А. А. Котсиолис, А. П. Осколков, О разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений движения жидкостей Олдройта на $(0,\infty)$ и поведении ее решений при $t \to +\infty$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 150, 48–52

А.А.Котсиолис, А.П.Осколков

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОЛДРОЙТА НА $(0,\infty)$ И ПОВЕДЕНИИ ЕЕ РЕШЕНИЙ ПРИ $t\to+\infty$

1. Жидкостью Олдройта (точнее говоря, жидкостью Олдройта порядка $L=1$) называется линейная вязкоупругая жидкость, определяющее уравнение которой, связывающее девиатор напряжений σ и тензор скоростей деформаций $\mathcal{D}$, имеет вид [1] - [2] :

$$\sigma+\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial t}=2\nu\mathcal{D}+2\varkappa\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t}, \quad \lambda,\nu,\varkappa>0, \quad \nu-\varkappa\lambda^{-1}>0. \tag{1}$$

В работах А.П.Осколкова [3] - [7] показано, что движение жидкости Олдройта может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$L(v)\equiv\frac{\partial v}{\partial t}+v^k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu\Delta v-\Delta u+\operatorname{grad}p=f,\quad v=\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u,\quad \operatorname{div}v=0,$$
$$\mu=\varkappa\lambda^{-1},\quad \alpha=\lambda(\nu-\mu)^{-1},\quad \beta=(\nu-\mu)^{-1}. \tag{2}$$

Основная начально-краевая задача для системы (2) заключается в решении (2) в $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\in E^n$, $n=2,3$, $0<T\leqslant\infty$, начально-краевых условиях

$$v\big|_{t=0}=v_0(x),\quad u\big|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega;\quad v\big|_{\partial Q_T}=u\big|_{\partial Q_T}=0. \tag{3}$$

В работах А.П.Осколкова [3] - [7] доказана однозначная классическая разрешимость начально-краевой задачи (2)-(3) в целом при $\forall T<\infty$, если Ω -двумерная ограниченная область, и в малом, если $\Omega\in E^3$. В настоящей работе мы доказываем однозначную классическую разрешимость начально-краевой задачи (2),(3) при $\Omega\in E^2$ в целом на $(0,\infty)$ и показываем, что при определенных условиях на данные задачи решение задачи (2),(3) стремится при $t\to+\infty$ к решению v^* начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса:

$$L^*(v^*)\equiv\frac{\partial v^*}{\partial t}+v^{*k}\frac{\partial v^*}{\partial x_k}-\nu\Delta v^*+\operatorname{grad}p^*=f,\ \operatorname{div}v^*=0;\ v^*\big|_{t=0}=v_0(x),\ v^*\big|_{\partial Q_T}=0. \tag{4}$$

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия: Ω - двумерная ограниченная **область**; $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$; $v_0(x)\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)\cap H(\Omega)$; $f(x,t)\in L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))\cap L_2(Q_T)$; $f_t\in L_{2,1}(Q_T)$; $0<\alpha<1$; $0<T\leqslant\infty$. Тогда начально-краевая задача (2),(3) имеет **единственное** решение (v,u,p) такое, что:

$v(x,t)\in W^1_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega)\cap \mathring{J}(\Omega))\cap L_\infty(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega)\cap H(\Omega))$, $\frac{\partial v_x}{\partial t}\in L_2(Q_T)$;

$u(x,t)\in W^2_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega)\cap \mathring{J}(\Omega))\cap W^1_\infty(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega)\cap H(\Omega))$, $\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\in L_2(Q_T)$;

$p_x(x,t)\in L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))$, и для него имеет место оценка:

$$\|v\|_{L_\infty(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega))}+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))}+\left\|\frac{\partial v_x}{\partial t}\right\|_{2,Q_T}+$$

$$+\|u\|_{W^1_\infty(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega))}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))}+\left\|\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right\|_{2,Q_T}+$$

$$+\|p_x\|_{L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))}\le C_1\left(\|v_0\|^{(2+\alpha)}_{\bar\Omega};\ \|f\|_{L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))};\ \|f_t\|_{2,1,Q_T};\ \mu^{-1},\alpha^{-1}\right), \qquad (5)$$

причем постоянная C_1 не зависит явно от T , $0<T\le\infty$.

