И. Л. Гуревич, Течение Рябушинского при наличии струйной или капиллярной пленки, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1975, выпуск 12, 39–49

https://www.mathnet.ru/kukz369

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 12 *Труды семинара по краевым задачам* *1975*

ГУРЕВИЧ И. Л.

ТЕЧЕНИЕ РЯБУШИНСКОГО ПРИ НАЛИЧИИ СТРУЙНОЙ ИЛИ КАПИЛЛЯРНОЙ ПЛЕНКИ

Течения со свободной границей конечной длины, представляющей собой струйную или капиллярную пленку, рассматривались в [1—3] при условии, что остальная часть границы образована отрезками прямых. Случай криволинейной границы исследован в [4].

В настоящей работе при более общих предположениях, чем в [1—4], получены теоремы существования и единственности. Кроме того, доказано существование нетривиального решения однородной задачи в случае капиллярной пленки.

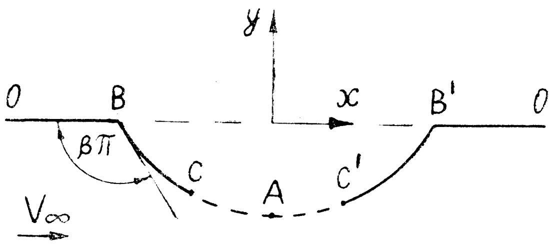

Рис. 1.

1. Рассматривается плоское установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости, область которого изображена на рис. 1. $OB'C'$ и CBO—участки твердой стенки, $C'AC$ — свободная линия тока. Дуги $B'C'$ и CB расположены симметрично относительно оси y. Угол между OB' и касательной к $B'C'$ в точке B' равен $\beta\pi$. Длина дуги BC равна L, а $x(C)=X$. Дуга BC задается естественным уравнением

$$\alpha=\Phi(l), \tag{1}$$

где α — угол наклона вектора скорости к оси x, l — длина дуги, отсчитываемая от точки B, отнесенная к L. Свободная граница представляет собой или струйную, или капиллярную пленку, причем α непрерывно меняется при переходе через точку C.

На свободной границе выполняется соотношение [1—2]

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{p_0 - p_1}{T}\frac{1}{V} - \frac{\rho}{2T}V, \tag{2}$$

где V — модуль вектора скорости, φ — потенциал скорости, ρ — плотность, p_0 — давление в точке торможения, p_1 — давление во внешней среде, $T > 0$ для капиллярной и $T < 0$ для струйной пленки характеризует интенсивность поверхностного натяжения или струйной пленки.

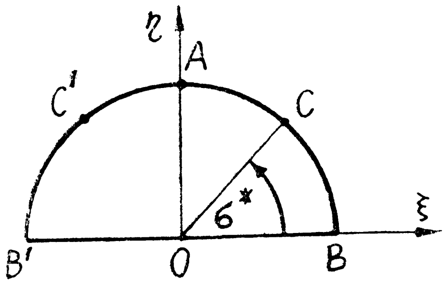

Рис. 2.

Отобразим область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ на единичный полукруг в плоскости $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\sigma}$ (рис. 2):

$$W = NV_\infty(\zeta + \zeta^{-1}). \tag{3}$$

Мы будем предполагать симметричность течения и рассматривать его левую половину, которой соответствует правая четверть круга. Функцию Жуковского представим в виде [1]:

$$\frac{1}{V_\infty}\frac{dW}{dz} = \frac{[(1+\zeta^2)^{2\beta} - (1-\zeta^2)^{2\beta}]^2}{16\beta^2\zeta^2(1-\zeta^2)^{2\beta-2}}e^{-\Omega(\zeta)}, \tag{4}$$

где $\Omega(\zeta) = \tau + i\mu$ — непрерывная функция, $\Omega(0) = 0$. Из (4) легко получить при $\zeta = e^{i\sigma}$:

$$\alpha(\sigma) = \pi(1-\beta) - 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sin\pi\beta\,(\mathrm{tg}\,\sigma/2)^{2\beta}}{1 - \cos\pi\beta\,(\mathrm{tg}\,\sigma/2)^{2\beta}} + \mu(\sigma), \tag{5}$$

$$\frac{V(\sigma)}{V_\infty} = \sin^2\sigma\left[\left(\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\right)^{2\beta} - 2\cos\pi\beta + \left(\mathrm{tg}\frac{\sigma}{2}\right)^{2\beta}\right]e^{-\tau(\sigma)}/4\beta^2. \tag{6}$$

