

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Грюнвальд, Ю. Эльстродт, Е. Меннике,
Некоторые замечания о дискретных подгруппах $SL_2(\mathbb{C})$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987,
том 162, 77–106

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

15 февраля 2025 г., 20:10:27



НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИСКРЕТНЫХ ПОДГРУППАХ $SL_2(\mathbb{C})$.

I. По приглашению Математического института им. В. А. Стеклова в Ленинграде третий автор читал три доклада о дискретных подгруппах $SL_2(\mathbb{C})$. Статья представляет подробную версию докладов. Нам очень приятно сердечно поблагодарить за гостеприимство проф. А. Б. Венкова и Н. В. Проскурина.

Первая часть — обзор нашей статьи [3]. Она относится к теории бинарных Эрмитовых форм. Определяются некоторые ряды Дирихле относительно целой эквивалентности и относительно рода форм. Примеры вычисления представляются здесь, а полное вычисление находится в [3]. Сравнение двух рядов Дирихле дает главную теорему Брауна — Зигеля для бинарных Эрмитовых форм, но в другом виде — тождество двух рядов Дирихле. Приложения включают вычисление числа представлений для некоторых кватернарных форм с коэффициентами в \mathbb{Z} . Доказательства не приводятся здесь, но находятся в статье [3]. Вторая часть касается геометрических вопросов. Мы опишем фундаментальные области для некоторых дискретных групп, в модели Пуанкаре и в модели Клейна. В частности мы опишем фундаментальную область, которая называется "гремячая змея". Эта группа не порождается инволюциями. В ней все инволюции порождают нормальную подгруппу бесконечного индекса. Мы даем обзор теорем Маргулиса и Тёрстона об объеме фундаментальных областей дискретных групп и дискретных групп без кручений. Представляется эффективный вариант теоремы Маргулиса: объем фундаментальной области дискретной подгруппы $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ удовлетворяет неравенству $v(\Gamma) > 4,5 \cdot 10^{-11}$. Доказательство использует теорему Эргенсона о кокомпактных дискретных группах. Наше доказательство будет опубликовано в другом месте. Мы опишем некоторые предварительные результаты о группе $SL_2(\mathbb{Z}[\ast])$. Эти результаты используют теорию дискретных подгрупп в $SL_2(\mathbb{C})$. В этом случае доказательства даны.

Третья часть касается аналитических вопросов, в частности, малых собственных значений оператора Лапласа для некоторых групп $SL_2(0)$ с целыми элементами квадратичного поля с малым определителем. Тридцать лет тому назад Рельке дал метод в случае $SL_2(\mathbb{Z})$ и он получил неравенство. Метод обобщается тривиально для $SL_2(\mathbb{Z}[i])$, но не для $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$. Мы предлагаем нетривиальное обобщение в этом случае. Метод обобщается.

2. Пусть $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ — квадратичное поле отрицательного опре-

делителя $\mathcal{D} < 0$ и пусть \mathcal{O} — кольцо целых чисел в k . Пусть f — Эрмитова бинарная форма с коэффициентами в \mathcal{O} . Мы обозначим

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} \quad a, d \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathcal{O}, \quad d > 0.$$

Пусть $\Delta = ad - |b|^2 > 0$.

Пусть $H = \{(z, v), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathbb{R}, \quad v > 0\}$ пространство Лобачевского.

Соотставим f и точку $P \in H$

$$f \mapsto P = \left(\frac{b}{d}, \frac{\sqrt{\Delta}}{d} \right) \in H.$$

Пусть $g = -x^2 + \mathcal{D}y^2 + uv$

квадратичная форма с коэффициентами в \mathbb{Z} , и предположим, что $\mathcal{D} \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Случай $\mathcal{D} \equiv 1 \pmod{4}$ рассматривается аналогично.

Пусть

$$K(g, \mathbb{R}) = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \quad g(Z) > 0 \right\}$$

модель Клейна гиперболического пространства.

Соотставим форме f точку $P \in K(g, \mathbb{R})$

$$f \mapsto \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ a \\ d \end{pmatrix} \in K(g, \mathbb{R}), \quad b = b_0 + \sqrt{\mathcal{D}} b_1, \quad b_0, b_1 \in \mathbb{Z} \\ -b_0^2 + \mathcal{D} b_1^2 + ad = \Delta.$$

Пусть $\tilde{P}(\Delta)$ — полная система представителей классов эквивалентных форм f с $\Delta(f) = \Delta$, относительно $SL_2(\mathcal{O})$, и пусть $E_1(f) = \text{Aut}(f, \mathcal{O}) \cap SL_2(\mathcal{O})$ — конечная группа.

Рассмотрим представления числа k формой:

$$\# \{ (u, v) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}, \quad f(u, v) = k \}.$$

ТЕОРЕМА 2.1.

$$\sum_{f \in \tilde{P}(\Delta)} \frac{1}{|E_1(f)|} \# \{ (u, v) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}, \quad f(u, v) = k \} =$$

$$= \#\{ \lambda + k\sigma, \lambda \in \sigma, |\lambda|^2 + \Delta \equiv 0 \pmod{k} \}.$$

Слева - сумма чисел представлений. Справа - число классов вычетов относительно подкольца $k\sigma < \sigma$. Доказательство получается установлением биекции. Подробности в [3].

Пусть m - непустой модуль ранга \mathfrak{f} алгебраических чисел в k . Определяем два ряда Дирихле.

$$Z_m(f, s) = \frac{1}{|E_1(f)|} \sum_{\langle u, v \rangle = m} f(u, v)^{-1-s}$$

$$\hat{Z}_m(f, s) = \frac{1}{|E_1(f)|} \sum_{u, v \in m} f(u, v)^{-1-s}.$$

В первом случае, $\langle u, v \rangle = m$ значит, что u, v порождают m .

Вычисление рядов $Z_m(f, s), \hat{Z}_m(f, s)$ очень трудно. Вместо них, мы рассмотрим суммы:

$$Z(\Delta, s) = \sum_{f \in \mathfrak{F}(\Delta)} Z_{\sigma}(f, s),$$

$$\hat{Z}(\Delta, s) = \sum_{f \in \mathfrak{F}(\Delta)} \hat{Z}_{\sigma}(f, s).$$

Главным результатом является вычисление этих рядов.
ТЕОРЕМА 2.2.

$$Z(\Delta, s) = \Theta(s) \zeta(s) L(s+1, \chi_{\Delta})^{-1},$$

$$\hat{Z}(\Delta, s) = \Theta(s) \zeta(s) \zeta(s+1),$$

где

$$\Theta(s) = \prod_{p \mid \Delta} R_p(\Delta, p^{-s-1}),$$

$$R_p(\Delta, x) = \begin{cases} \frac{1 - ((\mathfrak{d}/p)(px))^{t+1}}{1 - (\mathfrak{d}/p)px}, & p \nmid \mathfrak{d}, p^t \parallel \Delta, \\ 1 + \left(\frac{-|\mathfrak{d}_0|^t \Delta_0}{p} \right) (px)^{t+1}, & p \mid \mathfrak{d}, p^t \parallel \Delta, p > 2, \\ 1 + \left(\frac{\mathfrak{d}}{\Delta_0 \mathfrak{d}_2^t} \right) (2x)^{t+3}, & 4 \mid \mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \equiv 2 \pmod{8}, 2^t \parallel \Delta, \\ 1 - \left(\frac{\mathfrak{d}}{\Delta_0 \mathfrak{d}_2^t} \right) (2x)^{t+3}, & 4 \mid \mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \equiv 6 \pmod{8}, 2^t \parallel \Delta, \\ 1 - \left(\frac{-4}{\Delta_0 \mathfrak{d}_2^t} \right) (2x)^{t+2}, & 4 \mid \mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \equiv 3 \pmod{4}, 2^t \parallel \Delta, \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{\mathfrak{D}}{p}, \quad \Delta_0 = p^{-t} \Delta,$$

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{D}}{4}, \quad \text{если } 4/\mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{cases} -\frac{\mathfrak{D}_1}{2}, & \text{если } \mathfrak{D}_1 \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1-\mathfrak{D}_1}{2}, & \text{если } \mathfrak{D}_1 \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\chi_{\mathfrak{D}} = \left(\frac{\mathfrak{D}}{\cdot} \right), \quad - \text{характер Дирихле}.$$

Пусть $G(f)$ - род, все его формы эквивалентны f относительно $GL_2(\sigma_p)$ для всех простых $p \in \mathbb{Z}$. Род распадается на конечное число орбит относительно $GL_2(\sigma)$.