Как и при доказательстве разрешимости начально-краевой задачи для двумерной системы уравнений Навье-Стокса [8] , для доказательства теоремы I достаточно получить для решений задачи (2),(3) равномерные по $0<T\le\infty$ оценки:

$$\frac{1}{2}\max_{[0,T]}\left(\|v\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega_t}\right)^{1/2}+\mu\|v_x\|^2_{2,Q_T}+\beta\|u_x\|^2_{2,Q_T}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{2,\Omega}+\left(\|v_0\|_{2,\Omega}+\|f\|_{2,1,Q_T}\right)\|f\|_{2,1,Q_T}\equiv A, \qquad (6)$$

$$\max_{[0,T]}\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_{tx}\|^2_{2,\Omega_t}\right)^{1/2}\le\left[\|v_t(x,0)\|_{2,\Omega}+\|f_t\|_{2,1,Q_T}\right]\exp(A\mu^{-2}), \qquad (7)$$

$$\mu\|v_{tx}\|^2_{2,Q_T}+2\beta\|u_{tx}\|^2_{2,Q_T}\le\|v_t(x,0)\|^2_{2,\Omega}+2\left[\|v_t(x,0)\|_{2,\Omega}+\|f_t\|_{2,1,Q_T}\right]\times$$

$$\times\|f_t\|_{2,1,Q_T}\exp(A\mu^{-2})+2A\mu^{-2}\left[\|v_t(x,0)\|_{2,\Omega}+\|f_t\|_{2,1,Q_T}\right]^2\exp(2A\mu^{-2}). \qquad (8)$$

С помощью оценок (6)-(8) методом Галеркина доказывается (ср. [8] , [3]-[6]), что задача (2),(3) имеет единственное обобщенное решение (v,u) в смысле О.А.Ладыженской ([8] , [3]-[6]), а после этого с помощью теорем вложения С.Л.Соболева и теорем о классической разрешимости соответствующей линеаризованной задачи [3]-[6] теорема I доказывается в полном объеме.

Оценки (6)-(8) получаются из равенств

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega_t}\right)+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega_t}+\beta\|u_x\|^2_{2,\Omega_t}=(f,v)_{2,\Omega_t},\ 0\le t\le T, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_{tx}\|^2_{2,\Omega_t}\right)+\mu\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega_t}+\beta\|u_{tx}\|^2_{2,\Omega_t}+\int_{\Omega_t} v_t^k v_{x_k} v_t\,dx=(f_t,v_t)_{2,\Omega_t}, \quad (10)$$

которые, в свою очередь, получаются соответственно из равенств

$$\int_{\Omega_t} L(v)\cdot v\,dx=\int_{\Omega_t} f v\,dx, \quad \int_{\Omega_t} L_t(v)\cdot v_t\,dx=\int_{\Omega_t} f_t\cdot v_t\,dx, \quad 0\le t\le T. \quad (11)$$

В самом деле, из равенства (9) имеем прежде всего неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}(v^2+\alpha u_x^2)\,dx\le\|f\|_{2,\Omega_t}\left(\int_{\Omega}(v^2+\alpha u_x^2)\,dx\right)^{1/2}, \quad t\ge 0, \quad (12)$$

из которого следует нервенство:

$$\max_{[0,T]}\left(\|v\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega_t}\right)^{1/2}\le\|v_0\|_{2,\Omega}+\|f\|_{2,1,Q_T}. \quad (13)$$

Далее, из равенства (9) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega_t}\right)+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega_t}+\beta\|u_x\|^2_{2,\Omega_t}\le\|f\|_{2,\Omega_t}\left(\int_{\Omega_t}(v^2+\alpha u_x^2)\,dx\right)^{1/2}, \quad (14)$$

из которого, используя (13), мы и получим оценку (6).