С помощью (3), (5), (6) можно переписать (2) в виде:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \sin \pi\beta F + \delta G e^{-\tau} - \gamma F e^{\tau}. \tag{7}$$

(7) выполняется при $\sigma \in (\sigma^*, \pi/2)$. Здесь $F(\sigma)$ и $G(\sigma)$ — неотрицательные при $\beta \in [1/2, 1]$ функции, причем

$$F(\sigma) > a_1 \sigma^{2\beta-1}, \quad \delta = -\rho V_\infty^2 N/2T, \quad \gamma = 2\beta N(p_0 - p_1)/T \tag{8}$$

— безразмерные числа.

При $\sigma \in (0, \sigma^*)$, на образе дуги BC, формулы (3), (5), (6) позволяют получить:

$$\frac{dl}{d\sigma} = 2m \,\mathrm{Fe}^{\tau}, \quad m = \frac{N}{L}, \tag{9}$$

откуда

$$2m \int_0^{\sigma^*} \mathrm{Fe}^{\tau}\, d\sigma = 1, \tag{10}$$

$$2m \int_{\sigma^*}^{\pi/2} \mathrm{Fe}^{\tau}\, d\sigma = X/L = X_0. \tag{11}$$

Условие непрерывности α в точке C и (7) дают:

$$\gamma = \frac{\Phi(1) + \iota \int_{\sigma^*}^{\pi/2} G e^{-\tau}\, d\sigma}{\int_{\sigma^*}^{\pi/2} \mathrm{Fe}^{\tau}\, d\sigma}. \tag{12}$$

Наконец, учитывая, что $\mu(\xi) = \mu(\eta) = 0$ при $\xi, \eta \in [0, 1]$, получим с помощью формулы Гильберта:

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu(t) \frac{\sin 2t}{\cos^2 t - \cos^2 \sigma}\, dt \equiv T[\mu(\sigma)]. \tag{13}$$

Оператор T непрерывен в пространстве Гёльдера с любым показателем $\varkappa \in (0, 1)$; его норму обозначим через $d_\varkappa$, а норму элемента этого пространства — через $\|\cdot\|_\varkappa$.

Соотношение (7), (9)—(13) представляют собой систему уравнений относительно параметров $\sigma^* \in (0, \pi/2)$, $m > 0$, γ, и функций $l(\sigma)$ при $\sigma \in [0, \sigma^*]$, $\mu(\sigma)$ при $\sigma \in [\sigma^*, \pi/2]$. Заменой независимой переменной можно добиться того, что интервалы $[0, \sigma^*]$ и $[\sigma^*, \pi/2]$ перейдут в интервалы с известными концами, и получить операторное уравнение вида $u = Au$ с вполне непрерывным оператором. Проверка выполнения всех условий теоремы Лере — Шаудера, за исключением априорных оценок решения, не представляет труда. Оставшуюся часть этого пункта мы посвятим получению оценок.

Будем предполагать, что

$$1+\frac{\varepsilon}{\pi}\leqslant\beta\leqslant 1,\quad \frac{\pi}{2}(1-2\beta+\varepsilon)\leqslant\Phi(l)\leqslant\frac{\pi-\varepsilon}{2},\quad \Phi(1)\geqslant 0,\qquad (14)$$

где $\varepsilon>0$; в частности, $|\Phi(l)|\leqslant(\pi-\varepsilon)/2$.

Запишем (2) в виде:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}=\frac{\gamma}{2\beta}V^{-1}-\frac{\delta}{V_\infty^2}V.\qquad (2')$$

Из (12), (14) видно, что $\gamma>0$ при $\delta\geqslant 0$. При $\delta<0$ будем предполагать, что $\gamma>-8\delta\exp[2\|\tau\|]/\beta>0$, где $\|\tau\|=\max|\tau(\sigma)|$. В этом предположении мы получим оценки вида $\|\tau\|<b_1$, $b_2<\gamma<b_3$, причем $b_2>-8\delta\exp[2b_1]/\beta$. Используя этот факт, можно показать, что наше предположение допустимо.

