П. Картье, О формуле характера Г. Вейля,
Математика, 1962, том 6, выпуск 5, 139–141

О ФОРМУЛЕ ХАРАКТЕРА Г. ВЕЙЛЯ [1])

П. Картье

Введение. Много лет назад Г. Вейль [4] вывел формулу для характера компактной группы Ли, или, что равнозначно, комплексной полупростой группы Ли. Его доказательство, опиравшееся на формулу интегрирования, было аналитическим и топологическим.

Позднее Фрейденталь [2] дал алгебраическое доказательство. Совсем недавно Костант [3] нашел в некотором смысле явную формулу для кратности веса μ неприводимого представления со старшим весом λ. Целью настоящей заметки является доказательство эквивалентности формул Вейля и Костанта; поскольку наше доказательство весьма просто, работа Костанта может рассматриваться как новое алгебраическое доказательство формулы Вейля[2]). Без сомнения, статья [3] представляет значительный интерес также и из-за других результатов, которые в ней содержатся.

1. Обозначения. Пусть G — комплексная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, B — билинейная форма Киллинга на $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через Σ множество корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, рассматриваемых как линейные формы на $\mathfrak{h}$. Для каждого корня α существует единственный элемент $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, такой, что $\alpha(H_\alpha) = 2$ и линейная форма $H \to B(H, H_\alpha)$ на $\mathfrak{h}$ пропорциональна α. Каждому корню α сопоставляется симметрия S_α пространства $\mathfrak{h}$:

$$S_\alpha(H) = H - \alpha(H) \cdot H_\alpha.$$

Группа W, порожденная преобразованиями S_α, называется группой Вейля; она конечна и сохраняет систему Σ.

Пусть теперь $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — система простых корней. Всякий корень представляется в виде линейной комбинации корней из Π с целыми коэффициентами одного знака; этот знак называется знаком корня (относительно системы Π). Через φ обозначим полусумму всех положительных корней.

Пусть π — какое-либо неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ в комплексном векторном пространстве V. Пусть V_μ обозначает для всякой линейной формы μ на $\mathfrak{h}$ множество тех векторов $v \in V$, для которых

$$\pi(H) \cdot v = \mu(H) \cdot v \quad \text{при всех } H \in \mathfrak{h}.$$

Форма μ называется весом представления π, если $V_\mu \neq 0$; размерность пространства V_μ называется в этом случае кратностью веса μ. Как из-

---

[1]) Cartier P., On H. Weyl's character formula, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **67** (1961), № 2, 228—230.

[2]) См. по этому поводу: Штейнберг Р., Общая теорема Клебша — Гордана, стр. 143 этого выпуска. — *Прим. перев.*

вестно, существует вес λ, имеющий кратность 1 и обладающий тем свойством, что всякий другой вес представляется в виде

$$\lambda - \sum_{1 \leqslant i \leqslant l} m_i \cdot \alpha_i,$$

где m_i — целые неотрицательные числа, не равные одновременно нулю. Вес λ называется старшим весом представления π и определяет его с точностью до эквивалентности. Мы будем писать $\pi = \pi_\lambda$, подразумевая под этим, что λ — старший вес представления π. Кандидатами в старшие веса являются такие линейные формы λ на $\mathfrak{h}$, что $\lambda(H_\alpha)$ — неотрицательное целое число при любом $\alpha \in \Pi$.

2. Формула характера. В предыдущих обозначениях формула Вейля записывается следующим образом:

$$\mathrm{Tr}(\pi_\lambda(\exp H)) = \frac{\sum_{s \in W} \det s \cdot e^{(\varphi+\lambda)(s \cdot H)}}{\sum_{s \in W} \det s \cdot e^{\varphi(s \cdot H)}}. \tag{1}$$

Здесь H — произвольный элемент из $\mathfrak{h}$, exp — экспоненциальное отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в группу G (см., например, [1],) $\mathrm{Tr}(A)$ обозначает след оператора A в пространстве V. Как показал Вейль, знаменатель в (1) может быть переписан в следующей форме:

$$\sum_{s \in W} \det s \cdot e^{\varphi(s \cdot H)} = \prod_{\alpha \text{ — положительный корень}} (e^{+\alpha(H)/2} - e^{-\alpha(H)/2}), \tag{2}$$

μ — положительный корень.