Далее, используя для оценки интеграла $J\equiv\int_{\Omega_t} v_t^k v_t v_{x_k}\,dx$ в равенстве (10) теорему вложения ([8] , гл.I)

$$\|v_t\|^4_{L_4(\Omega_t)}\le 2\|v_t\|^2_{2,\Omega_t}\cdot\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega_t} \qquad (\Omega\in E^2), \quad (15)$$

получим неравенство (ср. [8] , гл.VI):

$$|J|\le\frac{\mu}{2}\|v_{tx}\|^2_{2,\Omega_t}+\mu^{-1}\|v_x\|^2_{2,\Omega_t}\cdot\|v_t\|^2_{2,\Omega_t}, \quad 0\le t\le T; \quad (16)$$

после этого из равенства (10) для $y^2(t)\equiv\int_{\Omega_t}(v_t^2+\alpha u_{tx}^2)\,dx$ получим неравенство:

$$\frac{d}{dt}y^2(t)\le 2\|f_t\|_{2,\Omega_t}\cdot y(t)+2\mu^{-1}\|v_x\|^2_{2,\Omega_t}\cdot y^2(t), \quad 0\le t\le T, \quad (17)$$

из которого с помощью леммы Гронуолла ([8], гл.VI) и оценки (6) получаем оценку (7).

Наконец, из равенства (10) с помощью неравенства (16) получим неравенство:

$$\mu\|v_{tx}\|^2_{2,Q_T}+2\beta\|u_{tx}\|^2_{2,Q_T}\le\|v_t(x,0)\|^2_{2,\Omega_t}+2\int_0^T\|f_t\|_{2,\Omega_t}\cdot\|v_t\|_{2,\Omega_t}\,dt+$$

$$+2\mu^{-1}\int_0^T\|v_x\|^2_{2,\Omega_t}\cdot\|v_t\|^2_{2,\Omega_t}\,dt, \quad (18)$$

из которого с помощью оценок (6) и (7) получаем оценку (8).

Подчеркнем еще раз, что постоянные в оценках (6)-(8), а потому и постоянная C_1 в вытекающей из (6)-(8) оценке (5), не зависят явно от $T \le \infty$.

3. ТЕОРЕМА 2. Пусть в начально-краевой задаче (2),(3) для уравнений движения жидкости Олдройта и начально-краевой задаче (4) для уравнений Навье-Стокса область Ω, ее граница $\partial\Omega$, начальное условие $v_0(x)$ и свободный член $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы I при $T=\infty$ и пусть, кроме того, выполнены следующие дополнительные условия:

$$\varkappa^{-1}C_\Omega^2 \ge 1-\delta, \quad \int_0^\infty \left(e^{\nu C_\Omega^{-2}t}\|f\|^2_{2,\Omega_t} + e^{(\nu C_\Omega^{-2}-\delta)t}\|f_t\|_{2,\Omega_t}\right)dt<\infty, \quad 0<\delta\ll 1, \tag{19}$$

причем C_Ω^2 – постоянная из неравенства Фридрихса [8]

$$\|v\|^2_{2,\Omega} \le C_\Omega^2\|v_x\|^2_{2,\Omega}, \qquad \forall\, v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega). \tag{20}$$

Тогда при $t\to+\infty$ разность $\omega(x,t)\equiv v-v^*$ решений начально-краевых задач (2),(3) и (4) стремится к нулю в следующем смысле:

$$\|\omega_x(x,t)\|_{2,\Omega_t} \le C_2 e^{-(\mu C_\Omega^{-2}-\delta)t}, \quad t\to+\infty, \quad 0<\delta\ll 1, \tag{21}$$

причем постоянная C_2 определяется только описанными выше данными задач (2),(3) и (4).

В самом деле, легко видеть, что $\omega(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$L(\omega)\equiv \frac{\partial\omega}{\partial t}-\nu\Delta\omega+v^{*k}\omega_{x_k}+v_{x_k}\omega^k-\lambda\Delta u_t+\operatorname{grad}(p-p^*)=0, \quad \operatorname{div}\omega=0, \tag{22}$$

из которого для ω получается неравенство (ср. [8], гл.VI):

$$\frac{\nu}{2}\|\omega_x\|_{2,\Omega_t} \le \nu C_\Omega^{-1}\left(\|v\|_{2,\Omega_t}+\|v^*\|_{2,\Omega_t}\right)\|v_x\|^2_{2,\Omega_t}+C_\Omega\left(\|v_t\|_{2,\Omega_t}+\|v_t^*\|_{2,\Omega_t}\right)+\lambda\|u_{tx}\|_{2,\Omega_t}. \tag{23}$$