Продифференцируем (2′) по φ; учитывая, что $\partial\ln V/\partial\varphi=-\partial\alpha/\partial\psi$, получим:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2}=\frac{A}{2\beta V}\,\frac{\partial\alpha}{\partial\psi},\qquad (15)$$

где $A=\gamma+2\beta\delta(V/V_\infty)^2$. При $\delta\geqslant 0$ $A>0$. Если $\delta<0$, то, используя (6) и сделанное выше предположение, можно показать, что $A>\gamma+8\delta\exp[2\|\tau\|]/\beta>0$.

Предположим, что во внутренней точке свободной границы $C'AC$ $\alpha(W)$ достигает абсолютного максимума. В этой точке $\partial^2\alpha/\partial\varphi^2\leqslant 0$, $\partial\alpha/\partial\psi>0$, что противоречит (15). Аналогично показывается, что на $C'AC$ α не достигает абсолютного минимума. Отсюда вытекает, что

$$\frac{\pi}{2}(1-2\beta+\varepsilon)\leqslant\alpha(\sigma)\leqslant\frac{\pi-\varepsilon}{2}.\qquad (16)$$

Используя (16) и (5), получим:

$$|\mu(\sigma)|\leqslant\frac{\pi-\varepsilon}{2}.\qquad (17)$$

Оценим m сверху, из (11) и (16):

$$2m\cos\frac{\pi-\varepsilon}{2}\int_{\sigma^*}^{\pi/2}Fe^{\tau}\,d\sigma\leqslant X_0.\qquad (11')$$

Умножим (10) на $\cos[(\pi-\varepsilon)/2]$ и сложим с (11′):

$$2m\cos\frac{\pi-\varepsilon}{2}\int_0^{\pi/2}Fe^{\tau}\,d\sigma\leqslant X_0+\cos\frac{\pi-\varepsilon}{2},$$

или

$$m < \frac{X_0 + \cos\dfrac{\pi - \varepsilon}{2}}{2\cos\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}} \int_0^{\pi/2} \mathrm{F} e^{\tau}\, d\sigma < \frac{a_1}{\int_0^{\pi/2} F d\sigma} \exp \frac{\int_0^{\pi/2} \tau F d\sigma}{\int_0^{\pi/2} F d\sigma}.$$

Здесь мы использовали неравенство Иенсена [5, с. 204]. Принимая во внимание (8), (13) и известное равенство

$$\int_0^{\pi/2} uT[v]\, d\sigma = -\int_0^{\pi/2} vT[u]\, d\sigma,$$

найдем окончательно:

$$m < \frac{a_1}{a_2} \exp\left\{\frac{\pi - \varepsilon}{2a_2} \int_0^{\pi/2} |T[F]|\, d\sigma\right\} = a_3. \tag{18}$$

Из (17) и теоремы Зигмунда [5, с. 200] следует, что при $p \in (1,\ \pi/(\pi - \varepsilon))$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\pm p\tau}\, d\sigma < \frac{\pi}{2\cos\left(p\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}\right)}. \tag{19}$$

Оценим снизу σ^* и $\pi/2 - \sigma^*$. В силу (10), (18)

$$\int_0^{\sigma^*} \mathrm{F} e^{\tau}\, d\sigma > \frac{1}{2a_3}. \tag{20}$$

Последовательное применение к (20) неравенств Гёльдера и (19) дает:

$$\frac{1}{2a_3} < \|F\| (\sigma^*)^{1-1/p} \left(\int_0^{\pi/2} e^{p\tau}\, d\sigma\right)^{1/p} < a_4 (\sigma^*)^{1-1/p}.$$

Отсюда и из аналогичных рассуждений будем иметь:

$$\sigma^* > a_5, \quad \pi/2 - \sigma^* > a_5. \tag{21}$$

Далее, с помощью (19) получим:

$$\int_{\sigma^*}^{\pi/2} \mathrm{G} e^{-\tau}\, d\sigma, \quad \int_0^{\sigma^*} \mathrm{F} e^{\tau}\, d\sigma, \quad \int_{\sigma^*}^{\pi/2} \mathrm{F} e^{\tau}\, d\sigma < a_6. \tag{22}$$