Пусть $E(f) = \text{Aut}(f, \sigma) \cap GL_2(\mathbb{Z}, \sigma)$.

Выражение

$$M(f) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{|E(f_j)|},$$

где f_1, \dots, f_q - полная система представителей классов эквивалентности относительно $GL_2(\sigma)$ в $G(f)$ - называется массой формы f .

ТЕОРЕМА 2.3. (Главная теорема Брауна - Зигеля)

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(f)} \sum_{j=1}^q \frac{1}{|E(f_j)|} & \# \{(u, v) \in \sigma \times \sigma, f_j(u, v) = N\} = \\ & = \frac{4\pi^2}{|\mathfrak{D}| \cdot \Delta} \cdot N \cdot \alpha(f, N), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(f, N) & = \prod_p \alpha_p(f, N), \\ \alpha_p(f, N) & = \lim_{l \rightarrow \infty} p^{-3l} \# \{(u, v) \in (\sigma/p^l \sigma) + (\sigma/p^l \sigma) \mid f(u, v) \equiv N \pmod{p^l}\}. \end{aligned}$$

$\alpha_p(f, N)$ называется локальной плотностью.
Называем

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

примитивной формой, если не существует делителя $p \mid a, b, d, p \in \mathbb{Z}$.
Нам надо вычислить локальные плотности. Это длинные вычисления.
Здесь мы даем только три случая.

ТЕОРЕМА 2.4.

Пусть f примитивна, и $\Delta(f) = \Delta$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $p \geq 2$ — простое число,

$$p^v \parallel N, \quad p^t \parallel \Delta.$$

Обозначим $c_p = \left(\frac{-\Delta, \mathfrak{A}}{p} \right)$ символ Гильберта.

а) Предположим, что $(\mathfrak{A}/p) = 1$. Тогда

$$\alpha_p(f, N) = \begin{cases} (v+1)(1-p^{-1}) & \text{при } v < t, \\ (1+p^{-1})(1-p^{-v-t-1}) + t(1-p^{-1}) & \text{при } v \geq t. \end{cases}$$

б) Предположим, что $(\mathfrak{A}/p) = -1$. Тогда

$$\alpha_p(f, N) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{N, \mathfrak{A}}{p} \right) \right) (1+p^{-1}) & \text{при } v < t, \\ \left(\frac{1}{2} (1+c_p) - c_p p^{-v-t-1} \right) (1+p^{-1}) & \text{при } v \geq t. \end{cases}$$

в) Предположим, что $p \geq 2$ и $p \nmid \Delta$, но $p \mid \Delta$. Тогда

$$\alpha_p(f, N) = 1 + c_p - c_p (1+p^{-1}) p^{-v}.$$

Подробные вычисления находятся в [3].

Определяем ряд Дирихле для рода $G(f)$:

$$\hat{Z}(G(f), s) = \frac{1}{M(f)} \sum_{j=1}^g \frac{1}{|E(f_j): E_1(f_j)|} \hat{Z}_G(f_j, s).$$

Теорема 2.3 переформулируется следующим образом:

ТЕОРЕМА 2.5. (Браун - Зигель):

$$\hat{Z}(G(f), s) = \frac{4\pi i}{\Delta |\mathfrak{A}|} \delta(f, s),$$

где

$$\vartheta(f, s) = \sum_{N=1}^{\infty} \alpha(f, N) N^{-s}.$$

Мы используем теорему 2.4 и получаем

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть f - примитивна, $\Delta(f) = \Delta$. Предположим, что $(\Delta, \vartheta) = 1$ и $\lambda \neq \vartheta$. Пусть

$$\eta_p = \left(\frac{\vartheta}{p}\right), \quad c_p = \left(\frac{-\Delta, \vartheta}{p}\right).$$

Тогда

$$\vartheta(f, s) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p|\Delta \cdot \vartheta} R(p, s) \zeta(s) \zeta(s+1), \quad \text{где}$$

$$R(p, s) = \begin{cases} 1 - \eta_p \frac{(p'-p')(1-c_p p^{s+\vartheta})}{(1+\eta_p p^{-s})(1-\eta_p p^{-s})}, & \text{если } p^{\vartheta p} \parallel \Delta, p \neq 2 \\ \frac{1+c_p p^{-s}}{1+c_p p^{-1}}, & \text{если } p|\vartheta, p > 2 \end{cases}$$

$\zeta(s)$ - ζ -функция Римана.

В частности, если $(\Delta, \vartheta) = 1$ и $\lambda \neq \vartheta$ ряд Дирихле $\vartheta(f, s)$, имеет произведение Эйлера.

Сравнение теорем 2.2 и 2.6, вероятно, дает доказательство теоремы 2.3.

Определяем ряд Эйзенштейна:

$$\hat{E}_m(p, s) = N m^{1+s} \sum'_{c, d \in m} \left(\frac{\chi}{|cx+d|^2 + |c|^2 \chi^2} \right)^{1+s},$$

Нм обозначаем норму модуля m .

Известно, что $\hat{E}_m(p, s)$ продолжается мероморфно для всех s .

Если $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $\Delta(f) = ad - |b|^2 > 0$, $d > 0$ и

$$p = \left(\frac{b}{d}, \frac{\sqrt{\Delta(f)}}{d} \right) \in \mathbb{H},$$

то ряд Эйзенштейна и ряд Дирихле отличаются только тривиальным множителем:

$$E_m(p, s) = (\Delta(f))^{\frac{s+1}{2}} |E_s(f)| \hat{Z}_m(f, s).$$

Теорема 2.5 переформулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.7. (Браун - Зигель). Пусть f_1, \dots, f_q полная система представителей классов эквивалентности относительно $GL_2(\mathcal{O})$ в $G(f)$, и

$$f_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & d_j \end{pmatrix}, \quad d_j > 0,$$

$$p_j = \left(\frac{b_j}{d_j}, \frac{\sqrt{\Delta(f)}}{d_j} \right), \quad j = 1, \dots, q.$$

Тогда

$$\frac{1}{M(f)} \sum_{j=1}^q \frac{1}{|E(f_j)|} \hat{E}_\sigma(p_j, s) = \frac{4\pi^2}{|\theta|} \Delta^{\frac{s-1}{2}} \theta(f, s).$$

В этом виде, теоремы 2.6 и 2.7 пригодны для вычисления числа представлений некоторыми кватернарными формами с коэффициентами в \mathbb{Z} . Мы даем два примера.