Приведем теперь формулу Костанта. Для всякой линейной формы μ на $\mathfrak{h}$ обозначим через $m_\lambda(\pi)$ размерность подпространства V_μ в пространстве V представления π алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ. Пусть $P(\mu)$ — „число разбиений формы μ в сумму положительных корней“, т. е. число функций $\alpha \to n_\alpha$, определенных на множестве положительных корней α, принимающих целые неотрицательные значения, и таких, что $\mu = \sum_\alpha n_\alpha \cdot \alpha$. Очевидно, что $P(\mu)$ совпадает с коэффициентом при $e^{-\mu}$ в разложении Фурье произведения

$$\prod_{\alpha \text{ — положительный корень}} 1/(1 - e^{-\alpha}).$$

Формула Костанта представляет собой следующее соотношение:

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{s \in W} \det s \cdot P(s(\varphi + \lambda) - (\varphi + \mu)). \tag{3}$$

3. Доказательство эквивалентности. Для всякого $H \in \mathfrak{h}$ оператор $A = \pi_\lambda(\exp H)$ приводится к диагональному виду; точнее, на каждом подпространстве V_μ оператор A индуцирует растяжение в $e^{\mu(H)}$ раз. След этого оператора равен, следовательно, $\sum_\mu m_\lambda(\mu) \cdot e^{\mu(H)}$; это значит, что $m_\lambda(\mu)$ совпадает с коэффициентом при e^μ в разложении Фурье левой части равенства (1). Далее, выражение (2) можно записать как

$$e^{\varphi(H)} \cdot \prod_{\alpha \text{ — положительный корень}} (1 - e^{-\alpha(H)}).$$

Обратная величина, согласно сделанному выше замечанию относительно $P(\mu)$, равна $\sum_{\nu}' P(\nu) e^{-(\varphi+\nu)(H)}$. Для правой части равенства (1) получаем выражение

$$\sum_{\nu}\sum_{s\in W} \det s \cdot e^{(\varphi+\lambda)(s\cdot H)-(\varphi+\nu)(H)} \cdot P(\nu) =$$

$$= \sum_{\mu}\sum_{s\in W} \det s \cdot P(s^{-1}(\varphi+\lambda)-(\varphi+\mu)) \cdot e^{\mu(H)},$$

так как, по определению, $\rho(s\cdot H) = (s^{-1}\rho)(H)$ для всяких $H \in \mathfrak{h}$, $s \in W$ и всякой линейной формы ρ на $\mathfrak{h}$. Поскольку $\det s = \pm 1$ для всех $s \in W$, справедливо соотношение $\det s = \det s^{-1}$ и правая часть равенства (3) совпадает с коэффициентом при e^{μ} в разложении Фурье правой части равенства (1).

Этим завершается доказательство, которое значительно короче предварительных объяснений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевалле К., Теория групп Ли, т. I, М., 1948.
2. Freudenthal H., Zur Berechnung der Characteren der halbeinfachen Gruppen, I, *Nederl. Acad. Wetensch. Proc.*, Ser. A, **57** (1954), 369—376.
3. Kostant B., A formula for the multiplicity of a weight, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 53—73. [Есть русский перевод. См. сб. *Математика*, **6**:1 (1962), 133—152.]
4. Weyl H., Über die Darstellungen der halbeinfachen Gruppen durch linearen Transformationen, *Math. Z.*, **23** (1925), 271—309; **24** (1926), 328—395. [Есть русский перевод. См. *Успехи матем. наук*, **4** (1938), 201—257.]