Оценим снизу знаменатель в (12). Из (22) с помощью неравенства Иенсена найдем:

$$a_7 > \int_{\sigma^*}^{\pi/2} \mathrm{F}e^{\tau} d\sigma > \left(\int_{\sigma^*}^{\pi/2} F d\sigma\right) \exp\left\{\left(\int_{\sigma^*}^{\pi/2} F\tau d\sigma\right)\left(\int_{\sigma^*}^{\pi/2} F d\sigma\right)^{-1}\right\}, \qquad (23)$$

$$a_7 > \int_0^{\sigma^*} \mathrm{F}e^{\tau} d\sigma > \left(\int_0^{\sigma^*} F d\sigma\right) \exp\left\{\left(\int_0^{\sigma^*} F\tau d\sigma\right)\left(\int_0^{\sigma^*} F d\sigma\right)^{-1}\right\}. \qquad (23')$$

Пусть $B_1 = \int_0^{\sigma^*} F\tau d\sigma$, $B_2 = \int_{\sigma^*}^{\pi/2} F\tau d\sigma$. Имеем:

$$B_1 + B_2 \geqslant -\left|\int_0^{\pi/2} F\tau d\sigma\right| = -\left|\int_0^{\pi/2} \mu T[F]\, d\sigma\right| > -a_8. \qquad (24)$$

Принимая во внимание (23′), (21), (8), получим:

$$B_1 < \int_0^{\sigma^*} F d\sigma \ln \frac{a_7}{\int_0^{\sigma^*} F d\sigma} < a_9. \qquad (25)$$

Вычитая (25) из (24), найдем, что $B_2 > -a_8 - a_9$. Подставляя это неравенство в (23) и еще раз используя (21), (8), будем иметь окончательно:

$$\int_{\sigma^*}^{\pi/2} \mathrm{F}e^{\tau} d\sigma > a_{10}. \qquad (26)$$

Теперь можно оценить γ сверху. В силу (12), (22), (26)

$$\gamma < a_{11} + \delta a_{12} \text{ при } \delta \geqslant 0, \quad \gamma < a_{11} \text{ при } \delta < 0. \qquad (27)$$

С помощью неравенств Гёльдера, (22) (27) из уравнения (7) легко получается:

$$\|\mu(\sigma)\|_{\varkappa} < a_{13} + |\delta|\, a_{14}, \quad \varkappa = 1 - 1/p, \quad \sigma \in [\sigma^*, \pi/2]. \qquad (28)$$

Аналогично из уравнения (9) и неравенств (18), (22) найдем при $\sigma \in [0, \sigma^*]$:

$$\|l(\sigma)\|_{\varkappa} < a_{15}. \qquad (29)$$

Будем считать функцию $\Phi(l)$ в (1) непрерывно дифференцируемой, причем $\max|\Phi'(l)| < a_{16}$. Тогда из (5) и (29) нетрудно получить:

$$\|\mu(\sigma)\|_{\varkappa} < a_{17}, \quad \sigma \in [0, \sigma^*]. \qquad (30)$$

Из непрерывности $\mu(\sigma)$ при $\sigma = \sigma^*$ и (28), (30) вытекает:

$$\|\mu(\sigma)\|_{\varkappa} < a_{18} + |\delta| a_{14}, \quad \sigma \in [0, \pi/2]. \qquad (31)$$

Наконец, в силу (13)

$$\|\tau\| < \|\tau\|_{\varkappa} < d_{\varkappa}(a_{18} + |\delta| a_{14}) = a_{19} + |\delta| a_{20} = b_1. \qquad (32)$$

Если $\delta \geqslant 0$, то все необходимые оценки уже получены. Пусть $\delta < 0$. Оценим из (12) величину γ снизу с помощью (22):

$$\gamma > a_{21} \cdot \Phi(1) + \delta \cdot a_{22} = b_2. \qquad (33)$$

Выясним теперь, при каких условиях наше исходное предположение относительно γ допустимо, то есть

$$b_2 > -8\delta \exp(2b_1)/\beta. \qquad (34)$$

(34) является следствием неравенства

$$|\delta| [a_{22} + 8 \exp(2a_{19} + 2a_{20}|\delta|)/\beta] \leqslant a_{21} \Phi(1),$$

которое выполняется при достаточно малых $|\delta|$, если $\Phi(1) \geqslant 0$.