1) Посмотрим $\mathcal{D} = -11$ и

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Г. Отремба [7] доказала, что в роде f только один класс. Поэтому из теоремы 2.7 вытекает:

$$\hat{E}_\sigma((0, \sqrt{2}), s) = 2^{\frac{s+3}{2}} (1-2^{-s})(1+11^{-s}) \zeta(s) \zeta(s+1),$$

где

$$\sigma = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{-11}) \right].$$

Мы получим число представлений

$$\begin{aligned} & \# \{ (u, v) \in \sigma, f(u, v) = 2|u|^2 + |v|^2 = n \} = \\ & = \# \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4, 2(x^2 + xy + 3y^2) + z^2 + zt + 3t^2 = n \} = \\ & = 2 \left\{ \sigma_1(n, 2) + 11 \sigma_1\left(\frac{n}{11}, 2\right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1(a, k) = \begin{cases} \sum_{d|a} \sum_{krd} d, & \text{при } a \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{при } a \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

2) Посмотрим $\mathcal{D} = -3$ и $\Delta = 5$.

Существует один род, и в роде два класса

$$f = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad |E_1(f)| = 6, \quad |E_1(g)| = 2.$$

Петерсон ([8], с.81, предложение 8.4) вычислил число представлений

$$\begin{aligned} \# \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4, \quad x^2 + xy + y^2 + 5(z^2 + zt + t^2) = n \} = \\ = \frac{3}{2} \{ \sigma_1(n, 15) + \sigma_1(n, 5) - \sigma_1(n, 3) + 3a_n \}, \end{aligned}$$

где

$$\eta(\tau) \eta(3\tau) \eta(5\tau) \eta(15\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau},$$

$\eta(\tau)$ - функция Дедекинда, и ряд Фурье - нормированная параболическая форма веса 2 для группы $\Gamma_0(15)$. Из теоремы 2.7 вытекает

$$\hat{E}_{\sigma}((0, \sqrt{5}), s) = \frac{3}{2} 5^{\frac{s+1}{2}} \{ (1+3^{-s})(1-5^{-s}) \varphi(s) \varphi(s+1) + 3F(s+1) \},$$

где $\sigma = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \right]$ и

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

Известно, что $F(s)$ есть L -функция модулярной кривой X_{15} (см. [5]).

Ряд Эйзенштейна для g есть

$$\hat{E}_{\sigma} \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5} \right), s \right) = \frac{3}{2} 5^{\frac{s+1}{2}} \{ (1+3^{-s})(1-5^{-s}) \varphi(s) \varphi(s+1) - F(s+1) \}.$$

Эта формула вытекает из теоремы 2.2, переформулированной для ряда Эйзенштейна. Наконец, следует вычисление представлений для g :

$$\begin{aligned} \# \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4, \quad 3(x^2 + xy + y^2) + 2xz + xt + yz + 2yt + 2(z^2 + zt + t^2) = n \} = \\ = \frac{3}{2} \{ \sigma_1(n, 15) + \sigma_1(n, 5) - \sigma_1(n, 3) - a_n \}. \end{aligned}$$

3) Мы опишем фундаментальные области для некоторых дискретных групп Γ .

а) $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Фундаментальной областью в модели Пуанкаре является

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right\}$$

б) $\Gamma = \text{SL}_4(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}])$.

Фундаментальная область:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right\}.$$

в) Пусть q - кватернарная форма с коэффициентами в \mathbb{Z} и предположим, что

$$q \sim_{\mathbb{R}} -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2.$$

Пусть

$$K(q, \mathbb{R}) = \left\{ \tau = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), q(\tau) > 0 \right\}$$

модель Клейна гиперболического пространства. Плоскость в этой модели описывается вектором α с $q(\alpha) < 0$

Инволюция σ_α относительно α задается формулой

$$\sigma_\alpha : \tau \rightarrow -\tau + 2 \frac{q(\tau, \alpha)}{q(\alpha)} \alpha.$$

Пусть α - плоскость с коэффициентами в \mathbb{Z} :

$$\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4, \quad (a, b, c, d) = 1.$$

Число $q(\alpha) < 0$ определяется однозначно. Называем α целой плоскостью, если

$$\sigma_\alpha \in O_4(q, \mathbb{Z}) \in \Gamma.$$

Группа Γ называется группой Кокстера (но не естественной), если Γ порождается инволюциями относительно целых плоскостей.

Если в роде q только один класс, например, если определитель q - произведение различных простых чисел, тогда теория Зигеля квадратичных форм показывает, что множество групп Кокстера конечно.

Вероятно, что множество конечно всегда.

Мы даем два примера.

Пусть

$$q = -x^2 - y^2 + uv.$$

Посмотрим плоскости

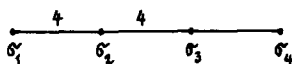
$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)_{-1}$$

$$\alpha_2 = (1, 1, 0, 0)_{-2}$$

$$\alpha_3 = (0, 1, 0, 1)_{-1}$$

$$\alpha_4 = (0, 0, 1, -1)_{-1}$$

Инволюции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ порождают $\Gamma = O_4(q, \mathbb{Z})$. Диаграмма Кокстера есть



Γ является максимальной, и

$$PSL_2(\mathbb{Z}[i]) < O_4(q, \mathbb{Z}).$$

г) Пусть

$$q = -2x^2 - 5y^2 - 10z^2 + u^2.$$

Решением уравнения $q(r) = 0, r \in \mathbb{Q}^4$ является только $r = 0$. Поэтому фундаментальная область группы $\Gamma = O_4(q, \mathbb{Z})$ компактна.

Целые плоскости распадаются на 4 орбиты относительно Γ с представителями

$$\sigma_1 = (1, 0, 0, 0)_{-2}$$

$$\sigma_2 = (0, 1, 0, 0)_{-5}$$

$$\sigma_3 = (0, 0, 1, 0)_{-10}$$

$$\sigma_4 = (1, 0, 0, 1)_{-1}$$

Обозначение плоскости $\alpha = (a, b, c, d)_{q(\alpha)}$. Γ - стабилизатор каждой плоскости - группа Кокстера с компактной фундаментальной областью и с диаграммой:

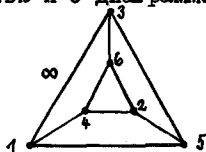


Рис. 1

Все ребра носят знак ∞ . Фундаментальная область стабилизатора: шестигранник с прямыми углами. В вершинах шестигранника шесть целых плоскостей и все углы прямые.

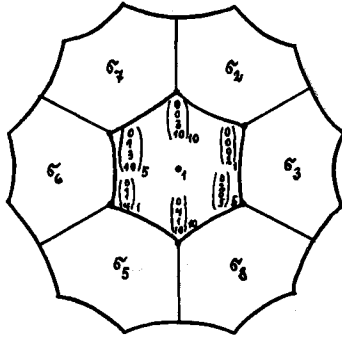


Рис. 2

На рис. 2 находятся все точки на границе шестигранника, где встречаются три целые плоскости. Для удобства читателей, напишем целые плоскости:

$$\sigma_5 = (0, 2, 1, 5)_{-5}$$

$$\sigma_6 = (0, 2, 3, 10)_{-10}$$

$$\sigma_7 = (0, 0, 1, 3)_{-1}$$

$$\sigma_8 = (0, 1, 0, 2)_{-1}$$

Шесть шестигранников образуют часть трубы - почти член "гремучей змеи". Члены продолжаютс я внутрь и наружу. Гремучая змея бесконечна.