Из равенств $\int_{\Omega_t} L(v)v\,dx=\int_{\Omega_t} fv\,dx$, $\int_{\Omega_t} L^*(v^*)v^*dx=\int_{\Omega_t} fv^*dx$, при условиях (19) аналогично оценке (13) получим оценки (ср.также [8], гл.VI):

$$\|v\|^2_{2,\Omega_t}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega_t} \le \left(\|v_0\|^2_{2,\Omega}+\mu^{-1}C_\Omega^{+2}\int_0^\infty e^{\mu C_\Omega^{-2}t}\|f\|^2_{2,\Omega_t}dt\right)\exp(-\mu C_\Omega^{-2}t), \tag{24}$$

$$\|v^*\|^2_{2,\Omega_t} \le \left(\|v_0\|^2_{2,\Omega}+\nu^{-1}C_\Omega^{+2}\int_0^\infty e^{\nu C_\Omega^{-2}t}\|f\|^2_{2,\Omega_t}dt\right)\exp(-\nu C_\Omega^{-2}t). \tag{25}$$

Далее, из равенств $\int_{\Omega_t} L_t(v)v_t\,dx = \int_{\Omega_t} f_t v_t\,dx$, $\int_{\Omega_t} L_t^*(v^*)v_t^*dx = \int_{\Omega_t} f_t v_t^* dx$ при условиях (I9) аналогично оценке (7) получаются оценки (ср. также [8]):

$$\left(\|v_t\|^2_{2,\Omega_t} + a\|u_{tx}\|^2_{2,\Omega_t}\right)^{1/2} \leqslant \left(\|v_t(x,0)\|_{2,\Omega} + \int_0^\infty e^{(\mu C_\Omega^{-2}-\delta)t}\left(\|f_t\|_{2,\Omega_t} + A(t)\right)dt\right) e^{-(\mu C_\Omega^{2}-\delta)t}, \quad (26)$$

$$\|v_t^*\|_{2,\Omega_t} \leqslant \left(\|v_t^*(x,0)\|_{2,\Omega} + \int_0^\infty e^{(\nu C_\Omega^{-2}-\delta)t}\left(\|f_t\|_{2,\Omega_t} + A^*(t)\right)dt\right) e^{-(\nu C_\Omega^{-2}-\delta)t}, \quad (27)$$

в которых функции $A(t)$ и $A^*(t)$ определяются описанными выше данными задач (2),(3) и (4) и в силу наложенных на эти данные условий (I9) заведомо удовлетворяют условиям $\int_0^\infty exp[(\mu C_\Omega^{-2}-\delta)t]A(t)\,dt < \infty$, $\int_0^\infty A^*(t)\,exp[(\nu C_\Omega^{-2}-\delta)t]\,dt < \infty$.

Наконец, из равенства $\int_{\Omega_t} L(v)v\,dx = \int_{\Omega_t} f v\,dx$ следует неравенство:

$$\|v_x\|^2_{2,\Omega_t} \leqslant C_3(\mu^{-1})\left(\|f\|^2_{2,\Omega_t} + \|v_t\|^2_{2,\Omega_t} + \|u_x\|^2_{2,\Omega_t}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty. \quad (28)$$

После этого оценка (2I) следует из неравенств (23),(28) и оценок (24)-(27).

Литература

I. О l d r o y d J.G. Proc.Roy.Soc.(London),1950, A200,p.523-541.

2. О л д р о й т Дж.Г. - В сб.: Реология. Теория и приложения. М., I962, с.757-793.

3. О с к о л к о в А.П. Препринт ЛОМИ Р-2-80, Л., I980, 39 с.

4. О с к о л к о в А.П. Тр.Мат.ин-та АН СССР, I983, т.I59, с.IOI-I3I.

5. О с к о л к о в А.П. Препринт ЛОМИ Р-2-83, Л., I983, 65 с.

6. О с к о л к о в А.П. Автореф.докт.дисс., Л., I983, 32 с.

7. О с к о л к о в А.П. В кн.: Вопр.динам.теории распростр. сейсм.волн. ХХУП, Л., I986, с.I24-I42.

8. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-ое изд. М., I970 г.