Проведенные рассуждения показывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция* $\Phi(l)$ *непрерывно дифференцируема и выполняются неравенства* (14). *Тогда существует такое* $\delta_0 \geqslant 0$, *что при* $\delta \in [-\delta_0, \infty]$ *исходная задача имеет решение, причем* $\delta_0 > 0$ *при* $\Phi(1) > 0$.

Применяя аналогичные методы, можно доказать теорему существования еще в двух случаях:

а) $\Phi(1) \in [-(\pi - \varepsilon)/2, 0]$, $\delta > \delta_0 > 0$, где δ_0 — достаточно большое число;

б) $|\Phi(1)|$ и $|\delta|$ — достаточно малы.

2. Докажем единственность решения рассмотренной в п. 1 задачи при условии, что во всем течении $|\alpha| < \pi/2$, а $\delta \geqslant 0$. Для этого рассмотрим краевую задачу для функции $y(x, \psi)$. Область изменения переменной $\omega = x + i\psi$ — нижняя полуплоскость. Образы точек O, A, B, B', C, C' в плоскости ω будем обозначать теми же буквами.

Частные производные y_x и y_ψ функции $y(x, \psi)$ связаны с составляющими вектора скорости V_x и V_y соотношениями (см. [6]):

$$y_x = \frac{V_y}{V_x}, \quad y_\psi = \frac{1}{V_x}, \quad V^2 = \frac{1 + y_x^2}{y_\psi^2}. \qquad (35)$$

В плоскости ω функция $y(x, \psi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y_{xx} - 2\frac{y_x}{y_\psi} y_{x\psi} + \frac{1+y_x^2}{y_\psi^2} y_{\psi\psi} = 0,$$

а разность двух решений $u = y - \bar{y}$ — уравнению

$$u_{xx} - 2\frac{y_x}{y_\psi} u_{x\psi} + \frac{1+y_x^2}{y_\psi^2} u_{\psi\psi} + Pu_x + Qu_y = 0, \tag{36}$$

где

$$P = -2\frac{y_{x\psi}}{y_\psi} + \frac{y_{\psi\psi}(y_x + \bar{y}_x)}{y_\psi^2},$$

$$Q = 2\frac{y_{x\psi}\bar{y}_x}{y_\psi \bar{y}_\psi} - \frac{\bar{y}_{\psi\psi}(1+y_x^2)(y_\psi + \bar{y}_\psi)}{y_\psi^2 \bar{y}_\psi^2}.$$

Первые производные функций $y(x, \psi)$, $\bar{y}(x, \psi)$, $u(x, \psi)$ непрерывны в замкнутой области, исключая точки B, B', а вторые — исключая точки B, B', C, C'. Из условия $|\alpha| < \pi/2$ и (35) заключаем, что уравнение (36) эллиптично во всей области изменения ω, исключая точки B, B', C, C'. Так как в (36) не входит член вида R_u, то (см., например, [7]) $u(\omega)$ не может иметь экстремумов внутри области. Кроме того, если в граничной точке, не совпадающей с B, B', C, C', достигается абсолютный экстремум, то справедливо известное утверждение о знакоопределенности нормальной производной.