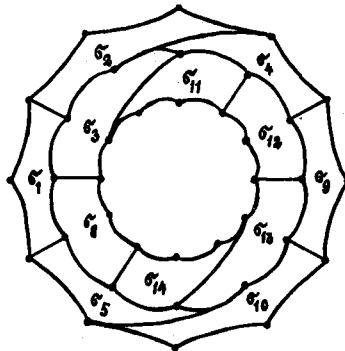


Рис. 3

Для удобства читателей мы напишем новые целые плоскости:

$$\begin{aligned}\sigma_9 &= (5, 2, 2, 10)_{-10} \\ \sigma_{10} &= (1, 1, 1, 4)_{-1} \\ \sigma_{11} &= (3, 2, 6, 6)_{-2} \\ \sigma_{12} &= (5, 3, 1, 10)_{-5} \\ \sigma_{13} &= (2, 2, 1, 6)_{-2} \\ \sigma_{14} &= (5, 8, 2, 20)_{-10}\end{aligned}$$

Инволюции относительно всех целых плоскостей порождают нормальную подгруппу $N \triangleleft \Gamma$, а гремучая змея является фундаментальной областью для N . Подгруппа N дает покрытие пространства гремучими змеями.

Диаметр змей постоянный. В одном члене шестиугольники появляются парами. В фигуре 3 такие пары $-(\sigma_7, \sigma_9), (\sigma_8, \sigma_{10}), (\sigma_4, \sigma_5)$. Посмотрим центры шестиугольников σ_i и σ_j . Расстояние центров равно для всех пар, в частности,

$$\cos \alpha = \sqrt{5}.$$

Змея имеет ось. На этой оси находятся средоточия центров пар, для всех пар змей. Ось — прямая линия

$$s \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{5} \\ 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ 1 \\ 5 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \in K(q, \mathbb{R}).$$

Существует инволюция

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma;$$

фиксирующая центры σ_7 и σ_9 — вращения вокруг линии через центры. Инволюция тоже фиксирует ось змей, но переворачивает направление. Аналогично инволюция

$$g_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 2 \\ -4 & 0 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

вращение и фиксирует центры σ_8 и σ_{10} . Произведение $g_1 g_2$ — локсодромическое движение — фиксирует ось змей, а не точки. Есть движение змей вперед. Фундаментальная область для Γ — конечная часть змей.

Из геометрии вытекает система определяющих соотношений.
 ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$g = -2x^2 - 5y^2 - 10z^2 + u^2.$$

$$\Gamma = O_4(g, Z)$$

Γ порождается инволюциями

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 2 \\ -4 & 0 & -20 & 7 \end{pmatrix}.$$

Система определяющих соотношений:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = g_1^2 = g_2^2 = 1$$

$$(\sigma_1 \sigma_2)^2 = (\sigma_1 \sigma_3)^2 = (\sigma_2 \sigma_3)^2 = (\sigma_2 \sigma_4)^2 = (\sigma_3 \sigma_4)^2 = 1$$

$$(\sigma_1 \sigma_4 g_1)^2 = (\sigma_3 g_1 \sigma_4 g_2)^2 = (\sigma_1 g_2 g_1 \sigma_3 g_1 g_2)^2 = 1$$

$$(\sigma_1 g_2 g_1 \sigma_4 g_1 g_2)^2 = (\sigma_2 g_1 g_2 \sigma_4 g_1)^2 = (\sigma_2 g_1 \sigma_3 g_1 g_2)^2 = 1$$

$$(g_1 \sigma_1)^2 = (g_2 \sigma_2)^2 = (g_1 \sigma_3 g_1 g_2)^2 = (g_2 \sigma_4 g_1)^2 = 1.$$

Инволюции относительно всех целых плоскостей порождают нормальную подгруппу $N \triangleleft \Gamma$ и

$$\Gamma / N = \langle g_1, g_2; g_1^2 = g_2^2 = 1 \rangle$$

N является группой Кокстера, но не конечно порождается.

Мы обращаемся к теории объема.

В модели Пуанкаре объем определяется формулой:

$$dv = \frac{dx \, dy \, dz}{v^3}.$$

Посмотрим дискретную группу $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ и предположим, что фундаментальная область имеет конечный объем. Вычисление объема обычно трудно.

ТЕОРЕМА 3.2 (Гумберт). Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{C})$.

Тогда

$$v = \frac{|2|^{3/2}}{4\pi^2} \zeta_K(2).$$

Доказательство Гумберта не совсем аккуратно. Используется принцип Дирихле в случае бесконечной области, но оценка края не дается. Но формула вытекает также из теории рядов Эйзенштейна. В модели Клейна теория Зигеля применяется, если в роде g только один класс. Получаются аналогичные формулы, но вообще не совсем известные. Если Γ — не арифметическая группа — объем неизвестен.

ТЕОРЕМА 3.3 (Тёрстон [I2]). Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа, и предположим, что Γ без кручения. Тогда объемы являются в порядке:

$$v_1 < v_2 < \dots < v_\omega < v_{\omega+1} < \dots < v_{\omega^2} < v_{\omega^2+1} < \dots$$

Если $v(\Gamma) = v_j$, $j < \omega$ — группа Γ кокомпактная, если $v(\Gamma) = v_\nu$, $\omega \leq \nu < \omega^2$ группа имеет одну параболическую точку, и т.д.

Фиксируем v . Тогда множество

$$\{\Gamma < SL_2(\mathbb{C}), \Gamma \text{ без кручения, } v(\Gamma) = v_j\}$$

(сопряженность) конечно.

ТЕОРЕМА 3.4 (Маргулис).

Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа.

Существует универсальное число $c > 0$ такое, что

$$v(\Gamma) > c.$$

Мы предлагаем эффективный вариант.

ТЕОРЕМА 3.5.

Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа.

Тогда

$$v(\Gamma) > 1.5 \cdot 10^{-11}.$$

Доказательство будет опубликовано в другом месте. Основа — два критерия дискретности.

ТЕОРЕМА 3.6 (Шимлицу).

Пусть

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}), \quad c \neq 0,$$

$$u^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0$$

и $\Gamma = \langle M, u^\lambda \rangle$.

Тогда либо $|c\lambda| \geq 1$, либо Γ - не дискретная.

ТЕОРЕМА 3.7 (Иоргенсен).

Пусть $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$.

Предположим, что подгруппа $\langle A, B \rangle$ дискретная. Тогда либо

$$(i) \quad |(tr A)^2 - 4| + |tr(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1,$$

либо

(ii) A - параболический элемент и B фиксирует параболическую точку (A) ,

либо

$$(iii) \quad BAB^{-1} \in \{A, A^{-1}\}.$$

Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа, и предположим, что

$$v(\Gamma) < \infty.$$

Об алгебраической структуре Γ - мало известно. Мы опишем некоторые следствия теории Вальдхаузена - Хакена. Мы определяем X - H - H -расширение. Пусть H - абстрактная группа, $u, v < H$ подгруппы, и $\varphi: u \rightarrow v$ изоморфизм. Пусть t - буква. Группа

$$G = \langle H, t; tut^{-1} = \varphi(u), u \in u \rangle$$

называется X - H - H -расширением относительно H, u, v, φ .

Пример:

$$G = \langle a, b, c, t; abct a^{-1} b^{-1} c^{-1} t^{-1} = 1 \rangle.$$

Пусть $u = \langle cba \rangle$, $v = \langle abc \rangle$ свободные циклические подгруппы, и поэтому изоморфные:

$$\varphi(cba) = abc.$$

G является X - H - H -расширением относительно H, u, v, φ .

Вспомним определение амальгамированного произведения. Пусть H, K абстрактные группы, $u < H$, $v < K$ - подгруппы, и $\varphi: u \rightarrow v$ изоморфизм. Группа

$$G = H *_{\varphi} K = \langle H, K; \varphi(u) = v \quad v \in u \rangle$$

называется амальгамированным произведением групп H и K относительно подгрупп u, v и изоморфизма φ . (см. [13]).

