda} \cos\theta\, d\sigma = \int_0^{\pi/2} e^{\tau} \cos\theta\, d\sigma = \frac{1}{4} e^{\omega(0)} = \frac{1}{4},$$

то из (6) можно получить $\beta > 2(1 - 2\delta\varepsilon)$. С учетом этого, а также неравенства $\cos\theta < \frac{\pi}{2} - \theta$ (при $\theta < \frac{\pi}{2}$), имеем

$$\frac{d\theta}{d\sigma} < p\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - q,\ p = \frac{\delta}{2(1-\delta\varepsilon)} e^{N_1},\ q(\sigma) = \frac{2(1-2\delta\varepsilon)}{1+\delta} \sin^2\sigma\, e^{N_1}.$$

Известный принцип сравнения для дифференциальных уравнений приводит к оценкам $\theta < W(\sigma)$, $d\theta/d\sigma < dW/d\sigma$, где $dW/d\sigma = p(\frac{\pi}{2} - W) - q$, $W(0) = \pi/2$. Решая эту линейную задачу Коши, получим

$$\frac{d\theta}{d\sigma} < \frac{4(1-2\delta\varepsilon)}{3(1+\delta)} e^{N_1}\left(h e^{h} - \frac{6}{\pi^2}\right)\sigma^2,\ h(\delta, \varepsilon, N_1) = \frac{\pi}{2} \frac{\delta e^{N_1}}{1 - \delta\varepsilon}. \quad (8)$$

Пусть $h e^{h} < 6/\pi^2$. Тогда $d\theta/d\sigma \le 0$, $0 \le \theta \le \pi/2$, и можно положить в предыдущих оценках $\varepsilon = 0$. Как и выше, имеем $\lambda > -\ln 2$, $\beta < 12$. Так как $\beta > 1/2$, то из (3) $d\mu/d\sigma < f_2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\sigma$, $|\mu| < 3\pi/8$. Действуя, как в конце п. 3^0, получим $\lambda < M_3$, где M_3 – абсолютная постоянная.

Полученные в 1^0 – 4^0 априорные оценки решения $u \in E_0$ (N_1, N_2, ε) позволяют доказать теорему существования. Положим $N_1 = \ln 2$,

$N_2 = max(M_2(c), M_3)$, $\varepsilon < \varepsilon_1(N_1, N_2)$, $h_0 = h(\delta, 0, \ln 2) = \delta\pi$. Пусть либо $1/2 \le \varkappa \le \pi/2$, $\varkappa - \delta \ge c > 0$, либо $0 \le \varkappa < 1/2$, $h_0 \exp(h_0) < 6/\pi^2$ (то есть $\delta < 0{,}41$). Тогда из вышеизложенного вытекает, что на границе E_0 уравнение $u = Au$ не имеет решений. То же относится к семейству уравнений $u = A_k u$, получаемых заменой $\varkappa$, δ на $k\varkappa + (1-k)\pi/2$, $k\delta$ ($0 \le k \le 1$). При $k=0$ уравнение имеет единственное решение $\lambda = 0$, $\theta = \pi/2 - \sigma$, описывающее обтекание окружности. Как показано в [I], преобразование $u - A_0 u$ локально взаимно однозначно в окрестности этой точки. Таким образом, применение принципа Лере – Шаудера завершает доказательство разрешимости задачи.

При численном решении функция $\omega(\zeta)$ ищется в виде $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где ω_1 – степенной ряд, а ω_2 используется для учета особенностей ω вблизи точек B, B' закрепления оболочки на плоскости $y=0$. Наличие ω_2 позволяет ускорить сходимость ряда. Вместо параметров $\varkappa$, δ задавались $\varkappa$ и $\gamma = I\nu/(\rho v_0^2)$. Преобразованное в соответствии с этим уравнение (2) удовлетворялось в конечном числе точек, и методом Ньютона находилось конечное число членов ряда.

Кроме исследованного выше случая задания $\theta(B) = \pi/2$, был рассмотрен в расчетах вариант задания $x(B') = 2L/\pi$ с неизвестным значением $\theta(B)$. В обоих случаях получены значения параметра $t = 2IT_0/(\rho v_0^2 L)$. Форма дуги BC в координатах $x_1 = x/x(B')$, $y_1 = y/x(B')$ и эпюры натяжения при $\varkappa = 0$ представлены на рис. I, 2.

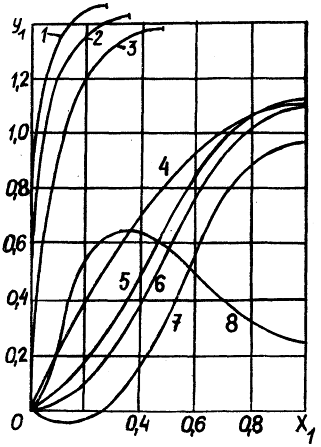

Рис. I

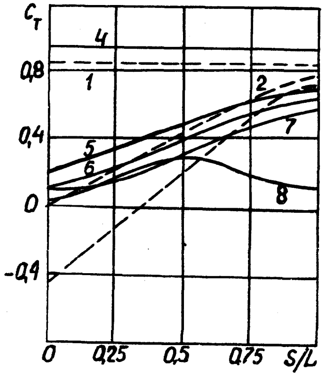

Рис. 2

Кривые I – 3 отвечают первому случаю, а 4 – 8 – второму. Соответствующие значения γ , t – в табл. I.

Т а б л и ц а I

№	I	2	3	4	5	6	7	8
γ	0	I,739	2,654	0	I,4	I,549	I,5	I,376
t	I,5	0	–0,75	I,69	0,329	0,I76	0,224	0,03I

Численное исследование показывает, что в первом случае существует единственное решение, но при $\gamma >$ I,739 получается $t<0$, что не имеет физического смысла. С ростом γ значение t убывает, оболочка проседает и концы ее раздвигаются. Более сложным оказывается описание результатов во втором случае. Здесь, как правило, существует счетное множество решений (при фиксированном γ). Одна из ветвей решений характеризуется выпуклостью оболочки в ее средней части. При движении по этой ветви вначале γ возрастает от значения $\gamma = 0$; при этом t и $\theta(B)$ убывают. Затем появляются решения с волнообразной деформацией оболочки. При увеличении числа волн угол $\theta(B)$ периодически меняет знак, а γ колеблется вблизи некоторого значения. Решениям из другой ветви соответствует впадина в средней части (кривая 8). Непрерывный переход по параметрам между ветвями невозможен.

Л и т е р а т у р а

I. Г у р е в и ч И. Л. О разрешимости задачи обтекания газового пузыря плоским потоком жидкости // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 6. – С. 19 – 24.

2. Ж и т н и к о в В. П., Т е р е н т ь е в А. Г. Безотрывное обтекание гибкой оболочки // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. М.,1984.– № 5. – С. I5 – 20.

3. Б и р к г о ф Г., С а р а н т о н е л л о Э. Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1966. – 466 с.

Доложено на семинаре 3 июня 1988 г.