Выведем граничные условия для функции $u(\omega)$. В силу (2)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\gamma}{2\beta} - \frac{\delta}{V_\infty^2} V^2, \tag{2'}$$

где s — дуговая абсцисса на дуге $C'AC$ в плоскости течения. Используя известную формулу для кривизны линии $y = y(x)$, получим:

$$y_{xx} = \frac{\gamma}{2\beta}(1+y_x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\delta}{V_\infty^2}\frac{(1+y_x^2)^{\frac{5}{2}}}{y_\psi}.$$

Для разности решений будем иметь на $C'AC$:

$$u_{xx} - du_\psi = e\Delta\gamma + g\cdot u_x, \tag{37}$$

где

$$d = B\frac{\delta}{V_\infty^2}\,\frac{(y_\psi + \bar{y}_\psi)(1 + y_x^2)}{y_\psi^2 \cdot \bar{y}_\psi^2}, \quad l = (1 + y_x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$g = D\frac{\bar{\gamma}}{2\beta}\,\frac{y_x + \bar{y}_x}{(1 + y_x^2)^{3/2} + (1 + \bar{y}_x^2)^{3/2}} - B\frac{\delta}{V_\infty^2}\,\frac{y_x + \bar{y}_x}{y_\psi^2},$$

$$B = \left[\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1 + y_x^2}{y_x^2}\right)^k \left(\frac{1 + \bar{y}_x^2}{\bar{y}_x^2}\right)^{4-k}\right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1 + y_x^2}{y_x^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{1 + \bar{y}_x^2}{\bar{y}_x^2}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{-1} > 0,$$

$$D = \sum_{k=0}^{2}(1 + y_x^2)^k (1 + \bar{y}_x^2)^{2-k}.$$

В (37) $\Delta\gamma = \gamma - \bar{\gamma}$ — разность значений γ, соответствующих решениям $y(x, \psi)$ и $\bar{y}(x, \psi)$.

Далее, на $OB'C'$ и CBO $u(x, 0) = 0$. Наконец, используя тот факт, что V_∞ известно, легко показать, что на бесконечности $u = 0$.

Пусть $\delta > 0$. Тогда $d \geqslant d_0 > 0$. Из (37) и принципа максимума вытекает, что во внутренних точках отрезка $C'AC$, при $|x| < X$, функция $u(\omega)$ не может достигать абсолютного максимума, если $\Delta\gamma \geqslant 0$, или абсолютного минимума, если $\Delta\gamma \leqslant 0$.

Предположив, что $u \not\equiv 0$, $\Delta\gamma = 0$, мы получим очевидное противоречие.

Предположим, что $u \not\equiv 0$, а $\Delta\gamma > 0$. Тогда абсолютный максимум $u(x, \psi)$, равный нулю, достигается в точке C, при $x = X$. В этой точке $u_x = 0$, $u_\psi \geqslant 0$, а в некоторой ее окрестности при $\psi = 0$, $u_{xx} \leqslant 0$, так как u_x непрерывна во всей этой окрестности, а u_{xx} — исключая лишь саму точку C. Так как u_ψ также непрерывна, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $x \in (-\varepsilon + X, X)$ будет $u_{xx} \leqslant 0$, $u_\psi > -\Delta\gamma/(2d_0)$, $|gu_x| < \gamma/2$. Поэтому здесь $u_{xx} - du_\psi < l\Delta\gamma + gu_x$, что противоречит (37). Аналогичное противоречие получаем, предположив, что $\Delta\gamma$.

Итак, при $\delta > 0$ единственность решения доказана.

Если $\delta = 0$, то из (2') следует, что свободная граница совпадает с дугой окружности, радиус и центр которой однозначно определяется условием непрерывности α в точках C и C'.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1 и $\delta \geqslant 0$, то решение исходной задачи единственно.*

3. Рассмотрим частный случай исходной задачи: участки $B'C'$ и BC отсутствуют, $\beta = 1$, $\delta > 0$. Обозначим $\lambda = -\delta$, и будем считать, что $V_\infty = 1$, $N = 1$.