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $\Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ дискретная группа, ко-

компактная и без кручения. Пусть $M = H/\Gamma$. Предположим, что существует поверхность $F \subset M$ такая, что

$$0 \neq \{F\} \in H_2(M, \mathbb{Q}).$$

Разрезаем M вдоль F и получаем $M|_F$. Тогда: либо $M|_F$ имеет один компонент и $\Gamma = \pi_1(M)$ типа (i) — это значит, что Γ есть X - H - H -расширение, — либо $M|_F$ имеет два компонента, скажем $M|_F = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = F$ и Γ типа (ii),

$$\Gamma = \pi_1(M_1) *_{\pi_1(F)} \pi_1(M_2).$$

Изоморфизм Φ дается вложением.

Можно усилить теорему 3.8. Но существуют дискретные группы

Γ , к которым теория не применима.

В случае $SL_2(\sigma)$ мы опишем некоторые важные результаты.

ТЕОРЕМА 3.9 (Серр [II]).

Пусть $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D < 0$, $|D| > 4$ и h число классов. Пусть $\Gamma = SL_2(\sigma)$. Тогда

$$rg \Gamma^{ab} \geq h.$$

Существует гомоморфизм

$$\psi: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^h.$$

Образы унипотентных элементов в Γ порождают \mathbb{Z}^h .

ТЕОРЕМА 3.10 (Зиммерт [I4], Гринвальд - Шмерман [4]).

Пусть $\Gamma = SL_2(\sigma)$.

Тогда существует гомоморфизм

$$\Phi: \Gamma \rightarrow F_L,$$

F_L — свободная (не абелева) группа ранга L . $L \rightarrow \infty$ при $|D| \rightarrow \infty$.
и $\Phi(x) = 1$ для унипотентного элемента x . Из теорем 3.9 и 3.10 вытекает

СЛЕДСТВИЕ.

$$rg \Gamma^{ab} \geq h + L.$$

Рольф использует формулу Лефшеца. Его результат:

ТЕОРЕМА 3.11 (Рольф [I0]).

Пусть $\Gamma = SL_2(\sigma)$ или подгруппа конечного индекса в $SL_2(\sigma)$.

Пусть $\varphi(D)$ — функция Эйлера и $h(D)$ число классов. Тогда

$$rg \Gamma^{ab} \geq \frac{1}{24} \varphi(D) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} h(D).$$

Мы обратимся к приложению. Рассмотрим

$$G = SL_2(\mathbb{Z}[x]).$$

Пусть $1, \omega$ — базис кольца σ . Отображение

$$f: x \rightarrow \omega$$

определяет гомоморфизм

$$f: SL_2(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow SL_2(\sigma).$$

Мы предполагаем, что f сюръективный гомоморфизм, но доказательства еще нет. Мы опишем некоторые предварительные результаты.

ЛЕММА 3.12. Пусть

$$u \triangleleft SL_2(\sigma),$$

нормальная подгруппа, порожденная всеми унипотентными элементами из $SL_2(\sigma)$.

Тогда

$$u < \text{im } f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Орбиты параболических точек относительно $SL_2(\sigma)$ соответствуют классам идеалов в кольце σ и наоборот. Орбита точки ∞ соответствует классу главных идеалов.

а) Стабилизатор точки ∞ порождается элементами

$$\text{Stab}_{SL_2(\sigma)}(\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Пусть

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\sigma).$$

Мы получим:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1 + \alpha\gamma \end{pmatrix},$$

$$x \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma\omega & \alpha^2\omega \\ -\gamma^2\omega & 1 + \alpha\gamma\omega \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha = a_0 + a_1\omega$, $\gamma = c_0 + c_1\omega$, $a_0, a_1, c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$.

Определяем:

$$a = a_0 + a_1x, \quad c = c_0 + c_1x \in \mathbb{Z}[x].$$

Тогда

$$Y = \begin{pmatrix} 1 - ac & a^2 \\ -c^2 & 1 + ac \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 - acx & a^2x \\ -c^2x & 1 + acx \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}[x]),$$

$$f(Y) = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1},$$

$$f(Y_1) = X \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1}.$$

Доказано, что $\text{Stab}_{SL_2(\sigma)}(p) < \text{im } f$ для всех p из орбиты точки ∞ . б) Пусть $u = (\alpha, \gamma)$ - неглавный идеал.

Параболическая точка

$$z = \frac{\alpha}{\gamma}$$

соответствует идеалу α . Напишем $Stab z$ вместо $Stab_{SL_2(\sigma)}(z)$. Ясно, что

$$Stab z = \left\{ X = \begin{pmatrix} 1+\rho & -\sigma \\ \tau & 1-\rho \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \sigma\tau, \quad \frac{\rho}{\tau} = z \right\}.$$

Напишем $z = \ell/\kappa$, где ℓ, κ идеалы без общего делителя. Тогда

$$\rho = \theta \ell \kappa$$

$$\tau = \theta \kappa^2$$

$$\sigma = \theta \ell^2.$$

Из уравнения $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\ell}{\kappa}$ вытекает

$$\alpha = \alpha \ell$$

$$\gamma = \alpha \kappa$$

Обозначим $\{\alpha\}$ - класс идеала α . Заметим, что

$$\ell, \kappa \in \{\alpha\}^{-1}.$$

Пусть $\tau \in \kappa^2$, скажем, $\tau = \theta \kappa^2$, где

$$\theta = \{\alpha\}^2.$$

Тогда $\theta \ell^2$ - главный идеал, обозначим $\sigma = \theta \ell^2$. Аналогично $\theta \ell \kappa = \rho$ является главным идеалом, для τ, ρ, σ ,

$$X = \begin{pmatrix} 1+\rho & -\sigma \\ \tau & 1-\rho \end{pmatrix} \in Stab z.$$

Значит, что τ пробегает весь идеал κ^2 . Аналогично следует, что σ пробегает весь идеал ℓ^2 и ρ пробегает весь идеал $\ell \kappa$.

в) Пусть $\alpha = (\alpha, \gamma)$ - неглавный идеал, и $z = \alpha/\gamma$.

Мы утверждаем, что

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda \alpha \gamma & \lambda \alpha^2 \\ -\lambda \gamma^2 & 1 + \lambda \alpha \gamma \end{pmatrix} \in im f \cap Stab z$$

для всех $\lambda \in \mathcal{O}$ и индекс конечный.

$$|Stab z : im f \cap Stab z| < \infty.$$

Напишем

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \omega_1,$$

$$\gamma = c_0 + c_1 \omega_1,$$

$$a_0, a_1, c_0, c_1 \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad \in \mathbb{Z}[x].$$

$$c = c_0 + c_1 x$$

Посмотрим

$$Y_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 1-\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1+\alpha\gamma \end{pmatrix}, \quad Y_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} 1-\omega\alpha\gamma & \omega\alpha^2 \\ -\omega\gamma^2 & 1+\omega\alpha\gamma \end{pmatrix} \in \text{Stab } z.$$

$$X_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 1-\alpha c & \alpha^2 \\ -c^2 & 1+\alpha c \end{pmatrix}, \quad X_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} 1-\chi\alpha c & \chi\alpha^2 \\ -\chi c^2 & 1+\chi\alpha c \end{pmatrix} \in \text{Sk}_\chi(\mathbb{Z}[x]).$$

Ясно, что

$$f: X_{i,\alpha} \rightarrow Y_{i,\alpha}, \quad i = 1, 2,$$

и поэтому

$$Y_{1,\alpha}, Y_{2,\alpha} \in \text{Stab } z \cap \text{im } f.$$

Очевидно, что

$$Y_{1,\alpha}^m \cdot Y_{2,\alpha}^n = \begin{pmatrix} 1-(m+n\omega)\alpha\gamma & (m+n\omega)\alpha^2 \\ -(m+n\omega)\gamma^2 & 1+(m+n\omega)\alpha\gamma \end{pmatrix} \in \text{Stab } z \cap \text{im } f.$$

Утверждение доказано.

