Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. И. Любич, Нильпотентность энгелевых коммутативных алгебр размерности $n \leqslant 4$ над R,
УМН, 1977, том 32, выпуск 1, 195–196

https://www.mathnet.ru/rm3098

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
5 декабря 2025 г., 05:06:59

НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ ЭНГЕЛЕВЫХ КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР РАЗМЕРНОСТИ $n \leqslant 4$ НАД R

Ю. И. Любич

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная (вообще говоря, неассоциативная и некоммутативная) конечномерная алгебра над полем Φ, $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ — ее ассоциативная оболочка, т. е. алгебра линейных операторов в пространстве $\mathfrak{A}$, порождаемая умножениями L_x: $y \longmapsto xy$, R_x: $y \longmapsto yx$. Если $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ нильпотентна, то и алгебра $\mathfrak{A}$ называется нильпотентной. При более слабом условии нильпотентности всех операторов L_x, R_x алгебра $\mathfrak{A}$ называется энгелевой. Обозначим эти свойства через N и E соответственно. Как известно, $E \Rightarrow N$ для ассоциативных алгебр, алгебр Ли и йордановых (коммутативных) алгебр. Для коммутативных алгебр с ассоциативными степенями $E \Rightarrow N$ в размерностях $n \leqslant 4$, $\operatorname{char} \Phi \neq 2$ (анонсировано в [1]), но это неверно уже при $n = 5$ над любым полем [2]. Мы устанавливаем, что $E \Rightarrow N$ при $n \leqslant 4$ без требования ассоциативности степеней, но над полем **R** вещественных чисел. Последнее ограничение обусловлено топологическим характером основной леммы.

Лемма. *В любой конечномерной вещественной алгебре $\mathfrak{A}$ (вообще говоря, неассоциативной и некоммутативной) существует элемент $e \neq 0$, удовлетворяющий одному из двух уравнений:*

$$e^2 = e, \quad e^2 = 0,$$

т. е. идемпотент или нильпотент второй степени.

Для доказательства наделим пространство $\mathfrak{A}$ евклидовой нормой и рассмотрим вдоль единичной сферы S поле вектора $y = x^2$. Пусть оно не имеет нулей. Тогда $f: x \longmapsto x^2 \| x^2 \|^{-1}$ отображает S в S, и степень этого отображения четна. Поэтому $\exists\, x \in S$: $fx = -x$ (иначе f гомотопно единице и $\deg f = 1$). Но тогда $e = -x \| x^2 \|^{-1}$ — идемпотент.

Теорема. *Энгелева коммутативная вещественная алгебра $\mathfrak{A}$ размерности $n \leqslant 4$ нильпотентна.*

Наметим доказательство. В энгелевой алгебре нет идемпотентов, так как $e^2 = e \Rightarrow L_e e = e$. По лемме существует $e_1 \neq 0$, такой, что $e_1^2 = 0$, т. е. $L_{e_1} e_1 = 0$. Вектор e_1 можно включить в жорданов базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ оператора L_{e_1}, причем e_1 окажется изолированным собственным вектором, иначе будет $L_{e_1} e_2 = e_1 \Rightarrow e_1 e_2 = e_1 \Rightarrow e_2 e_1 = e_1 \Rightarrow L_{e_2} e_1 = e_1$.

Достаточно найти абсолютный делитель нуля (т. е. $x \neq 0$, $L_x = 0$), так как тогда факторизация по соответствующему одномерному идеалу понизит размерность на единицу, а из нильпотентности фактор-алгебры по аннулирующему идеалу следует нильпотентность всей алгебры.

Если $n \leqslant 2$, то e_1 — абсолютный делитель нуля.

При $n = 3, 4$ рассмотрим матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ операторов $L_{e_1}, L_{e_2}, \ldots L_{e_n}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коммутативность алгебры означает, что i-й столбец матрицы A_k равен k-му столбцу матрицы A_i.

Пусть $n = 3$ и $A_1 \neq 0$. Тогда

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & b_{13} \\ 1 & a_{23} & b_{23} \\ 0 & a_{33} & b_{33} \end{pmatrix},$$

и все комбинации $A(x) = \sum x_i A_i$ нильпотентны. Приравнивая нулю коэффициенты характеристического полинома $| A(x) - \lambda I |$, а затем их коэффициенты разложений по x_1, x_2, x_3, получим систему уравнений, из которой следует, что $A_2 = 0$, т. е. e_2 — абсолютный делитель нуля.

При $n = 4$ доказательство проходит по указанной схеме, но требует более обширных выкладок.

При $n = 5$ за счет отказа от ассоциативности степеней контрпример [2] упрощается до следующего: $v_1v_3 = v_4$, $v_1v_5 = -v_3$, $v_2v_3 = v_5$, $v_2v_4 = v_3$, остальные $v_iv_k (i \leqslant k)$ равны нулю. Между прочим, здесь все $L_x^3 = 0$. Вместе с тем, если в некоторой $\mathfrak{A}$ все $L_x^2 = 0$, то $\mathfrak{A}$ нильпотентна независимо от размерности, так как в этом случае $L_xL_y + L_yL_x = 0$ для всех x, y.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. C. Myung, A class of almost commutative nilalgebras, Canad. J. Math. **26**:5 (1974), 1192—1198.

[2] D. Suttles, A counterexample to a conjecture of Albert, Notices Amer. Math. Soc. **19** (1972), A-566.

Поступило в Правление общества 25 мая 1975 г.