Для функции $\Omega(W) = \tau + i\mu = i \ln dW/dz$ получается следующая краевая задача в области $\psi \leqslant 0$, $\varphi \geqslant 0$: $\lambda = \mu = 0$ на бесконечности, $\mu = 0$ при $\varphi = 0$ и при $\psi = 0$, $\varphi \geqslant 1$, а при $\psi = 0$, $\varphi \in (0, 1)$,

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \lambda \left[e^{-\tau} - e^{\tau} \frac{\int\limits_0^1 e^{-\tau} d\varphi}{\int\limits_0^1 e^{\tau}\, d\varphi} \right]. \tag{38}$$

Как отмечается в [1], эта краевая задача допускает тривиальное решение $\Omega(W) \equiv 0$. Мы докажем существование нетривиальных решений при некоторых значениях λ. Продифференцируем (38):

$$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2} = -\lambda \frac{d\tau}{d\varphi} \left[e^{-\tau} + e^{\tau} \frac{\int\limits_0^1 e^{-\tau} d\varphi}{\int\limits_0^1 e^{\tau}\, d\varphi} \right]. \tag{39}$$

Учитывая, что $\tau = 0$ на бесконечности, и используя формулу Келдыша — Седова, получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\tau(\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}} = 0. \tag{40}$$

Рассмотрим аналитическую функцию $\Omega_1(W) = \tau_1 + i\mu_1 = \partial\tau/\partial\varphi + i\partial\mu/\partial\varphi$. Очевидно, что при $\varphi \geqslant 1$, $\psi = 0$ $\partial\tau/\partial\psi = 0$; при $\varphi = 0$ $\tau_1 = 0$; на бесконечности $\Omega_1 = 0$. Поскольку в силу (40)

$$\tau(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \tau_1 d\varphi - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}} \int\limits_0^\varphi \tau_1 d\varphi - C[\tau_1],$$

то при $\psi = 0$, $\varphi \in (0, 1)$ из (39) вытекает:

$$\frac{d\mu_1}{d\varphi} = -\lambda\tau_1 e^{C[\tau_1]} \left[e^{-\int\limits_0^\varphi \tau_1 d\varphi} + e^{\int\limits_0^\varphi \tau_1 d\varphi} \frac{\int\limits_0^1 \exp\left[-\int\limits_0^\varphi \tau_1 d\varphi\right] d\varphi}{\int\limits_0^1 \exp\left[\int\limits_0^\varphi \tau_1\, d\varphi\right] d\varphi} \right],$$

или

$$\frac{d\tau_1}{d\psi} = \lambda\tau_1 \boldsymbol{R}[\tau_1].$$

Решая краевую задачу для гармонической функции $\tau_1(w)$, получим при $\psi = 0$, $\varphi \in [0, 1]$:

$$\tau_1(\varphi) = \lambda \boldsymbol{D}[\tau_1 \boldsymbol{R}[\tau_1]] = \lambda \boldsymbol{A}[\tau_1],$$

$$\boldsymbol{D}[u(\varphi)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 u(t) \ln\left|\frac{\varphi + t}{\varphi - t}\right| dt.$$

Оператор $\boldsymbol{A}$ — положительный. Если $\tau_1(\varphi) \geqslant 0$ при $\varphi \in [0, 1]$ и $\|\tau_1\| < r$, то $\boldsymbol{R}[\tau_1] > 2\exp(-2r)$; поэтому оператор $\boldsymbol{A}$ имеет на множестве K_r (K — конус неотрицательных функций на $[0, 1]$) монотонную миноранту $2\boldsymbol{D}[\tau_1]\exp(-2r)$ (см. [8]).

Кроме того, легко проверить, что $\boldsymbol{D}[\varphi - \varphi^2] \geqslant k(\varphi - \varphi^2)$, $k > 0$. Поэтому оператор $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 5.7 [8].

Из этой теоремы, в частности, вытекает

Теорема 3. *Однородная задача, сформулированная в начале* п. 3, *имеет нетривиальные решения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости.— ИАН СССР. МЖГ, 1969, № 4.
2. Киселев О. М. О форме каверны, ограниченной струйной пленкой.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1969, вып. 6.
3. Beyer K. Existenzbeweis fur ein Randwertproblem mit freien Rand.— Arch. Rational Mech. and Analysis, 1966, 23, № 1.
4. Кажихов А. В. О существовании отрывного течения типа Рябушинского в гравитационном поле с учетом капиллярных сил.— Сб. Динамика сплошной среды. Новосибирск, „Наука", 1969, вып. 1.
5. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир", 1964.
6. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, Изд-во НГУ, 1969.
7. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., „Наука", 1966.
8. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М., ГИФМЛ, 1962.

Доложено на семинаре 15 мая 1974 г.