г) Обратимся к б). Идеал κ имеет \mathbb{Z} -базис

$$\gamma_1 = c, \quad \gamma_2 = c_1 + c_2\omega, \quad c, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}, \quad c, c_2 > 0. \quad \text{Следовательно,}$$

$$N_\kappa = c c_2.$$

Напишем $c = q\kappa$. Из б) следует, что $q\ell = \sigma'$ является главным идеалом. Из в) вытекает

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1+c\sigma' & \sigma'^2 \\ -c^2 & 1-c\sigma' \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1+\omega c\sigma' & \omega\sigma'^2 \\ -\omega c^2 & 1-\omega c\sigma' \end{pmatrix} \in \text{im } f \cap \text{Stab } z.$$

Вычисление индекса нам дает:

$$|\text{Stab } z : \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle| = |\kappa^2 : c^2| = \frac{N c^2}{N \kappa^2} =: N_1.$$

$$\text{Следовательно, } N_1 = \frac{c^4}{c^2 c_2^2} = \frac{c^2}{c_2^2} \quad \text{и поэтому}$$

$$N_1 \mid N_\kappa.$$

Аналогично, мы получим для идеала ℓ :

$$\beta_1 = \ell, \quad \beta_2 = \ell_1 + \ell_2\omega, \quad \ell, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}, \quad \ell, \ell_2 > 0,$$

$$\ell = q'\ell \quad q'\kappa = \tau'$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1+\tau'\epsilon & \epsilon^2 \\ -\tau'^2 & 1-\tau'\epsilon \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 1+\omega\tau'\epsilon & \omega\epsilon^2 \\ -\omega\tau'^2 & 1-\omega\tau'\epsilon \end{pmatrix} \in \text{imf} \cap \text{Stab } z,$$

$$|\text{Stab } z: \langle Y_3, Y_4 \rangle| = N_2^2,$$

$$N_2 \mid N\epsilon$$

Пусть $N := |\text{Stab } z: \text{Stab } z \cap \text{imf}|$

Тогда

$$N \mid N\epsilon, \quad N\kappa.$$

д) Мы изменим параболическую точку:

$$Y' = \begin{pmatrix} 1-t & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+p & \sigma \\ -\tau & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 1+p+t\tau & \sigma+2pt+\tau t^2 \\ -\tau & 1-p-t\tau \end{pmatrix}.$$

Ясно, что из $Y \in \text{imf}$ вытекает $Y' \in \text{imf}$ и наоборот. Новая параболическая точка:

$$z' = \frac{p+t\tau}{\tau}.$$

Посмотрим $p = \theta\epsilon\kappa$, $\tau = \theta\kappa^2$. Построим число $k \in \sigma$, $\hat{k} = p+t\tau$, таким образом, что $\hat{k} = \theta k\epsilon$ удовлетворяет условиям

$$(*) \quad (q, N\kappa) = 1$$

$$(**) \quad t\tau \equiv \hat{k} - p \pmod{p^v}$$

для всех простых идеалов $p \mid \tau$, $\theta\kappa$, $N\kappa$ и для подходящих показателей v .

Если $p^e \parallel \theta\kappa$ и $p^{e+f} \mid \tau$, $f > 0$, тогда из $(p, \tau) = \theta\kappa$ следует, что $p^{e+1} \nmid p$. Построим \hat{k} таким образом, что

$$\hat{k} - p \equiv 0 \pmod{p^{e+f}}.$$

Тогда

$$p^e \parallel \hat{k}.$$

Если $p^e \parallel \theta\kappa$ и $p^e \parallel \tau$, тогда $p^e \mid p$. Построим \hat{k} таким образом, что $p^e \mid \hat{k}$, $p^{e+1} \nmid \hat{k}$. Тогда

$$\hat{k} - p \equiv 0 \pmod{p^e}, \quad p^{e+1} \nmid \hat{k}.$$

Если $p^e \mid \tau$ и $p \nmid p$ построим \hat{k} таким образом, что

$$\hat{k} - p \equiv 0 \pmod{p^e} \quad \text{при этом} \quad p \nmid \hat{k}.$$

Если $p \nmid \tau$ и $p \mid N\kappa$ построим \hat{k} таким образом, что

$$p \nmid \hat{k}.$$

Тогда сравнение $(**)$ разрешимо и условие $(*)$ удовлетворяется.

Новая параболическая точка

$$x' = \frac{K}{q} = \frac{q}{k} .$$

Из 2) вытекает, что $N \mid Ng$ и из $(*)$ следует, что $N = 1$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.13.

$$SL_2(\mathbb{Z}[x])^{ab} = \mathbb{T} \oplus \mathbb{Z}^\infty .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем теорему 3.9. Серра. Известно, что гомоморфизм

$$\psi : SL_2(\sigma) \rightarrow \mathbb{Z}^k$$

задается значениями на унитарных элементах. Теорема следует из леммы 3.12.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если f является сюръективным гомоморфизмом, тогда из Теоремы 3.10 Зиммерта вытекает, что существует сюръективный гомоморфизм

$$g : SL_2(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow \mathbb{F}^\infty$$

\mathbb{F}^∞ - свободная неабелева группа бесконечного ранга.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все унитарные элементы порождают нормальную подгруппу

$$v \subset SL_2(\mathbb{Z}[x]) .$$

Можно доказать, что индекс бесконечный:

$$[SL_2(\mathbb{Z}[x]) : v] = \infty .$$

Пусть $y \in \Omega_2(\sigma)$ - унитарный элемент. Не обязательно существует такой унитарный элемент $x \in SL_2(\mathbb{Z}[x])$, что $f(x) = y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\sigma = \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

Гомоморфизм

$$f : SL(\mathbb{Z}[x]) \rightarrow SL_2(\sigma)$$

является сюръективным гомоморфизмом.

Доказательство использует фундаментальную область группы $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-14}])$. Замечание 2 вытекает из замечания 3.

4. Пусть $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ - дискретная группа, и рассмотрим пространство

$$L^2(\mathbb{H} / \Gamma) .$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - r \frac{\partial}{\partial r}$$

можно расширить до самосопряженного оператора в $L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$.
Мы рассмотрим уравнение

$$\Delta f = \lambda f, \quad f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma).$$

Известно, что собственные значения пробегает дискретное множество:

$$\lambda \in \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \} \subset \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lambda_i < 0.$$

Вычисление первого собственного значения λ_1 — очень трудная задача. Общий метод Сельберга использует тригонометрические суммы. В случае $SL_2(\mathbb{Z})$ существует геометрический метод Рельке. Мы покажем, что метод работает также и в случае $SL_2(\mathbb{Z}[i])$. Для группы $SL_2(\mathbb{Z}(\sqrt{-2}))$ нужно обобщать метод. Мы используем теорему Стокса: Предположим, что:

$$f: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, \Delta f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma).$$

Тогда

$$\int \Delta f \cdot f \, d\nu = - \int \nu^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right) d\nu.$$

Из теоремы Стокса вытекает, что расширение Δ -самосопряженный оператор и что $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[i])$.

Предположим, что

(i) $f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$

(ii) $\Delta f = \lambda f$

(iii) f — параболическая форма.

Тогда $-\lambda > 2\pi^2/5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно нормировать функцию f :

$$\int_{\mathbb{H}/\Gamma} |f|^2 \, d\nu = 1.$$

Напишем $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ и т.д.

Из теоремы Стокса вытекает

$$-\lambda = \int_{\mathbb{H}/\Gamma} \nu^2 (|f_x|^2 + |f_y|^2 + |f_z|^2) \, d\nu.$$

Вспомним фундаментальную область группы $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[i])$:

$$\nu = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 \leq y \leq 1/2 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right\}.$$

Нам нужна также область

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 \leq y \leq 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} \leq r \end{array} \right\}.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}[i]).$$

Легко видеть, что

$$(*) \quad v \subset \mathcal{L} \subset v \cup ABv \cup A^{-1}Bv \cup Bv \cup v.$$

Напишем ряд Фурье функции f

$$f = \sum_{m,n} a_{m,n}(v) e^{2\pi i(mx+ny)}.$$

Из (*) вытекает

$$\begin{aligned} -10\lambda &> \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} (|f_x|^2 + |f_y|^2 + |f_z|^2) \frac{dx dy dz}{z} > \\ &> \sum'_{m,n} 4\pi^2 (m^2 + n^2) \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dz}{z} > \\ &> 4\pi^2 \sum'_{m,n} \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dz}{z} \geq 4\pi^2 \frac{1}{2} \sum'_{m,n} \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dz}{z^3} = \\ &= 2\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}/2}^{\infty} |f|^2 dv = 2\pi^2 \cdot 2 \int_v |f|^2 dv = 4\pi^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}(\sqrt{-2}))$.

Предположим, что

(i) $f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$

(ii) $\Delta f = \lambda f$

(iii) f — параболическая форма.

Тогда $-\lambda > \pi^2/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — нормированная функция, и предположим, что f удовлетворяет (i), (ii), (iii). Ряд Фурье для f

$$f = \sum_{m,n} a_{m,n}(z) e^{2\pi i(mx + n/\sqrt{\lambda}y)}$$

$$a_{m,n}(z) = \alpha_{m,n} \cdot r K_{\lambda}(\pi\sqrt{4m^2 + 4n^2}r), \quad \alpha_{m,n} \in \mathbb{C}$$

$$\lambda = z^2 - 1 \leq 0.$$

Вспомним фундаментальную область для Γ :

$$v = \begin{cases} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{\lambda}/2 \leq y \leq \sqrt{\lambda}/2 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + r^2 \end{cases}.$$

Нам нужна область

$$\mathfrak{X} = \begin{cases} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{\lambda}/2 \leq y \leq \sqrt{\lambda}/2 \\ r \geq 1/2 \end{cases}.$$

Очевидно, что

$$(*) \quad v \subset \mathfrak{X}.$$

Нам надо изучать все области $x \not\in v$, $x \in \Gamma$ такие, что

$$(\#) \quad x \not\in v \cap \mathfrak{X} \neq \emptyset.$$

Значит, что пересечение не имеет внутренних точек. Положим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{\lambda} & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве x в $(\#)$ мы найдем:

$$(6) \quad 1, B, A, A^{-1}, C, C^{-1}, AB, A^{-1}B, CB, C^{-1}B.$$

Мы также найдем, что

$$v \cap A\mathfrak{X} \cap A^{-1}\mathfrak{X} = \emptyset$$

$$v \cap CB \cap C^{-1}\mathfrak{X} = \emptyset$$

$$(66) \quad v \cap (AB)^{-1}\mathfrak{X} \cap (A^{-1}B)^{-1}\mathfrak{X} = \emptyset$$

$$v \cap (CB)^{-1}\mathfrak{X} \cap (C^{-1}B)^{-1}\mathfrak{X} = \emptyset$$

Из (6) и (66) вытекает, что

$$-6\lambda > \int_{\mathcal{L}} (|f_x|^2 + |f_y|^2 + |f_z|^2) \frac{dx dy dz}{r} >$$

$$> \int_{\mathcal{L}} (|f_x|^2 + |f_y|^2) \frac{dx dy dz}{r} = \sum'_{m,n} 2\sqrt{2} \pi^2 (2m^2 + n^2) \int_{1/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r} >$$

$$> \frac{\sqrt{2}}{2} \pi^2 \sum'_{m,n} \int_{1/2}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi^2}{2} \int_{\mathcal{L}} |f|^2 dV .$$

Мы получим неравенство

$$-6\lambda > \frac{\pi^2}{2} \int_{\mathcal{L}} |f|^2 dV .$$

Рассмотрим область

$$v \cap B\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \end{array} \right\} .$$

Разлагаем фундаментальную область $v = v_1 \cup v_2 \cup v_3$:

$$v_1 = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq z \leq 3/2 \end{array} \right\} , \quad v_2 = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 3/2 \leq z < \infty \end{array} \right\} ,$$

$$v_3 = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \\ z \leq 1 \end{array} \right\} .$$

Очевидно, что $v_1 \cup v_3 \subset v \cap B\mathcal{L}$

Мы нормировали функцию f :

$$1 = \int_{v_1} |f|^2 dv + \int_{v_2} |f|^2 dv + \int_{v_3} |f|^2 dv .$$

Мы утверждаем, что

$$(*) \quad \int_{v_1} |f|^2 dv > \int_{v_2} |f|^2 dv .$$

Значит, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sum |a_{m,n}|^2 \int_{1/2}^{3/2} K_1(\pi \sqrt{4m^2 + n^2} \cdot r)^2 \frac{dr}{r} > \\ & > \sqrt{2} \sum |a_{m,n}|^2 \int_{3/2}^{\infty} K_3(\pi \sqrt{4m^2 + n^2} \cdot r)^2 \frac{dr}{r} . \end{aligned}$$

Это утверждение следует из утверждения

$$\int_1^{3/2} K_3(ar)^2 \frac{dr}{r} > \int_1^{\infty} K_3(ar)^2 \frac{dr}{r} , \quad \text{где}$$

$$a = \pi \sqrt{4m^2 + n^2} > 2 .$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $0 < s < 1$. Мы покажем, что функция

$$G(r) = r K_3(ar)$$

убывает монотонно при $r \geq 1$. Используем стандартное выражение для функции Бесселя:

$$G(r) = r \int_0^{\infty} e^{-ar \cos t} \cos(st) dt .$$

Производная является

$$G'(r) = \int_0^{\infty} (1 - ar \cos t) e^{-ar \cos t} \cos(st) dt .$$

Вспомним, что $a \geq 2$, $r \geq 1$, $\cos t \leq 1$. Отсюда следует, что

$$1 - ar \cos t < 0$$

и что $G'(r) < 0$. Поэтому функция $G(r)$ убывает монотонно при $r \geq 1$.

Пусть $H(r) = 1 - \text{тривиальная функция}$. Мы имеем

$$\int_1^{3/2} H(r) \frac{dr}{r^3} = \frac{5}{18} , \quad \int_{3/2}^{\infty} H(r) \frac{dr}{r^3} = \frac{2}{9} < \frac{5}{18} .$$

Следовательно,

$$\int_1^{3/2} H(r) \frac{dr}{r^3} > \int_{3/2}^{\infty} H(r) \frac{dr}{r^3} .$$

Функция $G(r)$ убывает монотонно при $r \geq 1$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$. Поэтому мы получаем

$$\int_{3/2}^{\infty} G(r)^2 \frac{dr}{r^3} < \int_1^{3/2} G(r)^2 \frac{dr}{r^3} .$$

Доказано утверждение (*). Следовательно,

$$\int_{v_1} |f|^2 dv + \int_{v_3} |f|^2 dv > \frac{1}{2} .$$

Обозначим

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2 \\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \\ z \leq 3/2 \end{array} \right\} .$$

Очевидно, что $v_1 \cup v_3 \subset \gamma$ и поэтому

$$\int_{\gamma} |f|^2 dv > 1/2 .$$

Геометрическое изучение нам дает $v \cup B \gamma \subset \mathcal{L}$.

Поэтому мы получим

$$-G\lambda > \frac{\pi^2}{2} \int_{\mathcal{L}} |f|^2 dv > \frac{\pi^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \pi^2 .$$

Отсюда следует, что

$$-\lambda > \frac{\pi^2}{8} .$$

Лемма доказана при $0 < \nu < 1$.

Предположим теперь, что

$$s = it \quad \text{и} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} .$$

Мы докажем, что функция $G(r)$ еще убывает монотонно. Для функции $G(r)$ имеем теперь:

$$G(r) = r K_{it}(ar) = r \int_0^{\infty} e^{-ar \cos x} \cos(tx) dx .$$

Мы получаем:

$$-G'(z) = \int_0^{\infty} (az \cos x - 1) e^{-az \cos x} \cos tx \, dx.$$

Функция

$$K(x) = (az \cos x - 1) e^{-az \cos x}$$

убывает монотонно, если x растет, потому что $K'(x) = -(az \cos x - 2) \times az \sin x \exp(-az \cos x) < 0$.

Мы докажем, что

$$(iv) \left| \int_0^{\pi/2t} (az \cos x - 1) e^{-az \cos x} \cos tx \, dx \right| > \left| \int_{\pi/2t}^{3\pi/2t} (az \cos x - 1) e^{-az \cos x} \cos xt \, dx \right|.$$

Предположим, что утверждение (iv) доказано. Функция $K(x)$ убывает монотонно и, следовательно,

$$\left| \int_{\frac{3+4n}{2t}\pi}^{\frac{5+4n}{2t}\pi} K(x) \cos xt \, dx \right| < \left| \int_{\frac{5+4n}{2t}\pi}^{\frac{7+4n}{2t}\pi} K(x) \cos xt \, dx \right|, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, $G' < 0$ и доказательство заканчивается прежними аргументами. Значит, достаточно доказать (iv)

Мы перепишем утверждение (iv):

$$\begin{aligned} - \int_{\pi/2t}^{3\pi/2t} (az \cos x - 1) e^{-az \cos x} \cos xt \, dx &= \int_0^{\pi} (az \cos(x + \frac{\pi}{2t}) - 1) e^{-az \cos(x + \frac{\pi}{2t})} \sin xt \, dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2t} (az \cos(2x + \frac{\pi}{2t}) - 1) e^{-az \cos(2x + \frac{\pi}{2t})} \sin 2xt \, dx = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2t} (az \cos(2x + \frac{\pi}{2t}) - 1) e^{-az \cos(2x + \frac{\pi}{2t})} \sin xt \cos xt \, dx. \end{aligned}$$

Следовательно, (iv) вытекает из утверждения

$$4(az \cos(2x + \frac{\pi}{2t}) - 1) e^{-az \cos(2x + \frac{\pi}{2t})} \sin xt < (az \cos x - 1) e^{-az \cos x},$$

при $0 \leq x \leq \pi/2t$.

Очевидно, что достаточно доказать

$$4(az \cos(2x + \frac{\pi}{2t}) - 1) e^{-az \cos(2x + \frac{\pi}{2t})} < (az \cos x - 1) e^{-az \cos x}.$$

Вспомним, что функция $K(x)$ убывает монотонно, и поэтому достаточно доказать

$$4(a\tau \cos(x + \frac{\pi}{2t}) - 1)e^{-a\tau \cos(x + \frac{\pi}{2t})} < |a\tau \cos x - 1|e^{-a\tau \cos x}.$$

Из монотонности функции $K(x)$ вытекает, что достаточно взять t максимальным в $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ значит $t = \frac{1}{2}$:

$$4(a\tau \cos(x + \pi) - 1)e^{-a\tau \cos(x + \pi)} < (a\tau \cos x - 1)e^{-a\tau \cos x}.$$

Очевидно, что это эквивалентно

$$(ix) \quad 4 \frac{a\tau \cos(x + \pi) - 1}{a\tau \cos x - 1} < e^{a\tau(\cos(x + \pi) - \cos x)}.$$

Перепишем утверждение (ix)

$$4 \frac{a\tau \cos(x + \pi) - 1}{a\tau \cos x - 1} = 4\pi + 4a\tau \frac{\sin x \sin \pi}{a\tau \cos x - 1} + 4 \frac{\cos \pi - 1}{a\tau \cos x - 1}$$

Ясно, что $\sin x < 2\cos x - 1$

и, следовательно, $\sin x < a\tau \cos x - 1$.

Таким образом, (ix) вытекает из

$$8\cos \pi - 4 + 4a\tau \sin \pi < e^{a\tau(\cos(x + \pi) - \cos x)}.$$

Выражение справа:

$$a\tau(\cos(x + \pi) - \cos x) = a\tau \cos x (\cos \pi - 1) + a\tau \sin x \sin \pi.$$

Поэтому достаточно доказать

$$(xi) \quad 8\cos \pi - 4 + 4a\tau \sin \pi < e^{a\tau(\cos \pi - 1)}.$$

Утверждение (xi) правильно при $a\tau > 2$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ - дискретная группа

Пусть f - функция, и предположим, что

$$(i) \quad f, \Delta f \in L^2(\mathbb{H}/\Gamma)$$

$$(ii) \quad \Delta f = \lambda f.$$

Тогда

$$(a) \text{ если } \Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z}(i)) \quad , \text{ то } -\lambda > \frac{2\pi^2}{5} > 1$$

$$(б) \text{ если } \Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z}(\sqrt{-2})) \quad , \text{ то } -\lambda > \pi^2/8 > 1.$$

В обоих случаях f является параболической формой.

Доказательство стандартно. Строится параболическая форма вида $af + \mathcal{E}$,

где E - ряд Эйзенштейна и используются свойства ряда Эйзенштейна.

Литература

- 1 B o r e l A.: Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3-manifolds. Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa,Cl.Sci.(4) 8 (1981), 1-33.
- 2 B r a u n H.: Zur Theorie der hermitischen Formen.Abh. Math.Sem.Univ. Hamburg 14 (1941), 61-150.
- 3 E l s t r o d t J., G r u n e w a l d F., M e n n i c k e Zeta-functions of binary Hermitian forms and special values of Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space. **Препринт Института Макса Планка, 1987.**
- 4 G r u n e w a l d F., S c h w e r m e r S., Free non-abelian quotients of SL_2 over order of imaginary quadratic number fields, Journal of Algebra, 69 (1981) 298-304.
- 5 L i g o z a t G.: Courbes modulaires de genre 1. Bull.Soc. Math.France, Mémoire 43 (1975), 80 p.
- 6 М а р г у л и с Г.А. Фактор-группы дискретных подгрупп и теория меры, Функц.Анал. и его прил. 12, № 4 (1978), 64-80.
- 7 O t r e m b a G. Zur Theorie der hermitischen Formen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern. J. Rune Angew.Math.249 (1971), 1-19.
- 8 P e t e r s o n A. Modulformen und quadratische Formen. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag. 1982.
- 9 R o e l c k e W. Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster stat. S. - ber. Heidelberger Akad.Wiss.,math.-naturw.Kl. 1953/55, 4. Abh., 109 S (1956).
- 10 R o h l f s J. On the cuspidal cohomology of the Bianchi modular groups. Math.Z. 188 (1985), 253-269.
- 11 S e r r e J.P. Le problème des groupes de congruence pour SL_2 . Ann. of Math. (2) 92 (1970), 489-527.
- 12 T h u r s t o n W. The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Notes. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1980.
- 13 Z i e n c h a n g H., V o g t E., C o l d e m e y H.D. Flächen und ebene diskrete Gruppen. Springer Lecture Notes in Mathematics, 122 (1970).
- 14 Z i m m e r t R.: Zur SL_2 der ganzen zahlen eines imaginär - quadratischen Zahlkörpers. Invent.Math. 19 (1973), 73-81.